Derivation Numerical Method by Using Simpson Rule to Evaluate Triple Integrations with Singular Partial Derivative Integrands

اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة سمبسون لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية

أ.علي حسن محمد علي حمزه عباس حسن عبد الرحيم جبير
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

بحـــــث مستـــــــل

المستخلص

ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية عدديا ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة X, Y, Z وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبركمن خلال حدود التصحيح التي وجدناها , عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي X مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الاوسط Y ومساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي Z .

وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز $RSSS$ ويمكن الاعتماد عليها كونها قد أعطت دقة عالية من خلال التكاملات التي استعرضناها في النتائج مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات بعدد فترات جزئية قليلة وباسخدام تعجيل رومبرك.

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of triple integrals, numerically its integrands have singular partial derivatires not on the end of the region of integration by using the Simpson rule with the three direction X,Y and Z . And to derive the correction error terms and we used Romberg acceleration to improve the results when the number of subintervals on the three dimensions are equal . We used the symbole ***RSSS*** to indicate this method and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integrations and with little subintervals.

1. المقدمة

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق معينة تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع , إذ إن هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون , وإن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات منها :

1. استحالة إيجاد القيمة التحليلية للتكامل .
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة وتحتاج زمن طويل.
3. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول(مثل اللوغارتم او معكوس الظل) .
4. قد تكون المسألة هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم (أي أن الدالة معرفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هي الحال عند تحليل نتائج التجارب .

وتمثل دراسة الخطأ مركزية في التحليل العددي لأن النتائج التي نحصل عليها من تطبيق معظم الطرائق العددية ماهي إلا تقريب للحل الحقيقي المطلوب إيجاده ومن المهم معرفة الخطأ الناتج وكيفية تقديره عبر مجموعة حسابات. ومن المعروف لدىٰ الدارسين لموضوع التحليل العددي إنّ الحلول العددية للتكاملات تشكل جزءً مهماً من هٰذا الموضوع ، و تكون هذه الاهمية أكثر واضوحاً في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون كمثال في في قياس المساحات .

أن عملية إيجاد قيمة عددية للتكامل الثلاثي تشكل مسألة اكثر تعقيدا من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي و الثنائي كون المكامل هنا يعتمد على ثلاث متغيرات وان مسألة الاستمرارية أوالاعتلال في المكامل أوالاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكامل الأحادي .

لهذا فإن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم ,على سبيل المثال ,الحجم الواقع بين القطع المكافئ $z = 2x^2 + y^2$ والاسطوانة $z = 4 - y^2$, والحجم الواقع داخل الاسطوانة

$\rho = 4\cos(\theta)$ المحدد من الأعلى بالكرة $\rho^2 + z^2 = 16$ ومن الأسفل بالمستوي $z = 0$, وحساب المركز المتوسط للحجم الواقع داخل $x^2 + y^2 = 9$ وفوق المستوي $z = 0$ وتحت المستوي $x + z = 4$, وكذلك تبرز أهميتها في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن. فرانك آيرز [7]

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثلاثية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة : $f(x,y,z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$

في عام 1973 سلّط كل من هانس وجاكوبسن الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$ أما دافييز ورابينوتز عام 1975 فقد درسا التكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهما كانا يهملان الاعتلال.

في عام 1984 عالج محمد [23] التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المعتلة المشتقة أو المعتلة باستعمال طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي yوقاعدة كاوس على البعد الداخلي x حيث اسماها بطريقة رومبرك (كاوس) وقد أثبتتْ نجاحها على كثير من التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المعتلة المشتقة أو المعتلة وذلك بإلغاء الاعتلال على البعد الداخليx

الباحثة ضياء [6] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون والنقطة الوسطى على التكامل الخارجي (البعد z) وكل من الطرائق $RM(RS)$, $RM(RM)$ و $RS(RM)$ اضافة الى طريقة $RS(RS)$ على التكامل الأوسط (البعد Y) والتكامل الداخلي (البعدX) مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي Y و X

, وفي عام 2010 قدمت عكار [5] أسلوبا مغايرا لما استخدمته الباحثة ضياء إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الابعاد Y, X و Z عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية اي إن ($h = \bar{h} = \bar{\bar{h}}$) وأسمتها $RMMM$ حيث أن MMM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على الابعاد الثلاثة و R طريقة تعجيل رومبرك , و قدمت حالتين مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل (مستمر أو مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية أو معتل في احدى او كلتي نهايتي منطقة التكامل) وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.

ومنهم من عمل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال , دافييز و رابينوتز [2] عام 1975 .

في بحثنا هذا سوف نعمل على أيجاد طريقة عددية لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية عندما تكون دالة التكامل *f(x,y,z)* مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل وصيغة الخطأ لها عندما يكون الاعتلال حصراً في النقطة(x_0, y_{2n}, z_{2n}) أو النقطة (x_{2n}, y_0, z_0) وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من قاعدة سمبسون المطبقة على الأبعاد الثلاثة (الداخلي والأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي والاوسط والخارجي متساوية ولاحظنا إن هذه الطريقة مع تعجيل رومبرك باستخدام حدود التصحيح التي اوجدناها تعطي نتائج جيدة وسريعة من حيث الدقة وبعدد فترات جزئية قليلة نسبياً ولا تستغرق وقت طويل .

2: التكاملات الثلاثية لمكاملات مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية:

Triple Integrals for Continuous Integrands with Singular Partial Derivatives

التكامل الثلاثي I يمكن كتابته بالصيغة :

$$I = \int_{z_0}^{z_{2n}} \int_{y_0}^{y_{2n}} \int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = SSS(h) + E(h)$$

حيث $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0, x_{2n}] \times [y_0, y_{2n}] \times [z_0, z_{2n}]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل .

مبرهنة:(1) لتكن دالة التكامل $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2n}]\times[z_0,z_{2n}]$ ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة (x_0,y_{2n},z_{2n}) فان القيمة التقريبية للتكامل I يمكن حسابها من القاعدة التالية:

$$
\begin{aligned}
I=&\int_{z_0}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}[f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_{2n})+f(x_0,y_{2n},z_0)+f(x_0,y_{2n},z_{2n})+f(x_{2n},y_0,z_0)\\
&+f(x_{2n},y_0,z_{2n})+f(x_{2n},y_{2n},z_0)+f(x_{2n},y_{2n},z_{2n})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_0)+f(x_{(2i-1)},y_0,z_{2n})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_0)\\
&+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{2n})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_0)+f(x_{2i},y_0,z_{2n})+f(x_{2i},y_{2n},z_0)+f(x_{2i},y_{2n},z_{2n})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_0)\\
&+f(x_0,y_{(2j-1)},z_{2n})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{2n})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2n})]\\
&+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2n})]]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_0)+f(x_0,y_{2j},z_{2n})+f(x_{2n},y_{2j},z_0)+f(x_{2n},y_{2j},z_{2n})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_0)+f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2n})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{2j},z_0)+f(x_{2i},y_{2j},z_{2n})]]+4\sum_{k=1}^{n}[f(x_0,y_0,z_{(2k-1)})\\
&+f(x_0,y_{2n},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{2n},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{(2k-1)})]\\
&+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{2i},y_{2n},z_{(2k-1)})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{2j},z_{(2k-1)})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{(2k-1)})]]+2\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_0,y_0,z_{2k})+f(x_0,y_{2n},z_{2k})+f(x_{2n},y_0,z_{2k})\\
&+f(x_{2n},y_{2n},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_{2k})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{2k})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_{2k})+f(x_{2i},y_{2n},z_{2k})]\\
&+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_{2k})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2k})]\\
&+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_{2k})+f(x_{2n},y_{2j},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{2k})]]]+\Bigg[\frac{-2}{45}h^6(D_x^4+D_y^4+D_z^4)\\
&+\frac{2}{45}h^7(D_x^5-D_y^5-D_z^5-D_x^4D_y+D_xD_y^4)+\dots\Bigg]f(x_{2,}y_{2n-2},z_{2n-2})+A_1h^4+A_2h^6+A_3h^8+\dots
\end{aligned}
$$

حيث ان $A_1,A_2,\dots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة

البرهان :

التكامل الثلاثي I يمكن تجزئته الى:

$$I=\int_{z_0}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz$$

$$+\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz$$

$$+\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz+\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz \quad ...(1)$$

عند ملاحظة التكاملات الثمانية في اعلاه نرى ان الدالة *f(x,y,z)* مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها عدا التكامل الرابع , لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات $(I_1,I_2,I_3,I_5,I_6,I_7,I_8)$ من خلال الصيغة التي اشتقتها موسى[5] اما بالنسبة للتكامل الرابع فأن الدالة *f(x,y,z)* مستمرة في المنطقة $[x_0,x_2]\times[y_{2n-2},y_{2n}]\times[z_{2n-2},z_{2n}]$ ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة (x_0,y_{2n},z_{2n}) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0,y_{2n},z_{2n}) سستري [3] وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل :

$$I_1=\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_{2t}}^{z_{2t+2}}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_{2s}}^{y_{2s+2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\sum_{t=0}^{n-2}\sum_{s=0}^{n-2}$$

$$\begin{aligned}&[f(x_0,y_{2s},z_{2t})+f(x_0,y_{2s},z_{2t+2})+f(x_0,y_{2s+2},z_{2t})+f(x_0,y_{2s+2},z_{2t+2})+f(x_2,y_{2s},z_{2t})\\&+f(x_2,y_{2s},z_{2t+2})+f(x_2,y_{2s+2},z_{2t})+f(x_2,y_{2s+2},z_{2t+2})+4(f(x_0+h,y_{2s},z_{2t})\\&+f(x_0+h,y_{2s},z_{2t+2})+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2t})+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2t+2})+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2t})\\&+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2t+2})+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2t})+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2t+2})+f(x_0,y_{2s},z_{2t}+h)\\&+f(x_2,y_{2s},z_{2t}+h)+f(x_0,y_{2s+2},z_{2t}+h)+f(x_2,y_{2s+2},z_{2t}+h))+16(f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2t})\\&+f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2t+2})+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2t}+h)+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2t}+h)\\&+f(x_0+h,y_{2s},z_{2t}+h)+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2t}+h)+4(f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2t}+h))]\\&+a_1h^4+a_2h^6+a_3h^8+\dots\end{aligned} \quad ...(2)$$

$$I_2=\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_{2s}}^{y_{2s+2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\sum_{s=0}^{n-2}[f(x_0,y_{2s},z_{2n-2})$$

$$\begin{aligned}&+f(x_0,y_{2s},z_{2n})+f(x_0,y_{2s+2},z_{2n-2})+f(x_0,y_{2s+2},z_{2n})+f(x_2,y_{2s},z_{2n-2})+f(x_2,y_{2s},z_{2n})\\&+f(x_2,y_{2s+2},z_{2n-2})+f(x_2,y_{2s+2},z_{2n})+4(f(x_0+h,y_{2s},z_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2s},z_{2n})\\&+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2n})+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2n-2})+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2n})\\&+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2n-2})+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2n})+f(x_0,y_{2s},z_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2s},z_{2n-2}+h)\\&+f(x_0,y_{2s+2},z_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2s+2},z_{2n-2}+h))+16(f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2n-2})\\&+f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2n})+f(x_0,y_{2s}+h,z_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2s}+h,z_{2n-2}+h)\\&+f(x_0+h,y_{2s},z_{2n-2}+h)+f(x_0+h,y_{2s+2},z_{2n-2}+h)+4(f(x_0+h,y_{2s}+h,z_{2n-2}+h))]\\&+b_1h^4+b_2h^6+b_3h^8+\dots\end{aligned} \quad ...(3)$$

$$I_3=\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_{2t}}^{z_{2t+2}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\sum_{t=0}^{n-2}[f(x_0,y_{2n-2},z_{2t})$$
$$+f(x_0,y_{2n-2},z_{2t+2})+f(x_0,y_{2n},z_{2t})+f(x_0,y_{2n},z_{2t+2})+f(x_2,y_{2n-2},z_{2t})+f(x_2,y_{2n-2},z_{2t+2})$$
$$+f(x_2,y_{2n},z_{2t})+f(x_2,y_{2n},z_{2t+2})+4(f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2t})+f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2t+2})$$
$$+f(x_0+h,y_{2n},z_{2t})+f(x_0+h,y_{2n},z_{2t+2})+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2t+2})$$
$$+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2t+2})+f(x_0,y_{2n-2},z_{2t}+h)+f(x_2,y_{2n-2},z_{2t}+h)$$
$$+f(x_0,y_{2n},z_{2t}+h)+f(x_2,y_{2n},z_{2t}+h))+16(f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2t+2})$$
$$+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2t}+h)+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2t}+h)+f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2t}+h)$$
$$+f(x_0+h,y_{2n},z_{2t}+h)+4(f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2t}+h))]+c_1h^4+c_2h^6+c_3h^8+\dots \quad \dots(4)$$

اما لايجاد قيمة التكامل الرابع I_4 فيه الدالة معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطة (x_0,y_{2n},z_{2n}) ولحساب قيمته نستخدم متسلسلة تايلر حول النقطة (x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}):

$$f(x,y,z)=\Big[1+(x-x_2)D_x+(y-y_{2n-2})D_y+(z-z_{2n-2})D_z+\frac{(x-x_2)^2}{2!}D_x^2$$
$$+\frac{(y-y_{2n-2})^2}{2!}D_y^2+\frac{(z-z_{2n-2})^2}{2!}D_z^2+(x-x_2)(y-y_{2n-2})D_xD_y+(x-x_2)(z-z_{2n-2})D_xD_z$$
$$+(y-y_{2n-2})(z-z_{2n-2})D_yD_z+\frac{(x-x_2)^3}{3!}D_x^3+\frac{(y-y_{2n-2})^3}{3!}D_y^3+\frac{(z-z_{2n-2})^3}{3!}D_z^3$$
$$+\frac{(x-x_2)^2(y-y_{2n-2})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_2)(y-y_{2n-2})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(x-x_2)^2(z-z_{2n-2})}{2!}D_x^2D_z$$
$$+\frac{(x-x_2)(z-z_{2n-2})^2}{2!}D_xD_z^2+\frac{(y-y_{2n-2})^2(z-z_{2n-2})}{2!}D_y^2D_z+\frac{(y-y_{2n-2})(z-z_{2n-2})^2}{2!}D_yD_z^2$$
$$+(x-x_2)(y-y_{2n-2})(z-z_{2n-2})D_xD_yD_z+\frac{(x-x_2)^4}{4!}D_x^4+\frac{(y-y_{2n-2})^4}{4!}D_y^4+\frac{(z-z_{2n-2})^4}{4!}D_z^4$$
$$+\frac{(x-x_2)^3(y-y_{2n-2})}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_2)^3(z-z_{2n-2})}{3!}D_x^3D_z+\frac{(x-x_2)(y-y_{2n-2})^3}{3!}D_xD_y^3$$

$$+\frac{(x-x_2)(z-z_{2n-2})^3}{3!}D_xD_z^3+\frac{(y-y_{2n-2})^3(z-z_{2n-2})}{3!}D_y^3D_z+\frac{(y-y_{2n-2})(z-z_{2n-2})^3}{3!}D_yD_z^3$$
$$+\frac{(x-x_2)^2(y-y_{2n-2})^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_2)^2(z-z_{2n-2})^2}{2!2!}D_x^2D_z^2+\frac{(y-y_{2n-2})^2(z-z_{2n-2})^2}{2!2!}D_y^2D_z^2$$
$$+\frac{(x-x_2)^5}{5!}D_x^5+\frac{(y-y_{2n-2})^5}{5!}D_y^5+\frac{(z-z_{2n-2})^5}{5!}D_z^5+\frac{(x-x_2)^4(y-y_{2n-2})}{4!}D_x^4D_y$$
$$+\frac{(x-x_2)(y-y_{2n-2})^4}{4!}D_xD_y^4+\dots\Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \quad \dots(5)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y,z)$ موجودة عند النقطة (x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) وبأخذ التكامل الثلاثي للصيغة (5) في المنطقة $[x_0,x_2]\times[y_{2n-2},y_{2n}]\times[z_{2n-2},z_{2n}]$ نحصل على :

$$I=\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f\,(x,y,z)dxdydz=\Big[\;8h^3-8h^4D_x+8h^4D_y+8h^4D_z+\frac{32}{3!}h^5D_x^2$$
$$+\frac{32}{3!}h^5D_y^2+\frac{32}{3!}h^5D_z^2-8h^5D_xD_y-8h^5D_xD_z+8h^5D_yD_z-\frac{64}{4!}h^6D_x^3+\frac{64}{4!}h^6D_y^3$$
$$+\frac{64}{4!}h^6D_z^3+\frac{32}{3!}h^6D_x^2D_y-\frac{32}{3!}h^6D_xD_y^2+\frac{32}{3!}h^6D_x^2D_z-\frac{32}{3!}h^6D_xD_z^2+\frac{32}{3!}h^6D_y^2D_z$$
$$+\frac{32}{3!}h^6D_yD_z^2+\frac{128}{5!}h^7D_x^4+\frac{128}{5!}h^7D_y^4+\frac{128}{5!}h^7D_z^4-\frac{64}{4!}h^7D_x^3D_y-\frac{64}{4!}h^7D_xD_y^3$$
$$-\frac{64}{4!}h^7D_x^3D_z-\frac{64}{4!}h^7D_xD_z^3+\frac{128}{36}h^7D_x^2D_y^2+\frac{128}{36}h^7D_x^2D_z^2+\frac{128}{36}h^7D_y^2D_z^2-\frac{256}{6!}h^8D_x^5$$
$$+\frac{256}{6!}h^8D_y^5+\frac{256}{6!}h^8D_z^5+\frac{128}{5!}h^8D_x^4D_y-\frac{128}{5!}h^8D_xD_y^4+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\ldots(6)$$

بالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f\,(x_0,y_{2n-2},z_{2n-2})=\Big[\;1-2hD_x+2h^2D_x^2-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{16}{4!}h^4D_x^4-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\ldots(7)$$

وكذلك نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f\,(x_0,y_{2n-2},z_{2n})=\Big[\;1-2hD_x+2hD_z+2h^2D_x^2+2h^2D_z^2-4h^2D_xD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3+4h^3D_x^2D_z$$
$$-4h^3D_xD_z^2+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{16}{3!}h^4D_xD_z^3+4h^4D_x^2D_z^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5$$
$$+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\frac{32}{4!}h^5D_x^4D_z+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\ldots(8)$$

ونعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n})=\Big[\;1+2hD_z+2h^2D_z^2+\frac{8}{3!}h^3D_z^3+\frac{16}{4!}h^4D_z^4+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\ldots(9)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على :-

$$f\,(x_0,y_{2n},z_{2n-2})=\Big[\;1-2hD_x+2hD_y+2h^2D_x^2+2h^2D_y^2-4h^2D_xD_y-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{8}{3!}h^3D_y^3$$
$$+4h^3D_x^2D_y-4h^3D_xD_y^2+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{16}{4!}h^4D_y^4-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{16}{3!}h^4D_xD_y^3$$
$$+4h^4D_x^2D_y^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\frac{32}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{32}{4!}h^5D_xD_y^4$$
$$+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\ldots(10)$$

وكذلك نعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f\,(x_2,y_{2n},z_{2n-2})=\left[\;1+2hD_y+2h^2D_y^2+\frac{8}{3!}h^3D_y^3+\frac{16}{4!}h^4D_y^4+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\ldots\;\right]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(11)$$

وبالتعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على :-

$$\begin{aligned}f\,(x_0,y_{2n},z_{2n})=\Big[\;&1-2hD_x+2hD_y+2hD_z+2h^2D_x^2+2h^2D_y^2+2h^2D_z^2-4h^2D_xD_y-4h^2D_xD_z\\&+4h^2D_yD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{8}{3!}h^3D_y^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3+4h^3D_x^2D_y-4h^3D_xD_y^2+4h^3D_x^2D_z\\&-4h^3D_xD_z^2+4h^3D_y^2D_z+4h^3D_yD_z^2-8h^3D_xD_yD_z+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{16}{4!}h^4D_y^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4\\&-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{16}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{16}{3!}h^4D_xD_z^3+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(12)\end{aligned}$$

وكذلك نعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$\begin{aligned}f\,(x_2,y_{2n},z_{2n})=\Big[\;&1+2hD_y+2hD_z+2h^2D_y^2+2h^2D_z^2+4h^2D_yD_z+\frac{8}{3!}h^3D_y^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3\\&+4h^3D_y^2D_z+4h^3D_yD_z^2+\frac{16}{4!}h^4D_y^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4+\frac{16}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{16}{3!}h^4D_yD_z^3\\&+4h^4D_y^2D_z^2+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(13)\end{aligned}$$

ونعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f\,(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n-2})=\left[\;1-hD_x+\frac{1}{2!}h^2D_x^2-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{4!}h^4D_x^4-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\ldots\;\right]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(14)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$\begin{aligned}f\,(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n})=\Big[\;&1-hD_x+2hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+2h^2D_z^2-2h^2D_xD_z-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3\\&+h^3D_x^2D_z-2h^3D_xD_z^2+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4-\frac{2}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{8}{3!}h^4D_xD_z^3\\&+h^4D_x^2D_z^2-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\ldots\;\Big]f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(15)\end{aligned}$$

ونعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_0+h, y_{2n}, z_{2n-2}) = \Big[\ 1 - hD_x + 2hD_y + \frac{1}{2!}h^2D_x^2 + 2h^2D_y^2 - 2h^2D_xD_y - \frac{1}{3!}h^3D_x^3 + \frac{8}{3!}h^3D_y^3$$
$$+h^3D_x^2D_y - 2h^3D_xD_y^2 + \frac{1}{4!}h^4D_x^4 + \frac{16}{4!}h^4D_y^4 - \frac{2}{3!}h^4D_x^3D_y - \frac{8}{3!}h^4D_xD_y^3$$
$$+h^4D_x^2D_y^2 - \frac{1}{5!}h^5D_x^5 + \frac{32}{5!}h^5D_y^5 + \frac{2}{4!}h^5D_x^4D_y - \frac{16}{4!}h^5D_xD_y^4 + \dots\ \Big]$$
$$f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \qquad \dots(16)$$

كذلك نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_0+h, y_{2n}, z_{2n}) = \Big[\ 1 - hD_x + 2hD_y + 2hD_z + \frac{1}{2!}h^2D_x^2 + 2h^2D_y^2 + 2h^2D_z^2 - 2h^2D_xD_y$$
$$-2h^2D_xD_z + 4h^2D_yD_z - \frac{1}{3!}h^3D_x^3 + \frac{8}{3!}h^3D_y^3 + \frac{8}{3!}h^3D_z^3 + h^3D_x^2D_y$$
$$-2h^3D_xD_y^2 + h^3D_x^2D_z - 2h^3D_xD_z^2 + 4h^3D_y^2D_z + 4h^3D_yD_z^2 - 4h^3D_xD_yD_z$$
$$+\frac{1}{4!}h^4D_x^4 + \frac{16}{4!}h^4D_y^4 + \frac{16}{4!}h^4D_z^4 - \frac{2}{3!}h^4D_x^3D_y - \frac{2}{3!}h^4D_x^3D_z - \frac{8}{3!}h^4D_xD_y^3$$

$$-\frac{8}{3!}h^4D_xD_z^3 + \frac{16}{3!}h^4D_y^3D_z + \frac{16}{3!}h^4D_yD_z^3 + h^4D_x^2D_y^2 + h^4D_x^2D_z^2 + 4h^4D_y^2D_z^2 - \frac{1}{5!}h^5D_x^5$$
$$+\frac{32}{5!}h^5D_y^5 + \frac{32}{5!}h^5D_z^5 + \frac{2}{4!}h^5D_x^4D_y - \frac{16}{4!}h^5D_xD_y^4 + \frac{2}{4!}h^5D_x^4D_z + \dots\ \Big] f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \quad \dots(17)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_0, y_{2n-2}+h, z_{2n-2}) = \Big[\ 1 - 2hD_x + hD_y + 2h^2D_x^2 + \frac{1}{2!}h^2D_y^2 - 2h^2D_xD_y - \frac{8}{3!}h^3D_x^3 + \frac{1}{3!}h^3D_y^3 + 2h^3D_x^2D_y$$
$$-h^3D_xD_y^2 + \frac{16}{4!}h^4D_x^3 + \frac{1}{4!}h^4D_y^4 - \frac{8}{3!}h^4D_x^3D_y - \frac{2}{3!}h^4D_xD_y^3 + h^4D_x^2D_y^2$$
$$-\frac{32}{5!}h^5D_x^5 + \frac{1}{5!}h^5D_y^5 - \frac{2}{4!}h^5D_xD_y^4 + \frac{16}{4!}h^5D_x^4D_y + \dots\ \Big] f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \qquad \dots(18)$$

ونعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_2, y_{2n-2}+h, z_{2n-2}) = \Big[\ 1 + hD_y + \frac{1}{2!}h^2D_y^2 + \frac{1}{3!}h^3D_y^3 + \frac{1}{4!}h^4D_y^4 + \frac{1}{5!}h^5D_y^5 + \dots\ \Big]$$
$$f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \qquad \dots(19)$$

ثم نعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_2, y_{2n-2}+h, z_{2n}) = \Big[\ 1 + hD_y + 2hD_z + \frac{1}{2!}h^2D_y^2 + 2h^2D_z^2 + 2h^2D_yD_z + \frac{1}{3!}h^3D_y^3 + \frac{8}{3!}h^3D_z^3$$
$$+h^3D_y^2D_z + 2h^3D_yD_z^2 + \frac{1}{4!}h^4D_y^4 + \frac{16}{4!}h^4D_z^4 + \frac{2}{3!}h^4D_y^3D_z + \frac{8}{3!}h^4D_yD_z^3$$
$$+h^4D_y{}^2D_z^2 + \frac{1}{5!}h^5D_y^5 + \frac{32}{5!}h^5D_z^5 + \dots\ \Big] f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \qquad \dots(20)$$

وبالتعويض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل:-

$$f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)=\Big[\;1+hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_z^2+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+\frac{1}{4!}h^4D_z^4+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\dots\;\Big]\,f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\dots(21)$$

وبالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل على:-

$$\begin{aligned}f\,(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2n})=\Big[\;&1-2hD_x+hD_y+2hD_z+2h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2+2h^2D_z^2-2h^2D_xD_y-4h^2D_xD_z\\&+2h^2D_yD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3+2h^3D_x^2D_y-h^3D_xD_y{}^2+4h^3D_x^2D_z-4h^3D_xD_z^2\\&+h^3D_y^2D_z+2h^3D_yD_z^2-4h^3D_xD_yD_z+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_y^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4-\frac{8}{3!}h^4D_x^3D_y\\&-\frac{2}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{16}{3!}h^4D_xD_z^3+\frac{2}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{8}{3!}h^4D_yD_z^3+h^4D_x^2D_y^2+4h^4D_x^2D_z{}^2\\&+h^4D_y^2D_z^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_y^5+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\frac{16}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{2}{4!}h^5D_xD_y^4+\dots\;\Big]\,f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\end{aligned}\qquad\dots(22)$$

بالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل:-

$$\begin{aligned}f\,(x_0,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)=\Big[\;&1-2hD_x+hD_z+2h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2-2h^2D_xD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3\\&+2h^3D_x^2D_z-h^3D_xD_z^2+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4-\frac{8}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{2}{3!}h^4D_xD_z^3\\&+h^4D_x^2D_z^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\dots\;\Big]\,f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\end{aligned}\qquad\dots(23)$$

ونعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل على:-

$$\begin{aligned}f\,(x_2,y_{2n},z_{2n-2}+h)=\Big[\;&1+2hD_y+hD_z+2h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2+2h^2D_yD_z+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+\frac{8}{3!}h^3D_y^3\\&+2h^3D_y^2D_z+h^3D_yD_z^2+\frac{1}{4!}h^4D_z^4+\frac{16}{4!}h^4D_y^4+\frac{2}{3!}h^4D_yD_z^3+\frac{8}{3!}h^4D_y^3D_z\\&+h^4D_y^2D_z^2+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\dots\;\Big]\,f\,(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\end{aligned}\qquad\dots(24)$$

بالتعويض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_0,y_{2n},z_{2n-2}+h)=\Big[\ 1-2hD_x+2hD_y+hD_z+2h^2D_x^2+2h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2-2h^2D_xD_z-4h^2D_xD_y$$
$$+2h^2D_yD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+\frac{8}{3!}h^3D_y^3+2h^3D_x^2D_z-h^3D_xD_z^2+4h^3D_x^2D_y-4h^3D_xD_y^2$$
$$+2h^3D_y^2D_z+h^3D_yD_z^2-4h^3D_xD_yD_z+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4+\frac{16}{4!}h^4D_y^4-\frac{8}{3!}h^4D_x{}^3D_z$$
$$-\frac{2}{3!}h^4D_xD_z^3-\frac{16}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{16}{3!}h^4D_xD_y^3+\frac{2}{3!}h^4D_yD_z^3+\frac{8}{3!}h^4D_y^3D_z+h^4D_x^2D_z^2$$
$$+4h^4D_x^2D_y^2+h^4D_y^2D_z^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\frac{32}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{32}{4!}h^5D_xD_y^4$$
$$+\frac{16}{4!}h^5D_x^4D_z+\ldots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(25)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n-2} في الصيغة (5) نحصل:-

$$f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2n-2})=\Big[\ 1-hD_x+hD_y+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2-h^2D_xD_y-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_y$$
$$-\frac{1}{2!}h^3D_xD_y^2+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_y^4-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{1}{3!}h^4D_xD_y^3+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_y^2-\frac{1}{5!}h^5D_x^5$$
$$+\frac{1}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{1}{4!}h^5D_xD_y^4+\ldots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(26)$$

كذلك نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ z_{2n} في الصيغة (5) نحصل:-

$$f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2n})=\Big[\ 1-hD_x+hD_y+2hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2+2h^2D_z^2-h^2D_xD_y-2h^2D_xD_z$$
$$+2h^2D_yD_z-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{8}{3!}h^3D_z^3+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_y-\frac{1}{2!}h^3D_xD_y^2+h^3D_x^2D_z$$
$$-2h^3D_xD_z^2+h^3D_y^2D_z+2h^3D_yD_z^2-2h^3D_xD_yD_z+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_y^4+\frac{16}{4!}h^4D_z^4$$
$$-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{1}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{2}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{8}{3!}h^4D_xD_z^3+\frac{2}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{8}{3!}h^4D_yD_z{}^3$$
$$+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_y^2+h^4D_x^2D_z^2+h^4D_y^2D_z^2-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_y^5+\frac{32}{5!}h^5D_z^5+\frac{1}{4!}h^5D_x^4D_y$$
$$-\frac{1}{4!}h^5D_xD_y^4+\frac{2}{4!}h^5D_x^4D_z+\ldots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(27)$$

وبالتعويض عن x بـ x_2 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h)=\Big[\ 1+hD_y+hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2+h^2D_yD_z+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3$$
$$+\frac{1}{2!}h^3D_y^2D_z+\frac{1}{2!}h^3D_yD_z^2+\frac{1}{4!}h^4D_y^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4+\frac{1}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{1}{3!}h^4D_yD_z^3$$
$$+\frac{1}{4}h^4D_y^2D_z^2+\frac{1}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^2+\ldots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \ldots(28)$$

ونعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n-2} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل:-

$$f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)=\Big[\ 1-hD_x+hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2-h^2D_xD_z-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3$$
$$+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_z-\frac{1}{2!}h^3D_xD_z^2+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{1}{3!}h^4D_xD_z^3$$
$$+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_z^2-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\frac{1}{4!}h^5D_x^4D_z+\dots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\dots(29)$$

ثم نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل:-

$$f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h)=\Big[\ 1-2hD_x+hD_y+hD_z+2h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2-2h^2D_xD_y-2h^2D_xD_z$$
$$+h^2D_yD_z-\frac{8}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+2h^3D_x^2D_y-h^3D_xD_y^2+2h^3D_x^2D_z-h^3D_xD_z^2+\frac{1}{2!}h^3D_y^2D_z$$
$$+\frac{1}{2!}h^3D_yD_z^2-2h^3D_xD_yD_z+\frac{16}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_y^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4-\frac{8}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{2}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{8}{3!}h^4D_x^3D_z$$
$$-\frac{2}{3!}h^4D_xD_z^3+\frac{1}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{1}{3!}h^4D_yD_z{}^3+h^4D_x^2D_y^2+h^4D_x^2D_z^2+\frac{1}{4}h^4D_y^2D_z^2-\frac{32}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_y^5$$
$$+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\frac{16}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{2}{4!}h^5D_xD_y^4+\frac{16}{4!}h^5D_x^4D_z+\dots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\dots(30)$$

وبالتعويض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_{2n} وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل:

$$f(x_0+h,y_{2n},z_{2n-2}+h)=\Big[\ 1-hD_x+2hD_y+hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+2h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2-2h^2D_xD_y$$
$$-h^2D_xD_z+2h^2D_yD_z-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{8}{3!}h^3D_y^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+h^3D_x^2D_y-2h^3D_xD_y^2+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_z$$
$$-\frac{1}{2!}h^3D_xD_z^2+2h^3D_y^2D_z+h^3D_yD_z^2-2h^3D_xD_yD_z+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{16}{4!}h^4D_y^4+\frac{1}{4!}h^4D_z{}^4-\frac{2}{3!}h^4D_x^3D_y$$
$$-\frac{8}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{1}{3!}h^4D_xD_z^3+\frac{2}{3!}h^4D_yD_z^3+\frac{8}{3!}h^4D_y^3D_z+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_z^2+h^4D_x^2D_y^2+h^4D_y^2D_z^2$$
$$-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\frac{32}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\frac{2}{4!}h^5D_x^4D_y-\frac{16}{4!}h^5D_xD_y^4+\frac{1}{4!}h^5D_x{}^4D_z+\dots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})\qquad\dots(31)$$

ونعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ $y_{2n-2}+h$ وعن z بـ $z_{2n-2}+h$ في الصيغة (5) نحصل على:-

$$f(x_0+h, y_{2n-2}+h, z_{2n-2}+h) = \Big[\ 1-hD_x+hD_y+hD_z+\frac{1}{2!}h^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2+\frac{1}{2!}h^2D_z^2$$
$$-h^2D_xD_y-h^2D_xD_z+h^2D_yD_z-\frac{1}{3!}h^3D_x^3+\frac{1}{3!}h^3D_y^3+\frac{1}{3!}h^3D_z^3+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_y$$
$$-\frac{1}{2!}h^3D_xD_y^2+\frac{1}{2!}h^3D_x^2D_z-\frac{1}{2!}h^3D_xD_z^2+\frac{1}{2!}h^3D_y^2D_z+\frac{1}{2!}h^3D_yD_z^2-h^3D_xD_yD_z$$
$$+\frac{1}{4!}h^4D_x^4+\frac{1}{4!}h^4D_y^4+\frac{1}{4!}h^4D_z^4-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_y-\frac{1}{3!}h^4D_xD_y^3-\frac{1}{3!}h^4D_x^3D_z-\frac{1}{3!}h^4D_xD_z^3$$
$$+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_y^2+\frac{1}{4}h^4D_x^2D_z^2+\frac{1}{4}h^4D_y^2D_z^2-\frac{1}{5!}h^5D_x^5+\frac{1}{5!}h^5D_y^5+\frac{1}{5!}h^5D_z^5+\frac{1}{4!}h^5D_x^4D_y$$
$$-\frac{1}{4!}h^5D_xD_y^4+\dots\ \Big]f(x_2, y_{2n-2}, z_{2n-2}) \qquad \dots(32)$$

ومن الصيغ (5)،(7) - (32) نحصل على:-

$$I_4=\int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}}\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}[f(x_0,y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_0,y_{2n-2},z_{2n})$$
$$+f(x_0,y_{2n},z_{2n-2})+f(x_0,y_{2n},z_{2n})+f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_2,y_{2n-2},z_{2n})$$
$$+f(x_2,y_{2n},z_{2n-2})+f(x_2,y_{2n},z_{2n})+4(f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n})$$
$$+f(x_0+h,y_{2n},z_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2n},z_{2n})+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2n-2})$$
$$+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2n})+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2n-2})+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2n})$$
$$+f(x_0,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)+f(x_0,y_{2n},z_{2n-2}+h)$$
$$+f(x_2,y_{2n},z_{2n-2}+h))+16(f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2n-2})+f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2n})$$
$$+f(x_0,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h)+f(x_2,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h)+f(x_0+h,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)$$
$$+f(x_0+h,y_{2n},z_{2n-2}+h)+4(f(x_0+h,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h))]+\Big[\frac{-2}{45}h^6(D_x^4+D_y^4+D_z^4)$$
$$+\frac{2}{45}h^7(D_x^5-D_y^5-D_z^5-D_x^4D_y+D_xD_y^4)+\dots\ \Big]f(x_2,y_{2n-2},z_{2n-2}) \qquad \dots(33)$$

$$I_5=\int_{z_0}^{z_{2n-2}}\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz=\sum_{t=0}^{n-2}\int_{z_{2t}}^{z_{2t+2}}\sum_{s=0}^{n-2}\int_{y_{2s}}^{y_{2s+2}}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f(x,y,z)dxdydz=\frac{h^3}{27}\sum_{t=0}^{n-2}$$
$$\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1}\Big[\ f(x_{2r},y_{2s},z_{2t})+f(x_{2r},y_{2s},z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2t})+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2t+2})$$
$$+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2t+2})+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2t+2})$$
$$+4(f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2t})+f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2t+2})+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2t})+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2t+2})$$
$$+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2t})+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2t+2})+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2t+2})$$
$$+f(x_{2r},y_{2s},z_{2t}+h)+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2t}+h)+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2t}+h)+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2t}+h))$$
$$+16(f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2t})+f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2t}+h)$$
$$+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2t}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2t}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2t}+h)$$
$$+4(f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2t}+h))\Big]+d_1h^4+d_2h^6+d_3h^8+\dots \qquad \dots(34)$$

$$
\begin{aligned}
I_6 &= \int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}} \int_{y_0}^{y_{2n-2}} \int_{x_2}^{x_{2n}} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}} \sum_{s=0}^{n-2} \int_{y_{2s}}^{y_{2s+2}} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \frac{h^3}{27}\sum_{s=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1} \\
&\big[f(x_{2r},y_{2s},z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2s},z_{2n})+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2n}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2n})+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2n}) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2n-2})+f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2n})+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2n-2}) \\
&+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2n})+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2n}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2n})+f(x_{2r},y_{2s},z_{2n-2}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2s},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r},y_{2s+2},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r+2},y_{2s+2},z_{2n-2}+h)) \\
&+16(f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2n})+f(x_{2r},y_{2s}+h,z_{2n-2}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2s}+h,z_{2n-2}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2s},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2s+2},z_{2n-2}+h) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2s}+h,z_{2n-2}+h))\big]+e_1h^4+e_2h^6+e_3h^8+\ldots \qquad \ldots(35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_7 &= \int_{z_0}^{z_{2n-2}} \int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}} \int_{x_2}^{x_{2n}} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \sum_{t=0}^{n-2} \int_{z_{2t}}^{z_{2t+2}} \int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \frac{h^3}{27}\sum_{t=0}^{n-2}\sum_{r=1}^{n-1} \\
&\big[f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2t})+f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2n},z_{2t})+f(x_{2r},y_{2n},z_{2t+2}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2t+2})+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2t+2}) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2t})+f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2t+2})+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2t}) \\
&+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2t+2}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2t}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2t}+h)+f(x_{2r},y_{2n},z_{2t}+h)+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2t}+h))+ \\
&16(f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2t})+f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2t+2})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2t}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2t}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2t}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2t}+h) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2t}+h))\big]+g_1h^4+g_2h^6+g_3h^8+\ldots \qquad \ldots(36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_8 &= \int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}} \int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}} \int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z_{2n-2}}^{z_{2n}} \int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}} \sum_{r=1}^{n-1} \int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f(x,y,z)dxdydz = \frac{h^3}{27}\sum_{r=1}^{n-1} \\
&\big[f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2n})+f(x_{2r},y_{2n},z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2n},z_{2n}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2n})+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2n}) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2n-2})+f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2n})+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2n-2}) \\
&+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2n})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2n}) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2n})+f(x_{2r},y_{2n-2},z_{2n-2}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r},y_{2n},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r+2},y_{2n},z_{2n-2}+h)) \\
&+16(f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2n-2})+f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2n})+f(x_{2r},y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h) \\
&+f(x_{2r+2},y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2n-2},z_{2n-2}+h)+f(x_{2r}+h,y_{2n},z_{2n-2}+h) \\
&+4(f(x_{2r}+h,y_{2n-2}+h,z_{2n-2}+h))\big]+j_1h^4+j_2h^6+j_3h^8+\ldots \qquad \ldots(37)
\end{aligned}
$$

حيث $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, g_i, j_i$ ثوابت و $i = 1,2,\ldots$.

وبجمع الصيغ (2)،(3)، (4)، (32)، (33)، (35)، (36) و(37) نحصل على المبرهنة (1)

مبرهنة (2):

لتكن دالة التكامل $f(x,y,z)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]\times[z_0,z_n]$ ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة (x_{2n},y_0,z_0) فان القيمة التقريبية للتكامل I يمكن حسابها من القاعدة التالية:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{z_0}^{z_{2n}}\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{h^3}{27}[f(x_0,y_0,z_0)+f(x_0,y_0,z_{2n})+f(x_0,y_{2n},z_0)+f(x_0,y_{2n},z_{2n})+f(x_{2n},y_0,z_0)\\
&+f(x_{2n},y_0,z_{2n})+f(x_{2n},y_{2n},z_0)+f(x_{2n},y_{2n},z_{2n})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_0)+f(x_{(2i-1)},y_0,z_{2n})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_0)\\
&+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{2n})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_0)+f(x_{2i},y_0,z_{2n})+f(x_{2i},y_{2n},z_0)+f(x_{2i},y_{2n},z_{2n})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_0)\\
&+f(x_0,y_{(2j-1)},z_{2n})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{2n})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2n})]\\
&+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_0)+f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2n})]]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_0)+f(x_0,y_{2j},z_{2n})+f(x_{2n},y_{2j},z_0)+f(x_{2n},y_{2j},z_{2n})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_0)+f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2n})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_{2j},z_0)+f(x_{2i},y_{2j},z_{2n})]]+4\sum_{k=1}^{n}[f(x_0,y_0,z_{(2k-1)})\\
&+f(x_0,y_{2n},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{2n},z_{(2k-1)})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{(2k-1)})]\\
&+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_{(2k-1)})+f(x_{2i},y_{2n},z_{(2k-1)})]+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{(2k-1)})]+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_{(2k-1)})+f(x_{2n},y_{2j},z_{(2k-1)})\\
&+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{(2k-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{(2k-1)})]]+2\sum_{k=1}^{n-1}[f(x_0,y_0,z_{2k})+f(x_0,y_{2n},z_{2k})+f(x_{2n},y_0,z_{2k})\\
&+f(x_{2n},y_{2n},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}[f(x_{(2i-1)},y_0,z_{2k})+f(x_{(2i-1)},y_{2n},z_{2k})]+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{2i},y_0,z_{2k})+f(x_{2i},y_{2n},z_{2k})]\\
&+4\sum_{j=1}^{n}[f(x_0,y_{(2j-1)},z_{2k})+f(x_{2n},y_{(2j-1)},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{(2j-1)},z_{2k})]\\
&+2\sum_{j=1}^{n-1}[f(x_0,y_{2j},z_{2k})+f(x_{2n},y_{2j},z_{2k})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j},z_{2k})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j},z_{2k})]]]\\
&+\left[\frac{-2}{45}h^6(D_x^{\,4}+D_y^{\,4}+D_z^{\,4})+\frac{2}{45}h^7(D_x^{\,5}-D_y^{\,5}-D_z^{\,5}-D_x^{\,4}D_y+D_xD_y^{\,4})+\dots\right]f(x_{2,}y_{2n-2},z_{2n-2})\\
&+B_1h^4+B_2h^6+B_3h^8+\dots
\end{aligned}
$$

بنفس طريقة اشتقاق المبرهنة (1) يمكن اشتقاق المبرهنة (2) عندما تكون دالة التكامل معرفة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في النقطة (x_{2n},y_0,z_0)

3. الامثلة

مثال 1
$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\sqrt{x-y-z+2}\,dxdydz$$

المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,1,1) (لانه عند تعويض النقطة(0,1,1) في المشتقة الاولى للدالة $f(x,y)=\sqrt{x-y-z+2}$ فان الناتج يكون غير معرف) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 1) نلاحظ انها متطابقة لغاية المرتبة الثانية عشر بعد الفاصلة عندما $m=n_1=n_2=64$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (3.5,4,6,8,…) بينما كانت القيمة صحيحة لسبعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة بدون هذا التعجيل , ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 1). علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (1.54 ثانية).

مثال 2
$$I=\int_0^1\int_0^1\int_{-1}^0(x^4+y^4+z^4)^{1/3}dxdydz$$

التكامل هنا ايضاً من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" كذلك فان المكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0,0) وايضاً تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات حيث حصلنا على قيمة صحيحة لغاية اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة من خلال ملاحظة تكرار القيمة في الاعمدة الاربعة الاخيرة في الجدول (برنامج الماتلاب) عندما $m=n_1=n_2=128$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (4,13/3,6,8,10 ,…) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (0,0,0) اذ يمكن القول بان قيمة التكامل هي (0.76873958094616) مقربة الى اربعة عشرمرتبة عشرية بينما كانت القيمة صحيحة لتسعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في (الجدول رقم 2) .ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 2) ايضاً.علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(10.722 ثانية).

مثال 3
$$I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$$

التكامل هنا ايضاً من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" كذلك فان المكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0,0) وايضاً تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات حيث حصلنا على قيمة صحيحة لغاية اربع عشرة مرتبة بعد الفاصلة من خلال ملاحظة تكرار القيمة في الاعمدة الاربعة الاخيرة في الجدول (برنامج الماتلاب) عندما $m=n_1=n_2=128$ بعد استخدام تعجيل رومبرك بحدود تصحيح (3,4,6,8,10 ,…) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (0,0,0) اذ يمكن القول بان قيمة التكامل هي (0.515593558809813) مقربة الى اربعة عشرمرتبة عشرية بينما كانت القيمة صحيحة لسبعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في (الجدول رقم 3) .ويمثل هذا تطبيقا" (للمبرهنة 2) ايضاً. علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(8.22 ثانية).

m=n1=n2	SSS	k=3.5	k=4	k=6	k=8	k=10
2	1.20413628938104					
4	1.20550442676127	1.20563707908321				
8	1.20564219150340	1.20565554894337	1.20565678026738			
16	1.20565548867910	1.20565677795111	1.20565685988496	1.20565686114873		
32	1.20565673538884	1.20565685626774	1.20565686148885	1.20565686151431	1.20565686151574	
64	1.20565685006879	1.20565686118797	1.20565686151599	1.20565686151642	1.20565686151642	1.20565686151643
						1.20565686151660

الجدول رقم(1) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x \quad -y \quad -z \quad +2}\,dxdydz$ بطريقة $RSSS$.

m=n1=n2	SSS	k=4	k=13/3	k=6	k=8	k=10	k=12
2	0.75602751903394						
4	0.76814913726335	0.76895724514531					
8	0.76870907743431	0.76874640677904	0.76873540196341				
16	0.76873799252148	0.76873992019396	0.76873958162336	0.76873964796716			
32	0.76873949733191	0.76873959765261	0.76873958081740	0.76873958080460	0.76873958054122		
64	0.76873957649521	0.76873958177276	0.76873958094390	0.76873958094591	0.76873958094647	0.76873958094686	
128	0.76873958070638	0.76873958098713	0.76873958094612	0.76873958094616	0.76873958094616	0.76873958094616	0.76873958094616

الجدول رقم(2) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1 \sqrt[3]{x^4+y^4+z^4}\,dxdydz$ بطريقة $RSSS$.

m=n1=n2	SSS	k=3	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12
2	0.50970871113899						
4	0.51495110487624	0.51570001826728					
8	0.51551857403717	0.51559964106016	0.51559294924635				
16	0.51558449304251	0.51559391004328	0.51559352797549	0.51559353716166			
32	0.51559244443745	0.51559358035101	0.51559355837153	0.51559355885400	0.51559355893907		
64	0.51559342068531	0.51559356014929	0.51559355880251	0.51559355880935	0.51559355880918	0.51559355880905	
128	0.51559354161686	0.51559355889279	0.51559355880902	0.51559355880913	0.51559355880913	0.51559355880913	0.51559355880913

الجدول رقم(3) يبين حساب القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_0^1\int_{-1}^0\int_0^1 \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz$ بطريقة $RSSS$.

4.المناقشة :

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل بقاعدة سمبسون على الابعاد الثلاثة X, Y, Z وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الاوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة (قاعدة SSS) قيماً" صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التقريبية الصحيحة للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استخدام تعجيل رومبرك عليها ,على سبيل المثال في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لسبعة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 64$, وفي التكامل الثاني كانت القيمة صحيحة لتسعة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 128$, وفي التكامل الثالث كانت القيمة صحيحة لسبعة مراتب عشرية عندما $m = n_1 = n_2 = 128$.

إلاّ إنه عند استخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية مقارنة مع قيم التكاملات التحليلية أذ كانت مطابقة للقيمة التحليلية في التكامل الأول (12 مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ وفي التكامل الثاني (14مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n_1 = n_2 = 128$, وفي التكامل الثالث (14 مرتبة عشرية بعد الفاصلة) عندما $m = n = 128$, وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة $RSSS$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp.87-93,1967.

[2] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , Blasdell Puplishing Company, pp. 1-2 ,599,113, chapter 5,1975.

[3] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi , pp 5-7 , 2008.

[4] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[5] موسى , صفاء مهدي , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2011 .

[6] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[7] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988