مقارنة بين الحل العددي والتحليلي لجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة

خضر محمد صالح خضر ، حنين طلال جاسم

قسم الرياضيات ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات ، جامعة الموصل ، الموصل ، العراق

(تاريخ الاستلام: ١٦ / ٢ / ٢٠١١ ---- **تاريخ القبول:** ١١ / ٥ / ٢٠١١)

الملخص

يهدف البحث إلى دراسة الجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب لسوائل غير قابلة للأنضغاط و بإهمال قوى القصور الذاتي ، وقد استخدمت معادلة الاستمرارية و معادلات نافير . ستوكس للحصول على المعادلة التي تحكم الجريان وتم حلها بطريقة عددية ومقارنتها مع الحل التحليلي.

المقدمة : Interdncation

إن الرغوة (Foam) والأغشية الرقيقة (thins film) التي عادة ما تتكون من هواء وسائل لزج مع الشد السطحي (surface tension) هي حالة خاصة في ميكانيك الموائع والتي لها أهمية كبيرة في العديد من التطبيقات الصناعية مثل عملية طلاء أسطح الرسم والطبقات الفضية على أقراص (CD) المدمجة. درس (١٩٩٠ ، E.O.Tuckand L.W.Schwartz) الطريقة العددية لحل بعض المعادلات التفاضلية الاعتيادية من الرتبة الثالثة والمتعلقة بجريان الأغشية ، ودرس (١٩٩٧ ، B.R.Duffy and S.k.Wilson) جريان الأغشية الرقيقة اللزجة للموائع والتي يكون فيها الغشاء سطحاً حراً بوجود الشد السطحي ، كما درس كل من (Janmen.J.Kn , Smann and Michael T. Miksis,1998) جريان الأغشية الرقيقة على سطح صلب مائل مع وجود الشد السطحي وباستخدام نظرية التزييت . ودرس (M.A.S Majeed , 2002) الجريان اللازمني في الأغشية الرقيقة بإهمال قوى القصور الذاتي ، ودرس (Khider ,M.S.Khider,2003) الجريان اللزج في بعض الأغشية الرقيقة السائلة المائلة.كما درس (Nasser .M and Khider .M.S.٢٠١٠) الجريان اللازمني للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب.وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى دراسة الجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة بطريقة عددية ومقارنتها مع الطريقة التحليلية.

المعادلات التي تحكم الجريان Governing equation

لوصف الجريان الثنائي البعد لمائع غير قابل للانضغاط نأخذ الإحداثيات الديكارتية $\bar{x}, \bar{y}$ حيث أن الاحداثي $\bar{x}$ هو الاحداثي المتناظر وان الجريان يكون باتجاه الاحداثي $\bar{x}$ وان الاحداثي $\bar{y}$ يكون عموديا عليه.

نفرض أن $\bar{u}, \bar{v}$ هي مركبات السرعة في الاتجاهين $\bar{x}, \bar{y}$ على الترتيب وان $\bar{p}$ يمثل الضغط.

لتكن معادلة السرعة للغشاء بالصيغة :-

$$\bar{y} = \bar{h}(\bar{x}, \bar{t}) \quad ...(٢,٢)$$

سوف نحصر اهتمامنا بالمسألة التي يكون فيها $\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}} << 1$ (حيث أن الرمز << يدل أن المقدار أقل بكثير من الواحد) على المجال $\bar{x}$

وبهذا يمكن إهمال الحد $(\frac{d\bar{h}}{d\bar{x}})^2$ من معادلة الانحناء والتي لهما الصيغة:-

$$k = \frac{\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2}}{\left[1 + (\frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}})^2\right]^{3/2}}. \quad ....(٢,٣)$$

فتصبح بالصيغة:-

$$k = \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \quad ...(٢,٤)$$

وان معادلة الاستمرارية للجريان الثنائي لها الصيغة:-

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \quad ...(٢,٥)$$

ومعادلتي الزخم (معادلات نافيرستوكس) في البعد الثنائي لها الصيغة:-

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \rho g_{\bar{x}}. \quad ...(٢,٦)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \mu\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \rho g_{\bar{y}} \quad ....(27)$$

وباستخدام نظرية ألتزييت للمعادلتين (٢,٦) و (٢,٧) نحصل على

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \mu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \quad ...(2.8)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\rho g \quad ....(2.9)$$

(حيث أن التعجيل باتجاه $\bar{y}$ سالب).

(١-٣) المتغيرات اللابعدية: Non- dimensional

سوف نعرف المتغيرات اللابعدية كالأتي[٥]:-

$$\bar{x} = Hx\,, \quad \bar{y} = Hy \quad . \quad \bar{t} = \frac{H}{v}t\,, \quad \bar{u} = uU \;, \; \bar{v} = vU$$

$$\bar{p} = \frac{\sigma}{H}p\,, \quad \bar{h} = Hh \quad ...(3.0)$$

(4-1) الشروط الحدودية : Boundary Conditions

١- شرط عدم الانزلاق No-slip condition

$$\bar{u} = -U\,, \quad \bar{v} = 0 \; on \quad \bar{y} = 0 \; ....(٤,٢)$$

٢- شرط إجهاد القص (المماسي) على السطح الحر للغشاء Tangential Stress Condition

ISSN:1813 –

$$\tau = \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = 0 \ , \quad on \ \ \bar{y} = \bar{h} \ \cdots(٤,٣)$$

٣- شرط الجهد العمودي: Normal –Stress Condition

$$\bar{p} = -\sigma \ k \ \cdots(٤,٤)$$

حيث أن σ تمثل الشد السطحي.

بتعويض المعادلة (٢,٤) في المعادلة(٤,٤) نحصل على

$$\bar{p} = -\delta \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial \bar{x}^2} \ \cdots(٤,٥)$$

٤- شرط المشتقة التي تتبع الجسيم على السطح الحر

[Material derivative at free surface condition٥].

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{x}} \qquad on \quad \bar{y} = \bar{h} \ \cdots(٤,٦)$$

وباستخدام المعادلة (٣,٢) في المعادلات (٢,٥) ، (٢,٨) ، (٢,٩) ، (٤,٢) ، (٤,٣) ، (٤,٤) (٤,٥) و (٤,٦) بالترتيب نحصل على :-

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \ \cdots(٤,٧)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = ca \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \ \cdots(4.8)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -B \ \cdots(\ ٤,٩)$$

حيث أن $ca = \frac{\mu U}{\sigma}$ (يمثل العدد الشعري الذي هو عبارة عن النسبة بين قوى الشد السطحي وقوى اللزوجة) و $B = \frac{\rho g H^2}{\sigma}$ (يمثل عدد بوند وهو النسبة بين قوى الجذب الأرضي وقوى الشد السطحي)،وأن ca و B متغيرات لا بعدية

$$u = -1, \quad v = 0 \quad on \quad y = 0 \ \cdots(٤,١٠)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad on \ \ y = h \ \cdots(٤,١١)$$

$$p = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \qquad on \qquad y = h \ \cdots(٤ \ .١٢)$$

$$v = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \ , \ on \quad y = h \ \cdots(4.13)$$

(١-٥)العمليات الرياضية لإيجاد المعادلة التي تحكم الجريان.

نكامل المعادلة (٤,٩) بالنسبة لـ y نحصل على:

$$p(x,t) = -By + f(x,t) \cdots(٥,٢)$$

حيث إن f(x,t) ثابت التكامل.

ومن المعادلتين (٤,١٢) و (٥,٢) عندما y=h نحصل على :

$$f(x,t) = -\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Bh \ \cdots(٥,٣)$$

نعوض المعادلة (٥,٣) في المعادلة (٥,٢) فنحصل على :

$$p(x,t) = -By - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + Bh \cdots(٥,٤)$$

نشتق المعادلة (٥,٤)بالنسبة لـ x فنحصل على:-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + B \frac{\partial h}{\partial x} \cdots(٥,٥)$$

ومن المعادلة (٤,٨) و(٥,٥) نحصل على :-

$$ca \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + B \frac{\partial h}{\partial x} \cdots(٥,٦)$$

نكامل المعادلة (٥,٦) بالنسبة لـ y فنحصل على:-

$$ca \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + B \frac{\partial h}{\partial x} y + g(x,t) \cdots(٥,٧)$$

حيث $g(x,t)$ ثابت التكامل.

وباستخدام المعادلة (٤,١١)عندما y=h نحصل على

$$0 = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h + B \frac{\partial h}{\partial x} h + g(x,t)$$

أو

$$g(x,t) = \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - B \frac{\partial h}{\partial x} h \cdots(٥,٨)$$

نعوض المعادلة (٥,٨) في (٥,٧) فنحصل على :

$$ca \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + B \frac{\partial h}{\partial y} y + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h - B \frac{\partial h}{\partial x} h \ \cdots(٥,٩)$$

نكامل المعادلة (٥,٩) بالنسبة إلى y فنحصل على:-

...(5.10)

$$cau = -\frac{y^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{y^2}{2} B \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} hy - B \frac{\partial h}{\partial x} hy + E(x,t)$$

وباستخدام المعادلة (٤,١٠) عندما y=h نحصل على:-

$$-ca = E(x,t) \ \cdots(٥,١١)$$

نعوض المعادلة (٥,١١) في المعادلة (٥,١٠) عندما y=h فنحصل على :-

$$cau = -\frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \frac{h^2}{2} B \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h^2 - B \frac{\partial h}{\partial x} h^2 - ca$$

أو

$$cau = \frac{h^2}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{h^2}{2} B \frac{\partial h}{\partial x} - ca \ \cdots(٥,١٢)$$

بضرب طرفي المعادلة (٥,١٢) في h وقسمتها على ca نحصل على :-

$$uh = \frac{h^3}{2ca} \left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B \frac{\partial h}{\partial x} \right] - h \ \cdots(٥,١٣)$$

نشتق المعادلة (٥,١٣) بالنسبة لـ x فنحصل على :-

$$\frac{\partial}{\partial x}(uh) = \frac{h^3}{2ca} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - B \frac{\partial h}{\partial x} \right] - \frac{\partial h}{\partial x} \ \ldots(5.14)$$

وبتكامل المعادلة (٤,٧) بالنسبة لـ y عندما y=h فنحصل على :-

$$v = -h \frac{\partial u}{\partial x} \ \cdots(٥,١٥)$$

وبتعويض المعادلة (٥,١٥) في (٤,١٣) نحصل على :-

$$-h \frac{\partial h}{\partial x} - u \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(uh) \cdots(٥,١٦ \ )$$

وبتعويض المعادلة (٥,١٦) في المعادلة (٥,١٤) نحصل على :-

ISSN:1813 –

$$-\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-B\frac{\partial h}{\partial x}\right]-\frac{\partial h}{\partial x}\quad\cdots(٥,١٧)$$

(٦-١) الجريان المستقر:- Steady flow

في حالة الجريان المستقر فأن المعادلة (٥,١٧) تصبح بالصيغة:-

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{h^3}{2ca}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-B\frac{\partial h}{\partial x}\right]\quad\cdots(٦,٢)$$

نكامل المعادلة (٦,٢) بالنسبة لـ x فنحصل على :-

$$h=\frac{h^3}{2ca}\left[\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}-B\frac{\partial h}{\partial x}\right]+A\quad\cdots(٦,٣)$$

حيث أن A ثابت التكامل.

نضرب طرفي المعادلة (٦,٣) في $\frac{2ca}{h^3}$ فنحصل على :-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{2cah}{h^3}-\frac{2caA}{h^3}\quad\cdots(٦,٤)$$

وبفرض الثوابت $ca=\frac{1}{2}$, $A=1,$, $B=0$ نحصل على:-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{h-1}{h^3}\quad\cdots(٦,٥)$$

(7-1) الحل العددي:

يمكن كتابة المعادلة (٦,٥) بالصيغة آلاتية :-

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}=\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}\quad\cdots(٧,٢)$$

ولحل المعادلة(7.2) نضع الشرط الأتي:-

$h\to -x(3\log|x|)^{\frac{1}{3}}$ فإن $\chi\to-\infty$ عندما …(7.3)

وبما أن المعادلة (٧,٢) من الرتبة الثالثة لدى نحتاج إلى ثلاثة شروط ابتدائية حيث نقوم باشتقاق المعالة (٧,٣) مرتين وكما يلي:-

$$h=-x\left(3\log|x|^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$h'=(3\log(-x))^{\frac{-2}{3}}-(3\log(-x))^{\frac{1}{3}}$$

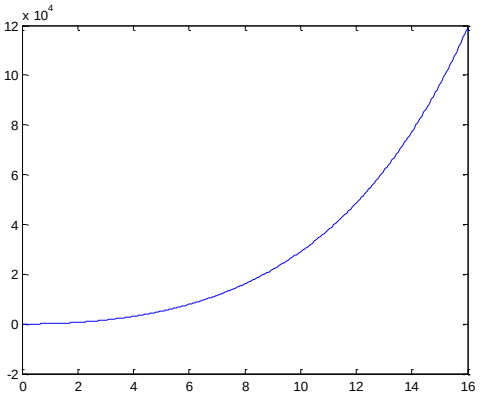
$$h''=\frac{2}{x}(3\log(-x))^{\frac{-5}{3}}+\frac{1}{x}(3\log(-x))^{\frac{-2}{3}}$$

الآن لحل المعادلة (٧,٢) نقوم بتحويلها إلى نظام المعادلات التفاضلية وذلك بتخفيض رتبة المعادلة.

نفرض أن:

$$h_1=h\longrightarrow h_1'=h'=h_2$$
$$h_2=h'\longrightarrow h_2'=h''=h_3$$
$$h_3=h''\longrightarrow h_3'=\frac{1}{h^2}-\frac{1}{h^3}$$

وباستخدام طريقة رنج . كوتا من الرتبة الرابعة في نظام الـ Matlab نحصل على الحلول وكما موضح بالشكل(١,١).



شكل (١,١) يمثل منحني الحل للمستوى (x، h) للمعادلة (٧,٢)

الاستنتاجات :- Conclusions

في هذا البحث تمت دراسة الجريان المستقر للأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب وفي نظام ثنائي البعد وبإهمال قوى القصور الذاتي وجهد القص و تبين من حلول المعادلة (٧,٢) بان سمك الغشاء يقترب من المالانهاية $(h\to\infty)$ عندما تقترب x من القيم الموجبة بينما سمك الغشاء يقترب من الصفر $(h\to 0)$ كلما اقتربت x من القيم السالبة.

مقارنة بين الحلين التحليلي والعددي:

أن الحل التحليلي للمعادلة (٦,٥) هو

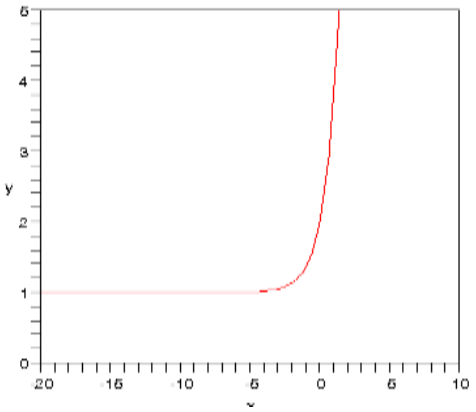
$$h-1=c_1e^{x}+c_2e^{-\frac{1}{2}x}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)+c_3e^{-\frac{1}{2}x}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\quad\cdots(٦,٦)$$

بعد إعطاء قيم للثوابت $c_1=1,c_2=c_3=0$ وحسب المصدر [6] نلاحظ من الحل التحليلي للمعادلة (٦,٥) بأن سمك الغشاء اقترب من الواحد عندما x اقتربت من القيم السالبة $(x\to-\infty$ عندما $h_2\to 1)$ بينما من الحل العددي لاحظنا أن سمك الغشاء أقترب من الصفر عندما x اقتربت من القيم السالبة $(x\to-\infty$ عندما $h_1\to 0)$ وهذا يفسر الفرق بين الحل التحليلي والحل العددي لنفس المعادلة وكما موضح في الجدول رقم(١) و الشكلين (١,١) و(١,٢).حيث ان h_1 و h_2 تمثلان قيم الحل العددي والحل التحليلي بالترتيب.

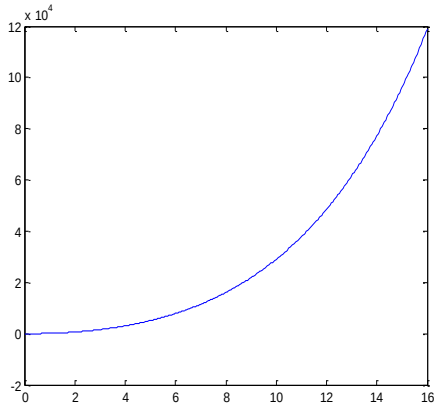
جدول رقم (١)

x	h_1	h_2	x	h_1	h_2
−٥	٠,١١	١,٠٠٦٧٣٧٩٥	−٢,٧٠	٩٢٧,٥٠	١,٠٦٧٢٠٥٥١
−٤,٩٥	٠,١٢٧٥٠٢٩٨	١,٠٠٧٠٨٣٤١	−٢,٦٥	٩٧١,٥٣٤٦٣٢٩٩	١,٠٧٠٦٥١٢١
−٤,٩٠	٠,٩٥	١,٠٠٧٤٤٦٥٨	−٢,٦٠	١٠١٦,٧٢	١,٠٧٤٢٧٣٥٨
−٤,٨٥	٢,٥٧١٩٤٥٤٣	١,٠٠٧٨٢٨٣٨	−٢,٥٥	١٠٦٣,٠٨٠٢٣٣٢٧	١,٠٧٨٠٨١٦٧
−٤,٨٠	٤,٩٩	١,٠٠٨٢٢٩٧٥	−٢,٥٠	١١١٠,٦١	١,٠٨٢٠٨٥٠٠
−٤,٧٥	٨,٢٢٣١٤٠٩٢	١,٠٠٨٦٥١٧٠	−٢,٤٥	١١٥٩,٣٢٥١٢١٥٦	١,٠٨٦٢٩٣٥٩
−٤,٧٠	١٢,٢٧	١,٠٠٩٠٩٥٢٨	−٢,٤٠	١٢٠٩,٢٣	١,٠٩٠٧١٧٩٥
−٤,٦٥	١٧,١٣٦٠٧٥٧٠	١,٠٠٩٥٦١٦٠	−٢,٣٥	١٢٦٠,٣٤٧٩٤٥٦٦	١,٠٩٥٣٦٩١٦
−٤,٦٠	٢٢,٨٣	١,٠١٠٠٥١٨٤	−٢,٣٠	١٣١٢,٦٨	١,١٠٠٢٥٨٨٤
−٤,٥٥	٢٩,٣٦٥٣٤٥٧٦	١,٠١٠٥٦٧٢٠	−٢,٢٥	١٣٦٦,٢٢٨٦٦٩٦٤	١,١٠٥٣٩٩٢٢
−٤,٥٠	٣٦,٧٤	١,٠١١١٠٩٠٠	−٢,٢٠	١٤٢١,٠٢	١,١١٠٨٠٣١٦
−٤,٤٥	٤٤,٩٦٦٤٥٥٥٠	١,٠١١٦٧٨٥٧	−٢,١٥	١٤٧٧,٠٤٨٥٩٥٨٥	١,١١٦٤٨٤١٦
−٤,٤٠	٥٤,٠٥	١,٠١٢٢٧٧٣٤	−٢,١٠	١٥٣٤,٣٤	١,١٢٢٤٥٦٤٣
−٤,٣٥	٦٣,٩٩٥٨٣٧٠٩	١,٠١٢٩٠٦٨١	−٢,٠٥	١٥٩٢,٨٩٠٣٨٧٣٣	١,١٢٨٧٣٤٩٠
−٤,٣٠	٧٤,٨١	١,٠١٣٥٦٨٥٦	−٢	١٦٥٢,٧٢	١,١٣٥٣٣٥٢٨
−٤,٢٥	٨٦,٥١٠٨٦٦٧٧	١,٠١٤٢٦٤٢٣	−١,٩٥	١٧١٣,٨٣٨٠٩٠٥٧	١,١٤٢٢٧٤٠٧
−٤,٢٠	٩٩,٠٩	١,٠١٤٩٩٥٥٨	−١,٩٠	١٧٧٦,٢٥	١,١٤٩٥٦٨٦٢
−٤,١٥	١١٢,٥٦٩٨٨٠٩٠	١,٠١٥٧٦٤٤٢	−١,٨٥	١٨٣٩,٩٧٧١٥٨٦٨	١,١٥٧٢٣٧١٧
−٤,١٠	١٢٦,٩٥	١,٠١٦٥٧٢٦٨	−١,٨٠	١٩٠٥,٠٢	١,١٦٥٢٩٨٨٩
−٤,٠٥	١٤٢,٢٣٢١٩٢٠٨	١,٠١٧٤٢٢٣٧	−١,٧٥	١٩٧١,٣٩٤٤٧٤٩٢	١,١٧٣٧٧٣٩٤
−٤	١٥٨,٤٣	١,٠١٨٣١٥٦٤	−١,٧٠	٢٠٣٩,١١	١,١٨٢٦٨٣٥٢
−٣,٩٥	١٧٥,٥٥٨١٠٥٥٤	١,٠١٩٢٥٤٧٠	−١,٦٥	٢١٠٨,١٧٨٣٧٦٦٤	١,١٩٢٠٤٩٩١
−٣,٩٠	١٩٣,٦١	١,٠٢٠٢٤١٩١	−١,٦٠	٢١٧٨,٦١	١,٢٠١٨٩٦٥٢
−٣,٨٥	٢١٢,٦٠٨٩٣٥٧٨	١,٠٢١٢٧٩٧٤	−١,٥٥	٢٢٥٠,٤١٨٦٧٩٦١	١,٢١٢٢٤٧٩٧
−٣,٨٠	٢٣٢,٥٥	١,٠٢٢٣٧٠٧٧	−١,٥٠	٢٣٢٣,٦١	١,٢٢٣١٣٠١٦
−٣,٧٥	٢٥٣,٤٤٧٠٢٣٤٤	١,٠٢٣٥١٧٧٥	−١,٤٥	٢٣٩٨,٢٠٦٧٠٢٧٦	١,٢٣٤٥٧٠٢٩
−٣,٧٠	٢٧٥,٣١	١,٠٢٤٧٢٣٥٣	−١,٤٠	٢٤٧٤,٢١	١,٢٤٦٥٩٦٩٦
−٣,٦٥	٢٩٨,١٣٥٧٥٢٤٩	١,٠٢٥٩٩١١٣	−١,٣٥	٢٥٥١,٦٣٥٢٩٣٣٦	١,٢٥٩٢٤٠٢٦
−٣,٦٠	٣٢١,٩٤	١,٠٢٧٣٢٣٧٢	−١,٣٠	٢٦٣٠,٤٩	١,٢٧٢٥٣١٧٩
−٣,٥٥	٣٤٦,٧٣٩٥٦٧٧١	١,٠٢٨٧٢٤٦٤	−١,٢٥	٢٧١٠,٧٩٨٨٥٢٥٧	١,٢٨٦٥٠٤٨٠
−٣,٥٠	٣٧٢,٥٣	١,٠٣٠١٩٧٣٨	−١,٢٠	٢٧٩٢,٥٦	١,٣٠١١٩٤٢١
−٣,٤٥	٣٩٩,٣٢٣٩٩٢٤٣	١,٠٣١٧٤٥٦٤	−١,١٥	٢٨٧٥,٧٩٣٣٦١٤٧	١,٣١٦٦٣٦٧٧
−٣,٤٠	٤٢٧,١٣	١,٠٣٣٣٧٣٢٧	−١,١٠	٢٩٦٠,٥١	١,٣٣٢٨٧١٠٨
−٣,٣٥	٤٥٥,٩٥٥٦٤٦٥٦	١,٠٣٥٠٨٤٣٥	−١,٠٥	٣٠٤٦,٧١٦٤٠٧٤٧	١,٣٤٩٩٣٧٧٥
−٣,٣٠	٤٨٥,٨١	١,٠٣٦٨٨٣١٧	−١	٣١٣٤,٤٣	١,٣٦٧٨٧٩٤٤
−٣,٢٥	٥١٦,٧٠٢٢٦٥٠١	١,٠٣٨٧٧٤٢١	−٠,٩٥	٣٢٢٣,٦٦٧٢١١٢٣	١,٣٨٦٧٤١٠٢
−٣,٢٠	٥٤٨,٦٤	١,٠٤٠٧٦٢٢٠	−٠,٩٠	٣٣١٤,٤٣	١,٤٠٦٥٦٩٦٦
−٣,١٥	٥٨١,٦٣٢٧١٦٢	١,٠٤٢٨٥٢١٣	−٠,٨٥	٣٤٠٦,٧٤٦٦٥٣٩٧	١,٤٢٧٤١٤٩٣

	٦				
−٣,١٠	٦١٥,٦٩	١,٠٤٥٠٤٩٢٠	−٠,٨٠	٣٥٠٠,٦٢	١,٤٤٩٣٢٨٩٦
−٣,٠٥	٦٥٠,٨١٧٠٢١٤٣	١,٠٤٧٣٥٨٩٢	−٠,٧٥	٣٥٩٦,٠٥٧٣٠٥٢٩	١,٤٧٢٣٦٦٥٥
−٣	٦٨٧,٠٣	١,٠٤٩٧٨٧٠٧	−٠,٧٠	٣٦٩٣,٠٨	١,٤٩٦٥٨٥٣٠
−٢,٩٥	٧٢٤,٣٢٦٣٧٣٤٧	١,٠٥٢٣٣٩٧١	−٠,٦٥	٣٧٩١,٧٠٣٤٥١٣٧	١,٥٢٢٠٤٥٧٨
−٢,٩٠	٧٦٢,٧٣	١,٠٥٥٠٢٣٢٢	−٠,٦٠	٣٨٩١,٩٤	١,٥٤٨٨١١٦٤
−٢,٨٥	٨٠٢,٢٣٣١٥٦٨٦	١,٠٥٧٨٤٤٣٢	−٠,٥٥	٣٩٩٣,٧٩١١٢٣٧٦	١,٥٧٦٩٤٩٨١
−٢,٨٠	٨٤٢,٨٦	١,٠٦٠٨	−٠,٥٠	٤٠٩٧,٢٨	١,٦٠٦٥٣٠٦٦
−٢,٧٥	٨٨٤,٦١٠٩٦٧٤٩	١,٠٦٣٩٢٧٨٦	−٠,٤٥	٤٢٠٢,٤٢٨١٢٨٥٦	١,٦٣٧٦٢٨١٥



شكل (١,١) يمثل منحني الحل للمستوى (x، h) للمعادلة (٧,٢)



شكل (١,٢) يمثل منحني الحل للمستوى (x، h) للمعادلة (6.٦)

المصادر : References

1. E.O. Tuck and L.W. Schwartz "Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows"No.3,pp.453-469,September 1990.
2. B.R. Duffy and S.K. Wilson, "A third–order deferential equation arising in thin–film flows and relevant to Tanner's Law", App. Math. Lebb, vol. 10, No. 3, pp. 63–68, 1997.
3. James J. Kriegsmann and Michael J. Miksis " Pressure driven disturbances on a thin viscous film" Phys.Fluids,Vol.10,No.6,June 1998.
4. Majeed, M.A.S, "Steady flow in thin liquid films with negligible inertia" M. Sc.thesis, University of Mosul 2002.
5. Khider, M.S.Khider, "Viscous flow in certain inclined thin liquid films" M.Sc.thesis, University of Mosul 2003.
6. Nasser .M and Khider .M.S. "Steady flow to viscous thin films on solid surface" IRQ, J.S.S, vol.10, No.17, 2010.

Comparison between the analytical and numerical solution to steady flow viscous thin films

Khider Mohammed salih, Haneen Talal Jasem
Dept.: Mathematics, College of Computers Sciences & Mathematics University of Mosul, Mosul, Iraq
(**Received:** 16 / 2 / 2011 ---- **Accepted:** 11 / 5 / 2011)

Abstract
The aim of this paper is to investigate the steady flow to viscous thin films on solid surface of an incompressible liquids with no inertia force. Continuity equation and Navier – Stokes equations are used to obtain the equation which govern this flow, this equation have been solved using numerical method and compare the results with analytical solution.