تحليل الاستقرارية للحلول اللازمنية لمعادلة Lamm

بدران جاسم سالم ، عدي احمد جاسم ، رنا عبد الله احمد

قسم الرياضيات ، كلية التربية الاساس ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

(تاريخ الاستلام: ٢٠/ ٨ / ٢٠٠٧ ---- تاريخ القبول: ٢٧ / ٢ / ٢٠٠٨)

الملخص

تم في هذا البحث دراسة تحليل الاستقرارية لمعادلة Lamm باستخدام طريقة تحليل الاستقرارية من النمط Fourier (Fourier mode Stability analysis) في حالتين،الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة باستخدام الحل التحليلي وقد تبين انه في حالتي كون السعة ثابتة و حالة كون السعة متغيرة فان الحل يكون مستقرا" دائماً تحت أي ظروف.

١ – المقدمة

أي نظام مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما يقال أن الحالة مستقرة (stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S. النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حالياً في حالة معتمدة على الزمن ، ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس صورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي أضافي صغير إلى النظام الشمسي فان هذا النظام لا يتأثر إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة، أي أن النظام الشمسي مستقر[5].

ومن الأمثلة المهمة الأخرى على مفهوم الاستقرارية التطويري، حركة الأمبيا تحت تأثير الانتشار Diffusion والانجذاب الكيميائي إذ أن هذا الأخير هو عبارة عن الحركة الناتجة عن التغيرات في تركيز المواد الكيميائية التي تفرزها الاميبا نفسها، هذا النموذج يكون غير مستقر إذا كانت قابلية الحركة (Motility) أو معدل التحليل (Decay Rate) للمادة الجاذبة صغيرين أو إذا كان معدل الإفراز (Secretion Rate) أو قوة الانجذاب الكيميائي كبيرين.ولهذه الظاهرة أهمية كبيرة في علم الأحياء التطويري، والمفهوم نفسه ينطبق على جميع الظواهر الطبيعية الأخرى [5].

٢–النموذج الرياضي:

من معادلات الانتشار–التفاعل المعروفة معادلة Lamm غير الخطية آلاتية:[9]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]-sw^2\left[r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)+2u\right] \qquad (1)$$

مع الشروط الأولية والحدودية:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u(0,t)}{\partial t}=\dfrac{\partial u(1,t)}{\partial t}=0\\ u(r,0)=u_0(r)\\ 0\le r\le 1\\ t>0\\ D>0\\ S>0\end{array}\right\} \qquad (2)$$

حيث $u(r,t)$ تمثل تركيز سائل معين داخل نابذة الطرد المركزي ، وان t الزمن، r نصف قطر النابذة، D معامل الانتشار، S معامل الترسيب، w سرعة الدوران السائل داخل النابذة [1] .

درس Maginu في عام (1978) استقرارية الحلول اللازمنية لهذا النوع من معادلات التفاعل –الانتشار باستخدام طريقة Liapunov الثانية إذ حصل على شروط الاستقرارية وبين أن هذه الشروط مرتبطة على نحو وثيق بشروط الوجود لهذه الحدود[4].

كما قام كل من Smaller و Conley في عام (1980) بتوضيح ودراسة كيفية استخدام عدد من المفاهيم التبولوجية للحصول على معلومات أدق بشأن الحلول اللازمنية لمعادلات التفاعل والانتشار[2].

اختبر Howes في عام 1986 استقرارية الحلول الثابتة لمعادلات التغير الحراري والانتشار للتأثيرات في البيانات الأولية وقد استخدمت بشكل خاص شروط على حدود التفاعل والانتشار لإثبات استقرارية الطبقة اللازمنية وهذه الشروط هي معامل انتشار الحرارة يكون اكبر من الصفر وكذلك انتشار الحرارة ضمن فترة زمنية معينة هي[0,1] [3].

وجد كلا من Weiming and Borries في عام 2000 سرعة الترسيب لمعادلة Lamm بواسطة تحليل حجم التوزيع المستمر والمتقطع لجزيئات عينة صغيرة.باستخدام طريقة العناصر المنتهية[8].

وفي عام 2006 استخدام كلا من Yun Wang, Chao الحدود التقريبية الكاملة لمعادلة Lamm لإيجاد سرعة الترسيب ووجدا أن الاختلاف بمقدار الانحراف هو اصغر من1% عن القيم الحقيقية [9].

وفي هذه الدراسة تمت دراسة مفصلة لاستقرارية الحلول اللازمنية لمعادلة الحمل والانتشار باستخدام تحليل الاستقرارية نمط Fourier في حالتين الأولى في حالة كون السعة ثابتة والثانية في حالة كون السعة متغيرة.

٣– تحليل الاستقرارية:

أن هذا النوع من دراسة الاستقرارية يوضح كثيراً من خواص الاستقرارية الشائعة في ميكانيك الموائع والفيزياء وعلم الأحياء إذ يوضح كيف أن تغير أو إزعاجا صغيراً (ظروف خارجية قد تؤثر على الاستقرارية وتجعل النظام غير مستقر أو قد لا تؤثر عليه) في النظام الفيزيائي يمكن أن يؤدي في النهاية إلى نتائج بعيدة كما يساعدنا هذا النوع من دراسة تحليل الاستقرارية في دراسة السلوك المستقبلي للنظام الفيزيائي ويبين كذلك تأثير عدم الاستقرارية في النظام[5].

٤ – التحويلات اللابعدية لمعادلة Lamm:

لتحويل معادلة Lamm المتمثلة بالمعادلة (1) إلى الحالة اللابعدية (وهي الحالة التي تجعل المعادلة خالية من الوحدات) في r, t فأننا نحتاج إلى التحويلات آلاتية:[7]

$$t = L^2 T$$

$$r = LR$$

$$w = LW$$

حيث أن كلا من L,T,W,R ثوابت بدون وحدات وهي نصف القطر والسرعة والزمن والطول على التوالي ، وباستخدام هذا التحويل نحصل على:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial r} = \frac{1}{L}\frac{\partial u}{\partial R}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{L^2}\frac{\partial u}{\partial T}$$

وبعد تعويض الكميات أعلاه في المعادلة (1) ينتج:

$$\frac{1}{L^2}\frac{\partial u}{\partial T} = D\left[\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{RL^2}\frac{\partial u}{\partial R}\right] - SW^2\left[R\frac{\partial u}{\partial R} + 2u\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial T} = D\left[\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial R}\right] - SL^2W^2\left[R\frac{\partial u}{\partial R} + 2u\right] \qquad (3)$$

والشروط الأولية والحدودية في المعادلة (1) تصبح:

$$0 \le R \le 1$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial T} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial T} = 0$$

$$T > 0$$

$$u(r,0) = u_0(r)$$

$$D > 0$$

$$S > 0$$

حيث المعادلة (3) تمثل الصيغة اللابعدية لمعادلة Lamm.

٥ – تحليل الاستقرارية من النمط فورير (Fourier) لمعادلة Lamm:

٥–١– تحليل الاستقرارية في حالة السعة ثابتة:

الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي افتراض الحل على الشكل الأتي:[5]

$$u(r,t) = u_1(R) + u_2(R,T) \qquad (4)$$

إذ تمثل $u_1(R)$ الحل اللازمني للمعادلة (3) في حين تمثل $u_2(R,T)$ الإزعاج الذي يعانيه النظام المعتمد على الزمن حيث:

$$u_2(R,T) = Ae^{ik(R-cT)} \qquad (5)$$

$$A > 0 \ ، \ k > 0 \ ، \ c = c_1 + ic_2 \ ، \ i = \sqrt{-1}$$

حيث A يمثل سعة الموجة، k يمثل العدد ألموجي (التردد: وهو عدد الذبذبات التي تحدث في زمن معين في الفترة $[-\pi, \pi]$)، c هي سرعة الموجة وهي ذات قيمة معقدة، وان القيمة الموجبة أو السالبة لـ c_2 هي التي تحدد حالة الاستقرار أو عدمه، ففي حالة كون $c_2 > 0$ يزداد الإزعاج بمرور الزمن، وان الحل يكون غير مستقر في هذه الحالة. أما في حالة كون $c_2 < 0$ فان الإزعاج يتلاشى بمرور الزمن ويكون الحل مستقر في هذه الحالة. أما عندما $c_2 = 0$ فهي تعطي منحني الاستقرارية المتعادلة وهو المنحني الذي يفصل بين المنطقة المستقرة وغير المستقرة.

وبتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{\partial u_2(R,T)}{\partial T} = D\left[\frac{\partial^2 u_1(R) + \partial^2 u_2(R,T)}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u_1(R) + \partial u_2(R,T)}{\partial R}\right] - SL^2W^2\left[R\frac{\partial u_1(R) + \partial u_2(R,T)}{\partial R} + 2\left(u_1(R) + u_2(R,T)\right)\right]$$

وبفصل الحالتين الزمنية و اللازمنية نحصل على:

$$\frac{\partial u_2(R,T)}{\partial T} = D\left[\frac{\partial^2 u_2(R,T)}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u_2(R,T)}{\partial R}\right] - SL^2W^2\left[R\frac{\partial u_2(R,T)}{\partial R} + 2u_2(R,T)\right] \qquad (6)$$

$$D\left[\frac{\partial^2 u_1(R)}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial u_1(R)}{\partial R}\right] - SL^2W^2\left[R\frac{\partial u_1(R)}{\partial R} + 2u_1(R)\right] = 0 \qquad (7)$$

حيث أن المعادلة (6) تمثل الحالة الزمنية في حين المعادلة (7) تمثل الحالة اللازمنية ، والتي يكون الحل لها بالشكل التالي:[6]

$$u_1(R) = \frac{c_0 c^{-\tau}}{2}\left[1 - erf\left[\frac{1-\left(\mathrm{Re}^{-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left[\varepsilon\left(1-e^{-\tau}\right)\right]}\right] + \frac{\left[2\varepsilon\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}R^{\frac{1}{4}}\left[1+\left(\mathrm{Re}^{-\tau}\right)^{\frac{1}{4}}\right]}e^{\left[-\frac{\left[1-\left(\mathrm{Re}^{-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}{\varepsilon\left(1-e^{-\tau}\right)}\right]}\right]$$

حيث c_0 ثابت اختياري معلوم، $erf\left[\frac{1-\left(\mathrm{Re}^{-\tau}\right)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon\left(1-e^{-\tau}\right)}\right]$ مقدار الخطأ،

$$\tau = 2SW^2 t$$

$$\varepsilon = \frac{2D}{SW^2R^2}$$

وبتعويض المعادلة (5) في المعادلة (6) نحصل على:

$$-ickAe^{ik(R-cT)} = -D\left[k^2Ae^{ik(R-cT)} - \frac{1}{R}ikAe^{ik(R-cT)}\right]$$
$$-SL^2W^2\left[RikAe^{ik(R-cT)} + 2Ae^{ik(R-cT)}\right]$$

بالقسمة على $kAe^{ik(R-cT)}$ يكون:

$$-ic = -Dk + i\frac{D}{R} - iSL^2W^2R - \frac{2SW^2}{k}$$

بالتعويض عن قيمة $c = c_1 + ic_2$ ومساواة الجزء الحقيقي والجزء الخيالي ينتج:

$$-ic_1 + c_2 = -\left(Dk + \frac{2SL^2W^2}{k}\right) - i\left(SL^2W^2R - \frac{D}{R}\right)$$

وبهذا نحصل على قيمة c_1

$$c_1 = \left(SL^2W^2R - \frac{D}{R}\right)$$

وكذلك على قيمة c_2

$$c_2 = -\left(Dk + \frac{2SL^2W^2}{k}\right)$$

وبما أن c_2 هي التي تحدد وجود الاستقرارية من عدمها وان D, k, S, W موجبة دائماً فان $c_2 < 0$ وبذلك فان النظام في هذه الحالة يكون مستقر دائماً تحت أي ظرف من ظروف.

٥-٢- تحليل الاستقرارية في حالة السعة متغيرة:

في حالة كون السعة متغيرة فان المعادلة (4) تتحول إلى: [5]

$$u_2(R,T) = A(R)e^{ik(R-cT)} \qquad (8)$$

وبتعويض المعادلة (8) في المعادلة (6) ينتج:

$$A''(R) + \lambda A'(R) + \alpha A(R) = 0 \qquad (9)$$

حيث

$$\lambda = \left(-\frac{1}{R} - \frac{SRL^2W^2}{D}\right)$$

$$\alpha = \left(\frac{-c_2k - 2SL^2W^2 - Dk^2}{D}\right)$$

وان المعادلة المميزة للمعادلة (9) تكون: [5]

$$m^2 + \lambda m + \alpha = 0 \qquad (10)$$

جذري المعادلة (10) هما:

$$m = -\frac{1}{2}\lambda \pm \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\alpha} \qquad (11)$$

إذا كان المقدار المميز $\lambda^2 - 4\alpha > 0$ فان الحل العام للمعادلة (9) هو الحل التافه(الحل الصفري) فقط، أما إذا كان $\lambda^2 - 4\alpha < 0$ فالحل العام للمعادلة (9) مع الشروط الحدودية في المعادلة (2) هو:[5]

$$A(R) = e^{-\frac{\lambda R}{2}}(A\cos\beta R + B\sin\beta R) \qquad (12)$$

حيث أن $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha - \lambda^2}$ ، وأن A, B ثوابت اختيارية.

وباستخدام الشروط الحدودية نحصل على:

$$\beta B - \frac{1}{2}\lambda A = 0 \qquad (13)$$

$$\left[(-\beta A\sin\beta + \beta B\cos\beta) - \frac{\lambda}{2}(A\cos\beta + B\sin\beta)\right] = 0 \qquad (14)$$

وبتعويض المعادلة (13) في المعادلة (14) ينتج:

$$(-\beta - \frac{\lambda^2}{4\beta})A\sin\beta = 0$$

وبما أن

$$(-\beta - \frac{\lambda^2}{4\beta}) \neq 0$$

إذا:

$$\sin\beta = 0$$

$$\beta = n\pi \qquad ,n = 1,2,3,..............$$

ولكن:

$$\beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha - \lambda^2}$$

إذا:

$$n\pi = \frac{1}{2}\sqrt{4\alpha - \lambda^2} \qquad (14)$$

وبتعويض قيم كل من α و λ في المعادلة (15) وتبسيطها ينتج:

$$c_2 = -\left[\frac{2SW^2R^2 + 4D + 8RSW^2 + 4R^2S^2W^4 + n^2\pi^2R^2D + k^2R^2}{kR^2}\right] \qquad (16)$$

وبما أن c_2 هي التي تحدد وجود الاستقرارية من عدمها وان (D, k, S, W, R, n, π) موجبة دائماً فان $c_2 < 0$ وبذلك فان النظام في هذه الحالة يكون مستقر دائماً أيضا" تحت أي ظروف.

٦- الاستنتاجات:

نستنتج من خلال دراسة الاستقرارية في حالتي كون السعة ثابتة والسعة متغيرة أن معادلة Lamm المتمثلة بالمعادلة (1) والشروط الحدودية في المعادلة (2) تكون مستقرة وهذا يعود إلى كون السرعة فرضت ثابتة بالنسبة إلى ظرف زمني معين وهو t وذلك لان السرعة قيمة تربيعية أي سوف تكون موجبة دائما وكذلك بالنسبة لنصف القطر R .

References

1. Andrea Balbo and Peter Schuck. ((Analytical Ultracentrifugation in the Study of Protein Self association and Heterogeneous Protein - Protein Interactions)) (2004).
2. Conley, C. & Smaller, J., ((Topological Techniques in Reaction- Diffusion Equation)), In: Jager, W & Rost, H. & Tautu, P., Eds., Biological Growth and Spread, Lecture Notes in Biological Math. 38 pp.473-483 (1980).
3. Howes, F.A. ((some Stability Results for Advection-Diffusion Equation, Studies in Applied Mathematics)), Vo. Lxxiv.No.1,.p 27-31(1986)
4. Maginu, K.((Stability of Stationary Solutions of a Semi linear Parabolic)) (PDE), J. Math. Anal. Apple. 63, pp.224-243, (1978).
5. Logan J. D. ((Applied Mathematics))Wiley and Sony (1987).
6. Peter W . Michor, and John S.Philo ((Measuring Sedimentation Diffusion, and Molecular Weights of Small Molecules by Direct Fitting of Sedimentation Velocity Concentration Profiles)). p. 156-170 (1994).
7. Smith, I.M., and Griffiths, D.V., , ((Programming the finite Element Method.)) Johan Wiley &Sons. (1998)
8. Weiming Cao and Borries Demelery. ((Modeling Analytical Ultracentrif -ugation Experiments with an Adaptive Space-Time Finite Element Solution of the Lamm Equation))(2000).
9. Yun Wang and Chao-Yang Wang .((Dynamics of polymer electrolyte fuel cells undergoing load changes Electrochemical Acta)) The Pennsylvania State University, University Park, PA 16802, USA 3924–3933. 51 (2006).

The Stability Analysis of Lamm equation

(**Received:** 20 / 8 / 2007 ---- **Accepted:** 27 / 2 / 2008)

Abstract

The Stability Analysis of Lamm equation by using Fourier mode Stability analysis in two cases has been considered, the first one when the amplitude is constant and the second one when the amplitude is variable. In both cases, the solution is always stable