Numerical Method RO(SMS) of Evaluation of Triple Integrals with Continuous Integrands

طريقة RO(SMS) العددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة

أ.علي حسن محمد و م.م صفاء مهدي موسى الجصاص وم.م أيمان يحيى حبيب
قسم الرياضيات / كلية التربية للبنات / جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عددياً باستخدام طريقة ناتجة من قاعدتي من قواعد نيوتن – كوتس (النقطة الوسطى وسمبسون) إذ قدمنا مبرهنة مع البرهان لإيجاد هذه القاعدة وحدود التصحيح بالنسبة لها وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بتحسين النتائج, باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعد الأوسط Y وقاعدة سمبسون على البعدين الداخلي X والخارجي Z, عندما عدد التقسيمات h على البعد الخارجي مساوية لعدد التقسيمات على البعد الأوسط h ومساوية لعدد التقسيمات h على البعد الداخلي ورمزنا لها بالرمز $RO(SMS)$ حيث يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية اذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت قليل.

Abstract

The main aim of this paper is to calculate triple integrals with continuous integrands numerically using the method resulting from Newton - Cotes the rules of (midpoint and Simpson) We have provided the theorem with the proof to find this rule and the correction error bounds with its ,And by depending on the correction error that we found it we have improved the results by using the method of acceleration Romberg on values resulting from the application Mid- point rule on middle dimension Y and Simpson rule on both dimensions the interior X and exterior Z where the number of divisions h on the exterior dimension is equal to the number of divisions h on the middle dimension and equal to the number of divisions h on the interior dimension, and we denoted it by symbol $RO(SMS)$. we can be depend upon in calculating the triple integrals because it gave high accuracy with few subintervals and few time**.**

1.المقدمة

التكامل العددي (Numerical Integration) هو دراسة كيفية إيجاد القيمة التقريبية لتكامل معين ويرجع تاريخ تطبيق التكامل العددي إلى بداياته في إيجاد مساحة دائرة بطريقة التربيع الإغريقي (Greek quadrature) وذلك من خلال تجزئة الدائرة إلى مضلعات منتظمة (Regular polygon) وبواسطة هذه الطريقة تمكن ارخميدس من أيجاد الحدود العليا والدنيا لقيمة النسبة الثابتة (π). وقد تميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي.

ونظرا لاهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي , وكمثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho = 2(1-\cos\theta)$ حول المحور القطبي. فرانك آيرز [6]. فقد عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية منهم الباحث الإيراني أراكي [1] ومحمد [2] ومحمد وآخرون [3] وضياء [7] وعكار [8] حيث تعاملوا مع هذا الموضوع من أوجه عدة .

وكذلك التكاملات الثلاثية لها أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم و إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة,على سبيل المثال الحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 4x$ وفوق $z = 0$ وتحت $x^2 + y^2 = 4z$ وحساب المركز المتوسط للحجم الوقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$, وكذلك إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن.فرانك آيرز [6] لذلك عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية .

ففي عام 2009 استخدمت ضياء [7] طرائق التكامل الأحادي لتكوين طرائق مركبة لحساب التكامل الثلاثي و هي $RMRM(RS)$, $RMRM(RM)$, $RMRS(RM)$ و $RMRS(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من $RM(RS)$, $RM(RM)$ و $RS(RM)$, على البعد الأوسط (Y) والبعد الداخلي (X) ومن طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM)على البعد الخارجي (Z) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة($RMRS(RS)$ هي الأفضل عند حساب التكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب .

وفي عام2010 قدمت عكار[8]طريقة عددية بأسلوب مغاير لحساب قيم التكاملات الثلاثيةوذلك باستعمال طريقة $RMMM$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الأبعاد X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وفي عام 2013 قدم محمد وآخرون [9] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستعمال طريقة $RSSS$ الناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على الأبعاد الثلاثة X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وحصلوا على نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

أما في هذا البحث نقدم مبرهنة مع البرهان لإيجاد قاعدة جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة وصيغة الخطأ لها وهذه القاعدة ناتجة من تطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من استعمال قاعدتي النقطة الوسطى على البعد الأوسط Y و سمبسون على البعدين الخارجي والداخلي X ،Z عندما $m = m_1 = m_2$ (m_2 عدد التقسيمات على البعد الداخلي و m_1 عدد التقسيمات على البعد الأوسط و m عدد التقسيمات على البعد الخارجي) وسنرمز لهذه الطريقة بالرمز $RO(SMS)$ حيث RO طريقة تعجيل رومبرك و SMS القاعدة المشتقة .

ملاحظة :- لقد اخترنا m, m_1, m_2 أعداد زوجية لان قاعدة سمبسون تحتاج إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية وفي الوقت نفسه لا توثر على مناقشتنا لقاعدة النقطة الوسطى .

2. طريقة RO(SMS) العددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة

مبرهنة :-

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$ فان القيمة التقريبية للتكامل $I = \int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{z_m} f(x,y,z)\,dxdydz$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية:

$$SMS = \frac{h^3}{9}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_m)+f(x_m,y_j,z_0)+f(x_m,y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\Big(f\big(x_0,y_j,z_{(2k-1)}\big)$$
$$+f\big(x_m,y_j,z_{(2k-1)}\big)\Big)+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\Big(f\big(x_0,y_j,z_{(2k)}\big)+f\big(x_m,y_j,z_{(2k)}\big)\Big)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Big(f(x_{(2i-1)},y_j,z_0)+f(x_{(2i-1)},y_j,z_m)$$
$$+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}f(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}f(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k)})\Big)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\Big(f(x_{(2i)},y_j,z_0)+f(x_{(2i)},y_j,z_m)$$
$$+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}f(x_{(2i)},y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}f(x_{(2i)},y_j,z_{(2k)})\Big)\Bigg]$$

$x_{(2i-1)} = x_0 + (2i-1)h\ ,\ i = 1,2,\dots,\frac{m}{2}$ و $x_{(2i)} = x_0 + (2i)h\ ,\ i = 1,2,\dots,\frac{m}{2}-1$

$z_{(2k-1)} = z_0 + (2k-1)h\ ,\ \mathrm{k} = 1,2,\dots,\frac{m}{2}$ و $z_{(2k)} = z_0 + (2k)h\ ,\ \mathrm{k} = 1,2,\dots,\frac{m}{2}-1$

$$y_j = y_0 + \frac{(2j-1)}{2}h \ , \ \ j=1,2,\ldots,m$$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي:-

$$I - SMS(h) = A_1h^2 + A_2h^4 + A_3h^6 + \cdots$$

حيث أن $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ثوابت .

البرهان

يمكن كتابة التكامل الثلاثي I بشكل عام بالصورة الآتية :

$$I = \int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f\left(x,y,z\right)dxdydz = SMS\left(h\right) + E\left(h\right) \qquad \ldots(1)$$

إذ إن $SMS\left(h\right)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدتي النقطة الوسطى على البعد Y وسمبسون على البعدين X , Z وان $E\left(h\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم $SMS\left(h\right)$, وان $h = \frac{z_m - z_0}{m} = \frac{y_m - y_0}{m_1} = \frac{x_m - x_0}{m_2}$

بفرض إن $m = m_1 = m_2$.

أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة النقطة الوسطى وقاعدة سمبسون على التوالي :

$$E_M(h) = \frac{1}{6}h^2(f'_{2n} - f'_0) - \frac{7}{360}h^4(f_{2n}^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{31}{15120}h^6(f_{2n}^{(5)} - f_0^{(5)}) - \cdots \qquad \ldots(2)$$

$$E_S(h) = -\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)} - f_0^{(5)}) - \cdots \qquad \ldots(3)$$

فوكس [4]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل للصيغتين (2), (3) نحصل على :

$$E_M(h) = \frac{\left(x_{2n} - x_0\right)}{6}h^2 f^{(2)}\left(\eta_1\right) - \frac{7\left(x_{2n} - x_0\right)}{360}h^4 f^{(4)}\left(\eta_2\right) + \frac{31\left(x_{2n} - x_0\right)}{15120}h^6 f^{(6)}\left(\eta_3\right) - \ldots \qquad \ldots(4)$$

$$E_S(h) = \frac{-\left(x_{2n} - x_0\right)}{180}h^4 f^{(4)}\left(\mu_1\right) + \frac{\left(x_{2n} - x_0\right)}{1512}h^6 f^{(6)}\left(\mu_2\right) + \ldots \qquad \ldots(5)$$

حيث $\mu_i, \eta_i \in \left(x_0, x_{2n}\right)$, $i = 1,2,3,\ldots$,عكار[8]

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_{x_0}^{x_m} f\left(x,y,z\right)dx$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة سمبسون على البعد X و (التعامل مع y و z كثابتين)

وقيمته :-

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dx = \frac{h}{3}\left(f(x_0,y,z) + f(x_m,y,z) + 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y,z) + 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2i},y,z)\right)$$

$$-\frac{(x_m - x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\eta_1,y,z)}{\partial x^4} + \frac{(x_m - x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\eta_2,y,z)}{\partial x^6} + \ldots \qquad \cdots(6)$$

حيث

$$x_{(2i-1)} = x_0 + (2i-1)h \ , \ i = 1,2,\ldots,\frac{m}{2} \ , \ x_{(2i)} = x_0 + 2ih \ , \ i = 1,2,\ldots,\frac{m}{2}\text{-}1 \ , \ \eta_L \in (x_0, x_m) \ , \ L = 1,2,\ldots,$$

وبمكاملة الصيغة (6) عدديا على الفترة $\left[y_0, y_m\right]$ باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد Y نحصل على :

$$i)\int_{y_0}^{y_m} f(x_0,y,z)dy = h\sum_{j=1}^{m} f(x_0,y_j,z)+\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\xi_2,z)}{\partial y^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\xi_3,z)}{\partial y^6}-...\right) \quad ...(7)$$

$$ii)\int_{y_0}^{y_m} f(x_m,y,z)dy = h\sum_{j=1}^{m} f(x_m,y_j,z)+\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\xi_2,z)}{\partial y^4}\right.$$
$$\left.+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\xi_3,z)}{\partial y^6}-...\right) \quad ...(8)$$

$$iii)4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\int_{y_0}^{y_m} f(x_{(2i-1)},y,z)dy = 4h\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y_j,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \quad ...(9)$$

$$iv)2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{y_0}^{y_m} f(x_{(2i)},y,z)dy = 2h\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(f(x_{(2i)},y_j,z)\right)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}\right.$$
$$\left.-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\cdots\right) \quad ...(10)$$

$$v)\int_{y_0}^{y_m}\left(-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\eta_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\eta_2,y,z)}{\partial x^6}+...\right)dy \quad \cdots(11)$$

حيث $y_j = y_0+\frac{(2j-1)}{2}h$, $j=1,2,...m$ و $\xi_r \in (y_0,y_m)$, $r=1,2,...$

وبمكاملة الصيغ أعلاها عدديا على الفترة $[z_0,z_m]$ باستخدام قاعدة سمبسون على البعد Z نحصل على :

$$i)\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_0,y_j,z)dz = \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{m}\left(f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_0,y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_0,y_j,z_{2k})\right)$$
$$+\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\xi_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\xi_2,z)}{\partial y^6}-...\right)dz$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_0,y_j,\lambda_{1j})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_0,y_j,\lambda_{2j})}{\partial z^6}+...\right) \quad ...(12)$$

$$ii)\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_0,y_j,z)dz = \frac{h}{3}\sum_{j=1}^{m}\left(f(x_m,y_j,z_0)+f(x_m,y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_m,y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_m,y_j,z_{2k})\right)$$
$$+\int_{z_0}^{z_m}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\xi_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\xi_3,z)}{\partial y^6}-...\right)dz$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\left(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_m,y_j,\lambda_{1j})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_m,y_j,\lambda_{2j})}{\partial z^6}+...\right) \quad ...(13)$$

$$iii)\ 4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_{(2i-1)},y_j,z)dz = 4\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(f(x_{(2i-1)},y_j,z_0)+f(x_{(2i-1)},y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k-1)})$$

$$+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i-1)},y_j,z_{2k})\Bigg)+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\int_{z_0}^{z_m}\Bigg(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}$$

$$+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\ldots\Bigg)dz+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},y_j,\lambda_{1ij})}{\partial z^4}$$

$$+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},y_j,\lambda_{2ij})}{\partial z^6}+\ldots\Bigg) \qquad \ldots(14)$$

$$iv)\ 2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\int_{z_0}^{z_m} f(x_{(2i)},y_j,z)dz = 2\frac{h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(f(x_{(2i)},y_j,z_0)+f(x_{(2i)},y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i)},y_j,z_{(2k-1)})$$

$$+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i)},y_j,z_{2k})\Bigg)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\int_{z_0}^{z_m}\Bigg(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}$$

$$+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\ldots\Bigg)dz+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},y_j,\lambda_{1ij})}{\partial z^4}$$

$$+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},y_j,\lambda_{2ij})}{\partial z^6}+\ldots\Bigg) \qquad \ldots(15)$$

$$v)\ \int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\Bigg(-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\eta_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\eta_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots\Bigg)dydz \qquad \cdots(16)$$

حيث أن :

$$q=1,2,\ldots,\quad \lambda_q\in(z_0,z_m)\ ,\ z_{(2k-1)}=z_0+(2k-1)h\ ,\ k=1,2,\ldots,\frac{m}{2}\ ,\ z_{(2k)}=z_0+(2k)h\ ,\ k=1,2,\ldots,\frac{m}{2}-1$$

وبجمع الصيغ (12) , (13), (14), (15) و (16) نحصل على :-

$$\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_m} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{9}\sum_{j=1}^{m}\Bigg[\Big(f(x_0,y_j,z_0)+f(x_0,y_j,z_m)+f(x_m,y_j,z_0)+f(x_m,y_j,z_m)$$

$$+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}\Big(f(x_0,y_j,z_{(2k-1)})+f(x_m,y_j,z_{(2k-1)})\Big)+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1}\Big(f(x_0,y_j,z_{2k})+f(x_m,y_j,z_{2k})\Big)$$

$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\Bigg(f(x_{(2i-1)},y_j,z_0)+f(x_{(2i-1)},y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k)})\Bigg)$$

$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\Bigg(f(x_{(2i)},y_j,z_0)+f(x_{(2i)},y_j,z_m)+4\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} f(x_{(2i)},y_j,z_{(2k-1)})+2\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{(2i)},y_j,z_{(2k)})\Bigg)\Bigg]$$

$$+\int_{z_0}^{z_m}\int_{y_0}^{y_m}\Bigg[-\frac{(x_m-x_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\eta_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(x_m-x_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\eta_2,y,z)}{\partial x^6}+\ldots\Bigg]dydz$$

$$+\frac{h}{3}\int_{z_0}^{z_m}\Bigg(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_0,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_0,\xi_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_0,\xi_3,z)}{\partial y^6}-\dots$$

$$+\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_m,\xi_1,z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_m,\xi_2,z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_m,\xi_3,z)}{\partial y^6}-\dots$$

$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i-1)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\dots\right)$$

$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{(y_m-y_0)}{6}h^2\frac{\partial^2 f(x_{(2i)},\xi_{1i},z)}{\partial y^2}-\frac{7(y_m-y_0)}{360}h^4\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},\xi_{2i},z)}{\partial y^4}+\frac{31(y_m-y_0)}{15120}h^6\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},\xi_{3i},z)}{\partial y^6}-\dots\right)\Bigg)dz$$

$$+\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{m}\Bigg(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_0,y_j,\lambda_{1j})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_0,y_j,\lambda_{2j})}{\partial z^6}+\dots$$

$$-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_m,y_j,\lambda_{1j})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_m,y_j,\lambda_{2j})}{\partial z^6}+\dots$$

$$+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}}\left(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_{(2i-1)},y_j,\lambda_{1ij})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_{(2i-1)},y_j,\lambda_{2ij})}{\partial z^6}+\dots\right)$$

$$+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(-\frac{(z_m-z_0)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x_{(2i)},y_j,\lambda_{1ij})}{\partial z^4}+\frac{(z_m-z_0)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x_{(2i)},y_j,\lambda_{2ij})}{\partial z^6}+..\right)\Bigg]\qquad ...(17)$$

وبما إن $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^6 f}{\partial x^6},...$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},...$ و $\frac{\partial^4 f}{\partial z^4},\frac{\partial^6 f}{\partial z^6},...$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$.

فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثلاثي I بقاعدة SMS تصبح :-

$$E_{SMS}(h)=(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\overline{n}}}_1,\overline{\overline{\overline{\mu}}}_1,\overline{\overline{\overline{\kappa}}}_1\right)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\overline{n}}}_2,\overline{\overline{\overline{\mu}}}_2,\overline{\overline{\overline{\kappa}}}_2\right)}{\partial x^6}-\dots\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{n}}_1,\overline{\overline{\mu}}_1,\overline{\overline{\kappa}}_1\right)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.-\frac{7h^4}{360}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n}}_2,\overline{\overline{\mu}}_2,\overline{\overline{\kappa}}_2\right)}{\partial y^4}+\frac{31h^6}{15120}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{n}}_3,\overline{\overline{\mu}}_3,\overline{\overline{\kappa}}_3\right)}{\partial y^6}-\dots\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1,\overline{\kappa}_1\right)}{\partial z^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1,\overline{\kappa}_1\right)}{\partial z^6}-\dots\right)$$

...(18)

$$E_{SMS}(h)=(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{n}}_1,\overline{\overline{\mu}}_1,\overline{\overline{\kappa}}_1\right)}{\partial z^2}-(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^4}{180}\left(\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{\overline{n}}}_1,\overline{\overline{\overline{\mu}}}_1,\overline{\overline{\overline{\kappa}}}_1\right)}{\partial x^4}+\frac{7}{2}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n}}_2,\overline{\overline{\mu}}_2,\overline{\overline{\kappa}}_2\right)}{\partial y^4}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^4 f\left(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1,\overline{\kappa}_1\right)}{\partial z^4}\right)+(z_m-z_0)(y_m-y_0)(x_m-x_0)\frac{h^6}{1512}\left(\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{\overline{n}}}_2,\overline{\overline{\overline{\mu}}}_2,\overline{\overline{\overline{\kappa}}}_2\right)}{\partial x^6}+\frac{31}{10}\frac{\partial^6 f\left(\overline{\overline{n}}_3,\overline{\overline{\mu}}_3,\overline{\overline{\kappa}}_3\right)}{\partial y^6}+\frac{\partial^6 f\left(\overline{n}_2,\overline{\mu}_2,\overline{\kappa}_2\right)}{\partial z^6}\right)+\dots\quad\dots(19)$$

حيث :- $\left(\overline{\overline{\overline{n}}}_t,\overline{\overline{\overline{\mu}}}_t,\overline{\overline{\overline{\kappa}}}_t\right),\left(\overline{\overline{n}}_t,\overline{\overline{\mu}}_t,\overline{\overline{\kappa}}_t\right),\left(\overline{n}_t,\overline{\mu}_t,\overline{\kappa}_t\right)\in[x_0,x_m]\times[y_0,y_m]\times[z_0,z_m]$, $t=1,2,3,...,$

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[x_0,x_m\right]\times\left[y_0,y_m\right]\times\left[z_0,z_m\right]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ للقاعدة المذكورة كالآتي :

$$I-SMS\left(h\right)=A_1h^2+A_2h^4+A_3h^6+\ldots \qquad \ldots(20)$$

حيث $A_1,A_2,A_3\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة في منطقة التكامل وبذلك ينتهي البرهان .

ولاستعمال طريقة $RO(SMS)$ في حساب التكاملات الثلاثية نبدأ بوضع $m=2$ في الصيغة أعلاه و نحسب القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي والتي تساوي

$$\int_{z_0}^{z_2}\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h^3}{9}\sum_{j=1}^{2}\Big[\ f\left(x_0,y_j,z_0\right)+f\left(x_0,y_j,z_2\right)+f\left(x_2,y_j,z_0\right)+f\left(x_2,y_j,z_2\right)$$

$$+4\Big(f\left(x_0,y_j,z_0+h\right)+f\left(x_0+h,y_j,z_0\right)+f\left(x_0+h,y_j,z_2\right)+f\left(x_2,y_j,z_0+h\right)+4f\left(x_0+h,y_j,z_0+h\right)\Big)\Big]$$

ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m=2$ ثم نضع $m=4$ و نحسب SMS حيث إنها تساوي

$$\int_{z_0}^{z_4}\int_{y_0}^{y_4}\int_{x_0}^{x_4} f\left(x,y,z\right)dxdydz=\frac{h^3}{9}\sum_{j=1}^{4}\Big[\ f\left(x_0,y_j,z_0\right)+f\left(x_0,y_j,z_4\right)+f\left(x_4,y_j,z_0\right)+f\left(x_4,y_j,z_4\right)+2\Big(\ f\left(x_0,y_j,z_2\right)$$

$$+f\left(x_4,y_j,z_2\right)+f\left(x_2,y_j,z_0\right)+f\left(x_2,y_j,z_4\right)+2f\left(x_2,y_j,z_2\right)+4\sum_{k=1}^{2}f\left(x_2,y_j,z_{(2k-1)}\right)\Big)+4\sum_{k=1}^{2}\Big(f\left(x_0,y_j,z_{(2k-1)}\right)$$

$$+f\left(x_4,y_j,z_{(2k-1)}\right)\Big)+4\sum_{i=1}^{2}\Big(f\left(x_{(2i-1)},y_j,z_0\right)+f\left(x_{(2i-1)},y_j,z_m\right)+2f\left(x_{(2i-1)},y_j,z_2\right)+4\sum_{k=1}^{2}f\left(x_{(2i-1)},y_j,z_{(2k-1)}\right)\Big)\Big]$$

أيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثلاثي I .ويمكننا تحسين القيمتين التقريبيتين اللتين حصلنا عليهما بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليهما والذي صيغته العامة :-

$$RO\left(SMS\right)=\frac{\left(2^k SMS\left(\frac{h}{2}\right)-SMS\left(h\right)\right)}{\left(2^k-1\right)} \qquad \ldots(21)$$

رالستون [5] .

حيث $RO(SMS)$ قيمة في العمود الجديد للجدول وكل من $SMS\left(h\right), SMS\left(\frac{h}{2}\right)$ قيمتان في العمود السابق منه , فضلا عن إن العمود الأول من الجدول يمثل قيم قاعدة SMS وبذلك نحصل على قيمة تقريبية للتكامل الثلاثي بطريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة. وهكذا نستمر بتطبيق قاعدة SMS بالنسبة لبقية قيم $m>4$ ثم نطبق عليها طريقة تعجيل رومبرك لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة الحقيقية للتكامل إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المرغوبة التي نختارها .

3. الأمثلة والنتائج:-

التكامل $\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 5.073214111773 (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $\left(x,y,z\right)\in\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]\times\left[0,1\right]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (20) وباستعمال طريقة $RO\left(SMS\right)$ حصلنا على النتائج المدونة في جدول(1) وهي كالأتي :-

m	قيم قاعدة SMS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	5.024137033997				
4	5.060244658674	5.072280533567			
8	5.069926470086	5.073153740556	5.073211954356		
16	5.072389346980	5.073210305945	5.073214076971	5.073214110663	
32	5.073007741791	5.073213873395	5.073214111225	5.073214111768	5.073214111773

الجدول (1) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}dxdydz=5.073214111773$

نلاحظ من الجدول انه :-

1- عندما $m=16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة SMS تكون صحيحة لمرتبتين عشريتين وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية وبـ (2^{12} فترة جزئية)

2- عندما $m=32$ حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام القاعدة فقط وعند استعمال طريقة $RO(SMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية)وبـ (2^{15} فترة جزئية) .

وكذلك التكامل $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3y+2z)dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 0.124100691669 (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة (20) وبتطبيق طريقة $RO(SMS)$ حصلنا على النتائج المدونة في الجدول (2) وهي كالأتي :-

m	قيم قاعدة SMS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.131878922291				
4	0.125930139541	0.123947211958			
8	0.124551406533	0.124091828863	0.124101469990		
16	0.124212962869	0.124100148314	0.124100702944	0.124100690769	
32	0.124128734121	0.124100657871	0.124100691842	0.124100691665	0.124100691669
الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(3y+2z)dxdydz=0.124100691669$					

نلاحظ من الجدول انه :-

1- عندما $m=16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة SMS تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية وبـ (2^{12} فترة جزئية)

2- عندما $m=32$ حصلنا على قيمة صحيحة لأربع مراتب عشرية باستخدام القاعدة فقط وعند استعمال طريقة $RO(SMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية)وبـ (2^{15} فترة جزئية) .

أيضا التكامل $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}}dxdydz$ الذي قيمته التحليلية 0.473640085115 (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) ذات مكامل معرف لكل $(x,y,z)\in[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة (20) وباستعمال طريقة $RO(SMS)$ حصلنا على النتائج المدونة في جدول(3) وهي كالأتي :-

m	قيم قاعدة SMS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.473454190655				
4	0.473592407641	0.473638479970			
8	0.473628086972	0.473639980083	0.473640080090		
16	0.473637080596	0.473640078470	0.473640085029	0.473640085108	
32	0.473639333673	0.473640084698	0.473640085113	0.473640085115	0.473640085115

الجدول (3) حساب التكامل الثلاثي $I = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+y+z}} dxdydz = 0.473640085115$

نلاحظ من الجدول انه :-

1- عندما $m = 16$ ان قيمة التكامل باستخدام قاعدة SMS تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكور حصلنا على قيمة صحيحة لعشر مراتب عشرية وبـ (2^{12} فترة جزئية)

2- عندما $m = 32$ حصلنا على قيمة صحيحة لأربع مراتب عشرية أيضا وعند استعمال طريقة $RO(SMS)$ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) وبـ (2^{15} فترة جزئية) .

4. المناقشة :-

تبين من خلال نتائج جداول هذا البحث الأتي :-

1- انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة بالقاعدة المركبة من قاعدتي النقطة الوسطى على البعد Y وسمبسون على البعدين Z, X عندما عدد التقسيمات على البعد الداخلي مساوية للعدد التقسيمات على البعد الأوسط ومساوية للعدد التقسيمات على البعد الخارجي إن هذه القاعدة (SMS) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استعمال اية طريقة تعجيلية عليها حيث حصلنا على قيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية في التكامل الأول وأربع مراتب عشرية في التكامليين الثاني و الثالث عندما $m = 32$.

2- و عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب و بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبةً إلى قيم التكاملات الحقيقية آذ كانت مطابقة لقيمة الحقيقية (مقربة لاثنتي عشر مرتبة عشرية) عندما $m = 32$ وبـ (2^{15} فترة جزئية) في التكاملات الثلاث.

وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة ($RO(SMS)$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة.

المصادر

[1] Araghi , Mohammed Ali Fariborzi," Dynamical Control of Accuracy using the Stochastic Arithmetic to Estimate Double and Improper Integrals" , Mathematical and Computational Applications , Vol. 13 , No.2 , pp. 91-100 , 2008,Association for Scientific Research.

[2] Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7 , No.3 , pp. 21-28 , 2002.

[3] Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco.

[4] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967

[5] Anthony Ralston ,"A First Course in Numerical Analysis " Mc Graw -Hill Book Company,1965

[6] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988 .

[7] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[8] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[9] محمد, علي حسن, صفاء مهدي موسى , وفاء محمد , " اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها " , بحث منشور في مجلة جامعة كربلاء , 2013 .