دراسة شروط استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الأسي المختلط باستخدام طريقة التقريب الخطي

رعد عواد حميد مخلف الحمداني

قسم الرياضيات ، كلية التربية ، جامعة تكريت ، تكريت ، العراق

(تاريخ الاستلام: ٢٣ / ٥ / ٢٠١٠ ---- تاريخ القبول: ١١ / ٥ / ٢٠١١)

الملخص :

ينصب اهتمامنا في هذا البحث على دراسة شروط استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الأسي المختلط باستخدام طريقة التقريب بالخطية المحلية والتي استخدمت من قبل الباحث Ozaki في دراسة شروط استقرارية النموذج الأسي للانحدار الذاتي .تم في هذه االبحث دراسة شروط استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الأسي المختلط وبالتحديد شروط استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج (إن وجدت) ووضعت هذه الشروط مع برهانها في مبرهنة محددة ، إضافة إلى دراسة شروط استقرارية دورة النهاية للنموذج التي تم وضعها مع برهانها في مبرهنة معينة. لقد تم تطبيق الشروط الموجودة في المبرهنتين المذكورتين آنفاً على بيانات تمثل المعدل الشهري للرطوبة النسبية في مدينة تكريت حيث تم نمذجة هذه البيانات باستخدام نموذج الانحدار الذاتي الأسي المختلط حيث تم ايجاد قيمة النقطة الثابتة غير الصفرية وشروط استقرارية النموذج المقترح.

المقدمة

أ – تحليل السلاسل الزمنية هو موضوع واسع ،وقد ازداد اتساعه في العقود الأخيرة بشكل كبير نظراً لكثرة تطبيقاته في الاتصالات والهندسة والأنواء الجوية ... الخ. إن الهدف الأساسي من بناء نموذج سلسلة زمنية هو التنبؤ بمستقبل ظاهره معينة تتغير مع الزمن او لدراسة صفات تلك السلسلة وان أي نموذج يمثل السلسلة الزمنية يجب أن يتصف بصفات محددة لكي يعطي تنبؤات صحيحة إلى حد معين وأهم هذه الصفات هي الاستقرارية (stability).

ب – تبنى السلاسل الزمنية عادة" على افتراضات اساسية متمثلة بالاستقرارية (Stationarity) والخطية (Linearity) والطبيعية (Normality) وغير ذلك ،علما ان اغلب السلاسل الزمنية قد لا تتبع التوزيع الطبيعي ، وهذه الصفات مهمة جدا في التقدير وبناء نماذج السلاسل الزمنية. لذلك فإنّ دراسة السلاسل الزمنية تشتمل على دراسة هذه الافتراضات وكيفية معالجة السلاسل الزمنية غير المستقرة . والنماذج الرياضية الملائمة لتلك السلاسل هل هي خطية ام غير خطية وفيما اذا كانت تتبع التوزيع الطبيعي ام لا. سنحاول في هذا البحث دراسة الاستقرارية لنموذج الانحدار الذاتي ألأسي اللاخطي المختلط .

٢– هدف البحث :

سنركز دراستنا في هذا البحث على دراسة استقرارية نموذج الانحدار الذاتي اللاخطي الآسي مضافا له نموذج الانحدار الذاتي ومقارنتها مع نموذج الانحدار الذاتي اللاخطي الآسي .

٣ – مفاهيم ومبادئ أساسية :

٣–١– النموذج ألأسي للانحدار الذاتي من الرتبة p [6]: (EXPAR(P))

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} (\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}) X_{t-i} + Z_t \quad ......(1)$$

إذ Z_t هي (iid) متغيرات عشوائية مستقلة تتوزع توزيعا طبيعيا بمعدل ٠ وتباين σ_z^2 أي $Z_t \sim (0,\sigma_z^2)$ في الزمن المتقطع والمعاملات ϕ_i و π_i حيث $i=1,2,\ldots,p$ ثوابت حقيقية ومن الواضح ان معاملات الانحدار ϕ_i و π_i تعتمد على $|x_{t-1}|$ فعندما $|x_{t-1}| \to \infty$ فان المعاملات تكون ϕ_i لكل i وعندما $|x_{t-1}| \to 0$ فان المعاملات تكون $(\phi_i + \pi_i)$ لكل i .لإيجاد شروط استقرارية النموذج (١) حسب طريقة الباحث Ozaki نحتاج إلى تعريف استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية وكذلك تعريف استقرارية دورة النهاية للمعادلة الفرقية بالزمن المتقطع الآتية

$$X_t = f(x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-p}) \quad ..... (2)$$

٣ – ٢ : الاستقرارية :– [2] [3] (Stationarity)

تكون السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ مستقرة إذا كانت في حالة موازنة إحصائية ، أي أنّ خصائصها الإحصائية لا تتأثّر بالزمن ، وتكون السلسلة $\{X_t\}$ مستقرة بدقة Strictly Stationary إذا كان التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ هو نفس التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرات $X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, \ldots, X_{t_{n+k}}$ ولجميع النقاط الزمنية المختارة $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ولأي ثابت k . إن شرط الاستقرارية بدقّة صعب التحقيق أحيانا ، لذا فإننا نعرّف السلسلة الزمنية بأنها مستقرة من الدرجة m (m-Order stationary) إذا كان لأي $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ولأي ثابت k فان جميع العزوم من الدرجة m تكون $(X_{t_{1+k}}, X_{t_{2+k}}, \ldots, X_{t_{n+k}})$.

$$E[\{X_{t_1}\}^{m_1}, \{X_{t_2}\}^{m_2}, \ldots, \{X_{t_n}\}^{m_n}] = E[\{X_{t_{1+k}}\}^{m_1}, \{X_{t_{2+k}}\}^{m_2}, \ldots, \{X_{t_{n+k}}\}^{m_n}]$$

لجميع النقاط الزمنية المختارة $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ولأي ثابت k ولأي ثوابت صحيحة موجبة $m_1, m_2, \ldots, m_n$ تحقق القيد

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n \le m$$

ولحالة خاصة يقال إن السلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مستقرة من الرتبة الأولى (First Order stationary) إذا كانت :

$$E(X_t) = \mu$$

كما يقال للسلسلة الزمنية $\{X_t\}$ أنها مستقرة من الرتبة الثانية (secondary Order stationary) إذا حققت الشروط الآتية

μ كمية ثابتة لا تعتمد على t $\quad 1)E(X_t)=\mu$

σ_x^2 كمية ثابتة لا تعتمد على t $\quad 2)\mathrm{Var}(X_t)=\sigma_x^2$

دالة بدلالة $|t_2-t_1|$ فقط $\quad 3)\mathrm{Cov}[X_{t_1},X_{t_2}]=\gamma_{(t_1,t_2)}$

فالاستقرارية مفهوم عام في الأنظمة الديناميكية (الحركية) التي تتكون من نظام من المعادلات التفاضلية أو الفرقية إذ إن النظام يكون مستقراً إذا كان مسار الحل يقترب من نقطة منفردة (singular point) أو من منحني مغلق يطلق عليه دورة النهاية (limit cycle).

٣-٣ تعريف: [5] و[6]

النقطة المنفردة ζ للنموذج (٢) تعرف بأنها تلك النقطة التي تحقق الشرط الآتي : إن أي مسار للنموذج (٢) يبدأ من نقطة قريبة بشكل كافي من ζ يقترب منها إما عندما t⟶∞ أو عندما t⟶-∞.

إذا اقترب المسار من ζ عندما t⟶∞ فـإنَّ النقطة المنفردة تكون مستقرة وبالعكس اذا اقترب المسار من ζ عندما t⟶-∞ فـإنَّ النقطة المنفردة ζ تكون غير مستقرة .

٣-٤ تعريف: [5] [6]

دورة النهاية للنموذج(٢) تعرف بأنها المسار المغلق والمعزول $x_t=(x_t,x_{t+1},x_{t+2},\dots,x_{t+q})$ حيث q عدد صحيح موجب . المقصود بأنَّ المسار مغلق هو أنه اذا كانت القيم الابتدائية $(x_1,x_2,\dots\dots,x_p)$ تنتمي إلى دورة النهاية فان $(x_{1+kq},x_{2+kq},\dots\dots,x_{p+kq})$ = $(x_1,x_2,\dots\dots,x_p)$ لأي عدد صحيح k.

والمقصود بالمعزول (Isolated) ان أي مسار يبدأ قريباً من دورة النهاية بشكل كاف يتقارب نحو دورة النهاية اما عندما t⟶∞ أو t⟶-∞ ، فـإذا كان المسار يقترب من دورة النهاية عندما t⟶∞ فـإنَّ دورة النهاية تكون مستقرة وبالعكس إذا كـان المسار يقترب من دورة النهاية عندما t⟶-∞ فـإنَّ دورة النهاية تكون غير مستقرة . إن أصغر عدد صحيح موجب q الوارد في التعريف (3-4) يطلق عليه الدورة (period) لدورة النهاية . ان النموذج (١) يحوي على نقطة منفردة صفرية ونقاط منفردة أخرى غير صفرية (non-zero singular points) سنرمز لها بـ ζ ، وهذه النقاط موجودة وحقيقية إذا تحقق الشرط

$$0<\left[\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right]<1 \quad \dots.(3)$$

ويمكن حسابها من العلاقة

$$\xi=\pm\sqrt{-\ln\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)} \quad \dots\dots(4)$$

إن عدم تحقق الشرط (3) يؤدي إلى عدم وجود نقطة منفردة غير صفرية لكن هذا لايمنع من أن النموذج (1) قد يمتلك دورة نهاية مستقرة أو غير مستقرة ، كذلك قد تكون النقطة المنفردة غير الصفرية موجودة وحقيقية لكنها غير مستقرة عندئذٍ قد يكون للنموذج دورة نهاية مستقرة أو غير مستقرة . إن إيجاد شروط استقرارية النقطة ξ لايتم إلا بعد تحويل النموذج (1) إلى نموذج انحدار ذاتي خطي باستخدام تقنية التقريب بالخطية المحلية وفي جوار النقطة ξ. لقد استخدم الباحث Ozaki هذه التقنية ووضع شرط استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية ξ في المبرهنة الآتية

٣-٥ مبرهنة: [5] و[6]

النقطة المنفردة غير الصفرية (إن وجدت) للنموذج (1) مستقرة إذا وفقط إذا كانت جذور المعادلة

$$\lambda^p-\sum_{i=1}^{p}h_i\lambda^{p-i}=0 \quad \dots..(5)$$

واقعة داخل دائرة الوحدة

إذ ان h_i معطاة بالشكل:-

$$h_i=\frac{(\pi_1+\phi_1\sum_{i=1}^{p}\pi_i-\pi_1\sum_{i=1}^{p}\phi_i)}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}+2(1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i)\ln(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\phi_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}) \quad \dots..(6)$$

كذلك وجد الباحث Ozaki شروط استقرارية دورة النهاية (إن وجدت) للنموذج (1) وأطلق تسمية الاستقرارية المدارية أو المسارية (orbitally stable) للنموذج إذا كانت دورة النهاية له مستقرة . هذه الشروط تم وصفها بالمبرهنتين الآتيتين إذ تخص الأولى النموذج الأسي للانحدار الذاتي من الرتبة الأولى والثانية هي تعميم للمبرهنة (٣-٥) ولأية رتبة p .

٣-٦ مبرهنة: [5] و[6]

تكون دورة النهاية بالدورة q للنموذج EXPAR(q) مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط

$$\left|\prod_{i=1}^{q}[\phi_i+\pi_1(1-2x_{t+i-1}^2)e^{-x_{t+i-1}^2}]\right|<1 \quad \dots..(7)$$

٣-٧ – نموذج الانحدار الذاتي الآسي المختلط :

يمكن تعريف هذا النموذج على انه نموذج مكون من حدين الحد الأول هو نموذج الانحدار الذاتي الآسي اللاخطي والثاني نموذج الانحدار الذاتي والذي يكتب بالشكل

$$X_t=\sum_{i=1}^{p}\alpha_iX_{t-i}+\sum_{i=1}^{p}(\phi_i+\pi_ie^{-X_{t-1}^2})X_{t-i}+Z_t \quad \dots.(8)$$

او

$$X_t=\sum_{i=1}^{p}(\theta_i+\pi_ie^{-X_{t-1}^2})X_{t-i}+Z_t \quad \dots..(9)$$

حيث

$$\theta_i=\alpha_i+\phi_i, \qquad i=1,2,3,\dots,p$$

لذلك فان العلاقة (٨) تكافئ (٩) .

٤- الجانب النظري :

٤-١ الاستقرارية حسب طريقة اوزاكي :

لقد تم اقتراح طريقة التقريب الخطية المحلية من قبل الباحث (اوزاكي ١٩٨٥)لإيجاد استقرارية النماذج غير الخطية وتتلخص الطريقة بمرحلتين : المرحلة الأولى إيجاد النقاط المنفردة غير الصفرية للنموذج

غير الخطي والمرحلة الثانية اختبار استقرارية تلك النقطة باستخدام تقنية التقريب الخطية [6]

٤-٢ استقرارية نموذج الانحدار الذاتي الآسي اللاخطي المختلط

$$X_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}(\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2})X_{t-i} + Z_t$$

Or

$$X_t = \sum_{i=1}^{p}(\theta_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2})X_{t-i} + Z_t$$

لدراسة الشروط الخاصة باستقرارية النموذج (٩) نجد النقطــة الثابتة غير الصفرية ξ (Non- zero singular point) نستخدم تعريف النقطة الثابتة $f(\xi,\xi,\dots,\xi) = \xi$

$$X_t = X_{t-1} = X_{t-2} = \dots = X_{t-p} = \xi$$

وإلغاء تأثير Z_t اي وضع $Z_t = 0$

$$\xi = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}(\phi_i + \pi_i e^{-\xi^2})\xi$$

نجد $\xi = 0$ احد الحلول وتسمى النقطة المنفردة الصفرية . نفرض ان $\xi \neq 0$ وبقسمة الطرفين على ξ وبعمليات جبرية بسيطة نحصل على

$$\xi^2 = -\ln\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}(\alpha_i + \phi_i)}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)$$

أي ان

ان قيمة النقطة المنفردة غير الصفرية موجودة وحقيقية اذ حققت الشرط الأتي

or

$$0 < \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i} < 1$$

المبرهنة الاتية تبين شروط الاستقرارية للنموذج (9) بالاعتماد على ثوابت النموذج $\theta_i, \alpha_i, \phi_i, \pi_i$ لقيم $i = 1,2,\dots p$

٤-٢ مبرهنة:

النقطة المنفردة غير الصفرية (إن وجدت) للنموذج (9) مستقرة إذا وفقط إذا كانت جذور المعادلة

$$\lambda^p - \sum_{i-1}^{p} h_i \lambda^{p-i} = 0$$

واقعة داخل دائرة الوحدة إذ ان h_i معطاة بالشكل:-

$$h_1 = 2\left(\ln\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)\right) - 2\theta_1\left(\ln\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)\right) + \theta_1 + \pi_1\left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right) \qquad (12)$$

و

$$h_i = \left(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right) + \theta_i \qquad (13)$$

البرهان :

ضع $X_t = \xi + \xi_t$ و

$$X_{t-1} = \xi + \xi_{t-1}$$

$$\xi_{t-i}^n \to 0 \quad ;\forall n > 1 \quad ; \quad i = 1,2,3,\dots$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}(\alpha_i\xi + \alpha_i\xi_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p}((\phi_i + \pi_i e^{-(\xi+\xi_{t-1})^2})(\xi + \xi_{t-i}))$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}((\phi_i + \pi_i e^{-(\xi+\xi_{t-1})^2})(\xi + \xi_{t-i}))$$

وباستخدام توسيع تايلير (Taylor expansion) للدالة الآسية يمكن حساب تقـريب للعامل ($e^{-(\xi+\xi_{t-1})^2}$) وكما يلي .

$$e^{-(\xi+\xi_{t-1})^2} = e^{-(\xi^2 + 2\xi\xi_{t-1} + \xi_{t-i}^2)} = e^{-\xi^2}e^{-2\xi\xi_{t-1}}e^{-\xi_{t-i}^2})$$

$$= \left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)(1-2\xi\xi_{t-1})(1) = \left(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\right)(1-2\xi\xi_{t-1})$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}((\phi_i + \pi_i(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})(1-2\xi\xi_{t-1}))(\xi + \xi_{t-i}))$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i(\xi + \xi_{t-i}) + \sum_{i=1}^{p}((\pi_i(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})(1-2\xi\xi_{t-1})(\xi + \xi_{t-i}))$$

بما

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\phi\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})(\xi - 2\xi^2\xi_{t-1} + \xi_{t-i} - 2\xi\xi_{t-1}\xi_{t-i}))$$

ان

$$\because 2\xi\xi_{t-1}\xi_{t-i} = 0$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}\xi)$$
$$-2\sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi^2\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi_{t-i}$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\alpha_i\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\phi_i\xi_{t-i} + (1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i)\xi$$
$$-2(1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i)\xi^2\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi_{t-i}$$

$$\xi + \xi_t = \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi_{t-i} + \xi - \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi - 2\xi^2\xi_{t-1} + 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi^2\xi_{t-1}$$
$$+ \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi_{t-i}$$

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi_{t-i} - 2\xi^2\xi_{t-1} + 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi^2\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi_{t-i}$$

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi_{t-i} - 2(-\ln(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}))\xi_{t-1} + 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i(-\ln(\frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}))\xi_{t-1}$$
$$+ \sum_{i=1}^{p}(\pi_i \frac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i})\xi_{t-i}$$

نفرض ان $k = \dfrac{1-\sum_{i=1}^{p}\theta_i}{\sum_{i=1}^{p}\pi_i}$ نحصل على

$$\xi_t = \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi_{t-i} - 2(-\ln(k))\xi_{t-1} + 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i(-\ln(k))\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i k)\xi_{t-i}$$

$$\xi_t = 2(\ln(k))\xi_{t-1} - 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i(\ln(k))\xi_{t-1} + \sum_{i=1}^{p}(\pi_i k)\xi_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}\theta_i\xi_{t-i}$$

$$\xi_t = (2(\ln(k)) - 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i(\ln(k)))\xi_{t-1} + (\sum_{i=1}^{p}(\pi_i k) + \sum_{i=1}^{p}\theta_i)\xi_{t-i} \quad (14)$$

المعادلة رقم (١٤) تمثل المعادلة الفرقية لنموذج الانحدار الذاتي الخطي من الرتبة p (AR(p)) او بشكل اخر تمثل نموذج AR(p) بدون ازعاج ابيض Z_t ولها الصيغة

$$\xi_t = h_1\xi_{t-1} + h_2\xi_{t-2} + \ldots + h_p\xi_{t-p} \quad (15)$$

$$\xi_t = (2(\ln(k)) - 2\sum_{i=1}^{p}\theta_i(\ln(k)))\xi_{t-1} + (\sum_{i=1}^{p}(\pi_i k) + \sum_{i=1}^{p}\theta_i)\xi_{t-i}$$

حيث

$$h_i = (\pi_i k) + \theta_i$$

عندما $p = 1$ فان

$$h_1 = 2(\ln(k)) - 2\theta_1(\ln(k)) + \theta_1 + \pi_1(k)$$

وبما ان النموذج الذي حصلنا علية هو نموذج الانحدار الذاتي الخطي هو *AR(P)* فانه يكون مستقرا اذا كانت جميع جذور المعادلة المميزة

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{2} h_i\lambda^{p-i} = 0$$

تقع داخل دائرة الوحدة وبالتالي فان النموذج (٩) يملك نقطة منفردة غير صفرية مستقرة فهو مستقر وبهذا ينتهي البرهان

لدراسة وإيجاد شروط استقرارية دورة النهاية (ان وجدت) للنموذج (٩) نجد اولا شروط استقرارية النموذج المذكور من الرتبة الأولى MEXPAR(1) والمبرهنة الآتية تعطي الشروط بدلالة معلمات النموذج

٤-٣ قضية :

ليكن لدينا النموذج الأتي MEXPAR(1)

$$X_t = \sum_{i=1}^{p}\alpha_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{p}(\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2})X_{t-i} + Z_t$$

والي يكون EXPAR(q) للنموذج qتكون دورة النهاية بالدورة بالصيغة الاتية

$$X_t = \sum_{i=1}^{p}(\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2})X_{t-i} + Z_t$$

وباستخدام المبرهنة (٣-٦) تكون دورة النهاية بالدورة q للنموذج EXPAR(q) مستقرة مدارياً إذا تحقق الشرط

$$\left|\prod_{i=1}^{q}[\phi_i + \pi_1(1 - 2x_{t+i-1}^2)e^{-x_{t+i-1}^2}]\right| < 1$$

يجب أن نبرهن أن النموذج (١) مستقر حيث يكون مسقرا مداريا إذا تحقق الشرط

$$\left|\prod_{i=1}^{q}[\phi_i + \pi_i(1 - 2X_{t+i-1}^2)e^{-X_{t+i-1}^2} + \alpha_1]\right| < 1 \; \ldots\ldots (16)$$

البرهان :

نفرض ان $X_t = X_t + \xi_t$ و $X_{t-1} = X_{t-1} + \xi_{t-1}$

$$X_t + \xi_t = (\phi_i + \pi_i e^{-(X_{t-1}+\xi_{t-1})^2})(X_{t-1} + \xi_{t-1}) + \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1}$$

وباستخدام تقريب تايلر

$$e^{-(X_{t-1}+\xi_{t-1})^2} = e^{-X_{t-1}^2}(1 - 2X_{t-1}\xi_{t-1})$$

$$X_t + \xi_t = [\phi_i + \pi_i(e^{-X_{t-1}^2}(1 - 2X_{t-1}\xi_{t-1}))](X_{t-1} + \xi_{t-1}) + (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1})$$

$$X_t + \xi_t = [\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}\xi_{t-1}))](X_{t-1} + \xi_{t-1}) + (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1})$$

$$X_t + \xi_t = [\phi_i X_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2\xi_{t-1})]$$

$$[(\phi_i\xi_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}\xi_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}\xi_{t-1}^2)] + (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1})$$

بما ان $\xi_{t-i}^n \to 0 \quad ;\forall n > 1 \quad ; \quad i = 1,2,3,\ldots$

فان $\xi_{t-1}^2 = 0$

$$X_t + \xi_t = [\phi_i X_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2\xi_{t-1})][(\phi_i\xi_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}\xi_{t-1})] + (\alpha_1 X_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1})$$

$$X_t + \xi_t = (\phi_i X_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1} + \alpha_1 X_{t-1}) + \phi_i\xi_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}\xi_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2\xi_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1}$$

بما ان

$$X_t = \phi_i X_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1} + \alpha_1 X_{t-1}$$

فان

$$X_t + \xi_t = X_t + \phi_i\xi_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}\xi_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2\xi_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1}$$

$$\xi_t = \phi_i\xi_{t-1} + \pi_i e^{-X_{t-1}^2}\xi_{t-1} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2\xi_{t-1} + \alpha_1\xi_{t-1}$$

$$\xi_t = (\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2 + \alpha_1)\xi_{t-1}$$

$$\frac{\xi_t}{\xi_{t-1}} = (\phi_i + \pi_i e^{-X_{t-1}^2} - 2\pi_i e^{-X_{t-1}^2}X_{t-1}^2 + \alpha_1)$$

$$\xi_{t+q} = T(X_{t+q-1})\xi_{t+q-1}$$

$$= T(X_{t+q-1})T(X_{t+q-2})\xi_{t+q-2}$$

$$= T(X_{t+q-1})T(X_{t+q-2})\ldots\ldots T(X_t)\xi_t$$

وبالتالي فان :-

$$\xi_{t+q} = \left|\prod_{i=1}^{q}T(X_{t+q-i})\right|\xi_t$$

$$T(s) = \theta_i + \pi_i e^{-s^2} - 2\pi_i e^{-s^2}s^2$$

أي ان

$$\left|\frac{\xi_{t+q}}{\xi_t}\right| = \left|\prod_{i=1}^{q}T(X_{t+q-i})\right|$$

ولاجل التقارب نحو الصفر يجب ان تكون هذه النسبة اقل من واحد

أي ان

$$\left|\prod_{i=1}^{q}T(X_{t+q-i})\right| < 1$$

او

$$\left|\prod_{i=1}^{q}[\theta_i + (1 - 2x_{t+q-i}^2)\pi_i e^{-x_{t+q-i}^2}]\right| < 1$$

وبهذا ينتهي البرهان .

٥ - الجانب التطبيقي Application

٥-١: المقدمة Introduction

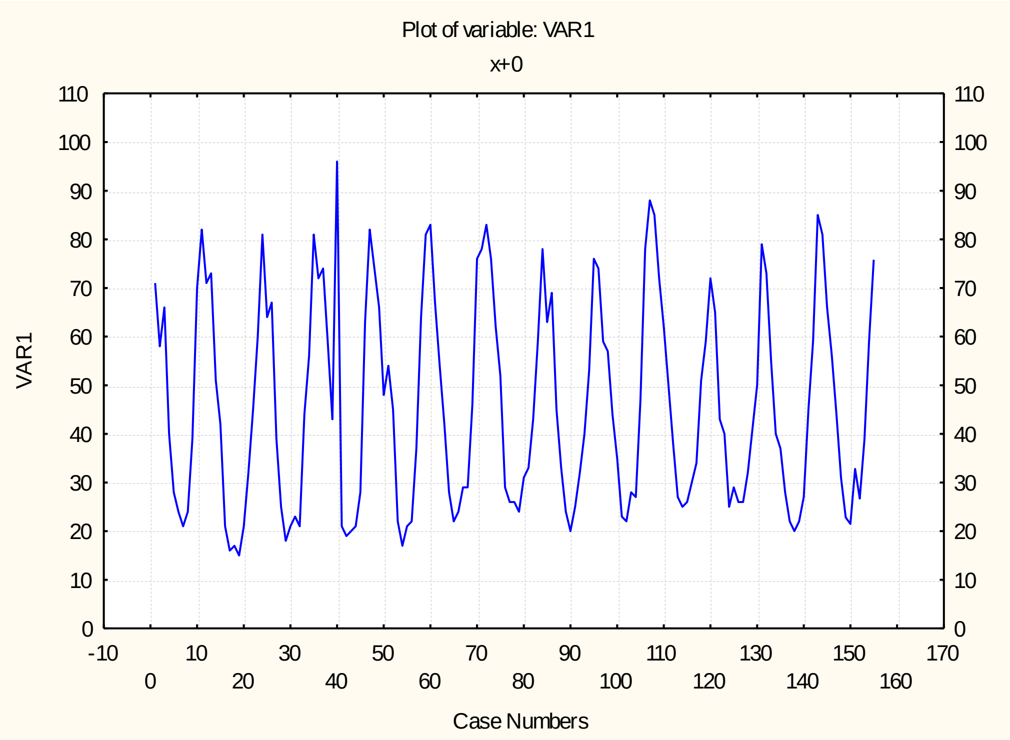
في هذه الفقرة يتم تطبيق شروط استقرارية نموذج MEXPAR(P) والتي تم إيجادها في الفقرة السابقة وبالتحديد استقرارية النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج التي تم وضعها في المبرهنة(٤-٢) واستقرارية دورة النهاية بالنسبة للمبرهنة (٤-٣) .

أن البيانات المستخدمة في هذا التطبيق هي بيانات الرطوبة في مدينة تكريت اذ ان الرطوبة تزداد في فصل الشتاء وتقل في فصل الصيف ،

تم استخدام البرنامج الجاهز (Statistic V.6) بنسخته السادسة في تخمين قيم معلمات النماذج التي تم إيجادها في هذا البحث وبالتحديد تم استخدام جزء البرنامج الخاص بالتخمين اللاخطي (Nonlinear estimation) ونظراً لحاجتنا إلى عمليات حسابية سوف نستخدم نظام الـ MATLAB لاجراء هذه العمليات الحسابية .

٢–٥ : وصف البيانات Description of Data

انَّ التسجيلات الشهرية للرطوبة في مدينة تكريت أو بشكل أدق السلسلة الزمنية للرطوبة في مدينة تكريت تتصف بصفات دورية لاخطية وهذا واضح من رسم السلسلة الزمنية للرطوبة في مدينة تكريت كما في الشكل (١) ، إذ أنها تزداد في فصل الشتاء وتقل في فصل الصيف .



شكل (1) : رسم السلسلة الزمنية لبيانات الرطوبة في مدينة تكريت

4.3: نمذجة السلسلة الزمنية للرطوبة في مدينة تكريت باستخدام نماذج MEXPAR(p).

في هذه الفقرة سنقوم بنمذجة السلسلة الزمنية الشهرية للرطوبة في مدينة تكريت بالنماذج الأسية المختلطة للانحدار الذاتي . باستخدام برنامج statistica V.6 حصلنا على نموذج MEXPAR(١) الأتي

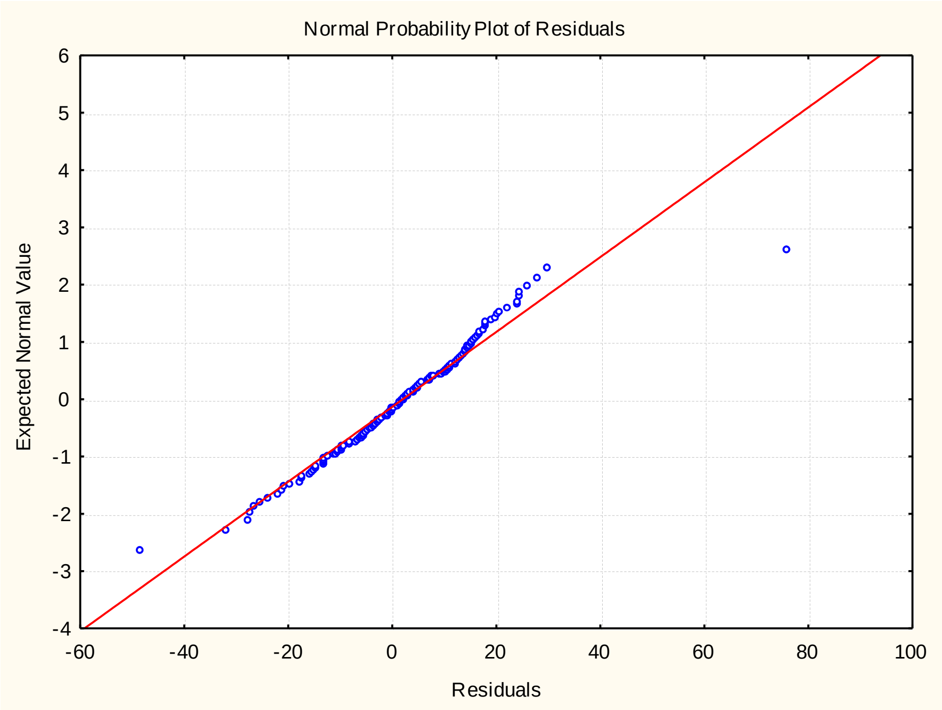
$$X_t = [(10.48957 + 0.1e^{-X_{t-1}^2})X_{t-1} - 9.50917X_{t-1}] + Z_t .....(17)$$ وبتباين بواقي $\sigma_z^2 = 35.94348$

$$AIC(M) = -1.163$$

حيث AIC تعرف بالشكل

$$AIC(M) = -2\ln(\sigma_z^2) + 2M$$

وان P تمثل رتبة النموذج و M عدد معلمات النموذج المخمن و σ_z^2 القيمة التخمينية للبواقي أما الشكل (2) فهو رسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي النموذج MEXPAR(1) .



الشكل(2): رسم الاحتمالية الطبيعية لبواقي النموذج MEXPAR(1) .

ذات قيمة مطلقة أقل من الواحد وبالتالي يكون نموذج MEXPAR(1) مستقر حسب المبرهنة (٤-٢) .

٣-٥ الاستنتاجات والتوصيات من خلال هذه الدراسة توصلنا الى الاستنتاجات الاتية :

١- النموذج الاسي المختلط هو نموذج مستقر مع البيانات المستخدمة والتي تمثل معدل الرطوبة النسبية الشهري في مدينة تكريت

٢- إنّ النموذج الاسي المختلط هو النموذج الاسي مضافا إلية نموذج خطي . ونوصي بإجراء دراسة متكاملة لنموذج أسي مختلط غير خطي ، بحيث يكون الجزء غير الخطي هو نموذج أسي او نموذج عتبة ويرتب عليا مضافا الية نموذج اخر غير خطي .

إن البواقي هنا تمثل التشويش الأبيض الذي يفترض به أن يتوزع توزيعاً طبيعياً بتباين $\hat{\sigma}_z^2$ أي ان الحالة المثلى هي ان تنطبق جميع النقاط التي تمثل البواقي على المستقيم الذي تتوزع نقاطه توزيعاً طبيعياً بمعدل صـفر وتباين $\hat{\sigma}_z^2$.ينظر المصدر [٤]. باستخدام العلاقة (١٠) تم حساب قيمة النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج ووجد بأنها تساوي $\xi = 0.9009$ وباستخدام العلاقة (١٢) نحصل على المعادلة الفرقية الآتية

$$\xi_t = 0.9361\xi_{t-1}$$

وواضح أن النقطة المنفردة غير الصفرية للنموذج مستقرة لأنَّ جذور المعادلة المميزة

$$\lambda - 0.9361 = 0$$

المصادر:

1. Akaike , H. , (1974),"A New Look of Statistical Model Identification " , IEEE Transaction on Automatic Control , A C-19 , pp(716-722) .
2. Chatfield (1978) "The analysis of time series : Theory Practice" Chapman and Hall, London
3. Chatfield, Christopher.(1984) "The analysis of time series : 4th Edition Chapman and Hall
4. Chatfield , C. , (1984) ,"The Analysis of Time Series An Introduction' , 3rd Ed. , J. W. Arrow Smith Ltd . , Bristol , GB .
5. Ozaki , T. , (1982) ,"The Statistical Analysis of Perturbed Limit Cycle Processes Using Nonlinear Time series Models" , Journal of Time Series Analysis , V. 3 , No. 1 , pp(29-41) .
6. Ozaki , T. , (1985) ,"Nonlinear Time Series Models and Dynamical Systems" , Handbook of Statistics , V. 5 (Ed. Hannan , E. J. and Krishnailah , P. R. and Rao , M. M.) , Elsevier Science Publishers B. V. , pp(25-83) Ozaki , T. and Oda , H. , (1977) ,"Nonlinear Time Series Models Identification by Akaike's Information Criterion" , In Information and Systems , ed. Dubuisson . Pergamum Press , Oxford . pp(83-91) .
7. Priestley , M. B. , (1981) ,"Spectral Analysis and Time Series" , Volume 1 , "UNIVARIATE SERIES" , Academic Press . Inc , London .
8. Priestley , M. B. , (1981) ,"Spectral Analysis and Time Series" , Volume 2 ,"MULTIVARIATE SERIES , PREDICTION AND CONTROL" , Academic Press , Inc , London .

A Study stability condition of mixed Autoregressive exponential model by using the linear approximation method

(**Received:** 23 / 5 / 2010 ---- **Accepted:** 11 / 5 / 2011)

Abstract

This study sheds light upon studying condition of stability for exponential model of mixture Autoregressive by using local linear approximation method which is used by Ozaki in studying the conditions of stability of exponential model for Autoregressive .

This study includes finding the conditions of stability model for exponential mixture Autoregressive specifically the conditions of stability unique point non-zero models. These conditions are made with their specific proof . besides there are many conditions for stability to limit cycle which is made with its specific proof .

Conditions are applied in the previously mentioned theories on data which represent monthly average for relative moisture in Tikrit city. The samples are classified by using exponential model mixture Autoregressive where the findings are reached for the value of non-zero fixed point and the conditions of suggested stability model .