Amethod ROSS to Evaluate Double Integrals with Singular Partial Derivatives Integrands when the number of subintervals on the two dimensions are not equal

طريقة ROSS لحساب التكاملات الثنائية المعتلة المشتقات الجزئية عندما تكون الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

م.م.رنا حسن هلال
جامعة الكوفة /قسم الرياضيات/ كلية التربية للبنات
Email :ranah.salman@uokufa.edu.iq

المستخلص

ان الهدف الأساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات التي تكون بالصيغة $I=\int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy$ عدديا ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية تحديدا عند النقطة $\left(x_{2n},y_0\right)$أوالنقطة$\left(x_0,y_{2m}\right)$ باستخدام قاعدة سمبسون على البعدين الداخلي والخارجي x,y وكيفية إيجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبرك[1] من خلال حدود التصحيح التي تم إيجادها عندما تكون أعداد الفترات الجزئية غير متساوية على البعدين x,y

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of integrals in the form $I=\int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy$, numerically its integrands have singular partial derivatires excutly at the point$\left(x_{2n},y_0\right)$or point $\left(x_0,y_{2m}\right)$ by using the Simpson's rule with the two direction x and y . and the derive the correction error terms and we used Romberg acceleration to improve the results when the number of subintervals on the direction of dimension is not equal to subintervals on the direction of dimension y .

1.المقدمة

إن من أهم ما يتميز فيه موضوع التحليل العددي هو ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية إذ تعتمد كفاءة الطرائق هذه على الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تحسب. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي .

وَتمَثل دراسة الخطأ مهمة مركزية في التحليل العددي لأن النتائج التي نحصل عليها من تطبيق معظم الطرائق العددية ما هي إلا تقريب للحل الحقيقي ومن المهم معرفة الخطأ الناتج وكيفية تقديره عبر مجموعة من الحسابات.

ومن المعروف لدى دارسي موضوع التحليل العددي ان الحلول العددية للتكاملات تشكل جزءاً مهماً من هذا الموضوع (إيجاد القيم التقريبية للتكاملات),حيث تكون هذه الأهمية واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون,إذ تمثل قيمة التكامل المحدد المساحة المحصورة بين المنحني f $(f(x)\geq 0)$ والمحور X والمحددة بالمستقيمين $x=b$,$x=a$.
وتَكمُن أهَميّة التّكاملات الثنائيّة في إيجاد مساحة السّطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذّاتية للسّطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التّكامل الثّنائي ، مما دعا كثيرٌ من الباحثين إلى العملِ في مجال التّكاملات الثنائيّة، ومنهم هانس جار وجاكوبسن [2] عام 1973 , دافيز و رابينوتز [4] عام 1975، محمد [3] عام 1984 ، عكار [9]عام 2010، ألشريفي [7] عام 2012 وحسن[8]عام 2015 وفاضل[11]عام 2015 .

وفي هذا البحث سوف اعمل على أيجاد طريقة عددية بأسلوب مشابه لما قدمته فاضل[11] لحساب قيم التكاملات الثنائية عندما تكون دالة التكامل *f(x,y)* مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير إحدى نهايتي منطقة التكامل وإنما الاعتلال حصراً في النقطة$\left(x_0,y_{2m}\right)$أو $\left(x_{2n},y_0\right)$ وذلك بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق(القاعدة المركبة

من قاعدة سمبسون على البعدين الداخلي x والبعد الخارجي y) ، عندما تكون أعداد الفترات الجزئية غير متساوية مع اخذ حالة خاصة عندما $\left(h_2 = 1/2h_1\right)$)، وسميت القاعدة بـ $RoSS(h_1,h_2)$ حيث ان(S تمثل قاعدة سمبسون وRO تمثل قاعدة رومبرك) .

2-التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals for Continuous Integrands with
Singularity in Partial Derivatives

لنفرض التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة:

$$I = \int_{c=y_0}^{d=2m}\int_{a=x_0}^{b=2n} f(x,y)dxdy = SS(h_1,h_2) + E(h_1,h_2) \qquad ...(1)$$

والذي فيه الدالة $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2m}]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل وسنناقش كيفية حساب قيمة هذا التكامل بقاعدة سمبسون على البعدين x و y حيث ان $SS(h_1,h_2)$ تمثل قيمة التكامل بالقاعدة المذكورة و $E(h_1,h_2)$ سلسلة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) و سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي X لعدد من الفترات الجزئية $2n$ ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي Y لعدد من الفترات الجزئية $2m$ ، وسنأخذ حالة خاصة $\left(h_2 = 1/2h_1\right)$ كي نتمكن من استخدام تعجيل رومبرك.

حيث ان $h_2 = \dfrac{d-c}{2m}, h_1 = \dfrac{b-a}{n}$

آذ أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون هي :

$$E_S(h) = -\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)} - f_0^{(3)}) + \frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)} - f_0^{(5)}) - \cdots \qquad ...(2)$$

فوكس [1]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغة (2)نحصل على :

$$E_S(h) = \frac{-(x_{2n}-x_0)}{180}h^4 f^{(4)}(\mu_1) + \frac{(x_{2n}-x_0)}{1512}h^6 f^{(6)}(\mu_2) + ... \qquad ... (3)$$

حيث $\mu_i, \eta_i \in (x_0, x_{2n})$, $i = 1,2,3,...$.عكار[9]

ولحساب التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة:

$$\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy = sim^2(h_1, 0.5h_2) + E_{sim^2}(h_1, 0.5h_2) \qquad \cdots(4)$$

فاضل[11]

الحالة الأولى

(**مبرهنة1**) : لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2m}]$ وغيرقابلة للاشتقاق عند النقطة $(x,y) = (x_{2n}, y_0)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية :

$$\begin{aligned}I = \int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \frac{h_1h_2}{9}\Bigg[& f(x_0,y_0) + f(x_0,y_{2m}) + f(x_{2n},y_0) + f(x_{2n},y_{2m}) \\ & +4\sum_{i=1}^{n}\Big(f\left(x_{(2i-1)},y_0\right) + f\left(x_{(2i-1)},y_{2m}\right)\Big) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f\left(x_{2i},y_0\right) + f\left(x_{2i},y_{2m}\right)\Big) \\ & +4\sum_{j=1}^{n}\Bigg(f\left(x_0,y_{(2j-1)}\right) + f\left(x_{2n},y_{(2j-1)}\right) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{2i},y_{2j}\right)\Bigg) \\ & +2\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(f\left(x_0,y_{2j}\right) + f\left(x_{2n},y_{2j}\right) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{(2i-1)},y_{2j}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_{2i},y_{2j}\right)\Bigg)\Bigg] +\end{aligned}$$

$$+\left[\frac{-1}{45}(h_1^5h_2D_x^4+h_1h^5{}_2D_y^4)+-\frac{1}{45}(h_1^6h_2D_x^5-h_1h^6{}_2D_y^5-h^4{}_1h_2D_x^4D_y+h_1h^6D_xD_y^4)+\dots\right]f(x_{2n-2},y_2)$$

$$+A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_1^6+A_4h_2^6\cdots$$

حيث ان $A_1, A_2,\dots$ ثوابت تعتمدعلى المشتقات الجزئية للدالة $f\ (x,y)$ فقط .

البرهان:

التكامل $\int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy$ يمكن تجزئته إلى أربعة تكاملات هي:-

$$I=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f(x,y)dxdy+\int_{y_2}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy+\int_{y_2}^{y_{2m}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy$$

(5)

نلاحظ في هذه الصيغة ان التكامل الأول والثاني والرابع فيها الدالة *f(x,y)* مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات (I_1,I_2,I_4) من خلال الصيغة (11) اما بالنسبة للتكامل الثالث في المنطقة الجزئية $[x_{2n-2},x_{2n}]\times[y_0,y_2]$ فيه الدالة *f(x,y)* مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة (x_{2n},y_0) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variables , موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_{2n},y_0) سستري[6]. وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:-

$$I_1=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_2}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{r=0}^{n-2}\Big[f(x_{2r},y_0)+f(x_{2r},y_2)$$
$$+f(x_{2r+2},y_0)+f(x_{2r+2},y_2)+4\big(f(x_{2r}+h_1,y_0)+f(x_{2r}+h_1,y_2)+f(x_{2r},y_0+h_2)$$
$$+f(x_{2r+2},y_0+h_2)+4f(x_{2r}+h_1,y_0+h_2)\big)\Big]+c_1h_1^4+c_2h_2^4+c_3h_1^6+c_4h_2^6+\cdots$$

(6)

$$I_2=\int_{y_2}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f(x,y)dxdy=\sum_{s=1}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-2}\int_{y_{2s}}^{y_{2s+2}}\int_{x_{2r}}^{x_{2r+2}} f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{r=0}^{n-2}\Big[\ f(x_{2r},y_{2s})$$
$$+f(x_{2r},y_{2s+2})+f(x_{2r+2},y_{2s})+f(x_{2r+2},y_{2s+2})+4\big(f(x_{2r}+h_1,y_{2s})+f(x_{2r}+h_1,y_{2s+2})\qquad(7)$$
$$+f(x_{2r},y_{2s}+h_2)+f(x_{2r+2},y_{2s}+h_2)+4f(x_{2r}+h_1,y_{2s}+h_2)\big)+b_1h_1^4+b_2h_2^4+b_3h_1^6+b_4h_2^6\cdots$$

نستعمل متسلسلة تايلر للدالة $f\ (x,y)$ حول النقطة (x_{2n-2},y_2) بالنسبة للتكامل الثالث في المنطقة الجزئية أي إن: $[x_{2n-2},x_{2n}]\times[y_0,y_2]$ -:

$$f\ (x,y)=\Big[\ 1+(x-x_{2n-2})D_x+(y-y_2)D_y+\frac{(x-x_{2n-2})^2}{2!}D_x^2+\frac{(y-y_2)^2}{2}D_y^2$$
$$+(x-x_{2n-2})(y-y_2)D_xD_y+\frac{(x-x_{2n-2})^3}{3!}D_x^3+\frac{(y-y_2)^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_{2n-2})^2(y-y_2)}{2!}D_x^2D_y$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})(y-y_2)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(x-x_{2n-2})^4}{4!}D_x^4+\frac{(y-y_2)^4}{4!}D_y^4+\frac{(x-x_{2n-2})^2(y-y_2)^2}{2!2!}D_x^2D_y^2$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})^3(y-y_2)}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_{2n-2})(y-y_2)^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(x-x_{2n-2})^5}{5!}D_x^5+\frac{(y-y_2)^5}{5!}D_y^5$$
$$+\cdots\Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(8)$$

بفرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f\left(x,y\right)$ موجودة عند النقطة $\left(x_{2n-2},y_2\right)$، وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة(8) في أعلاه في المنطقة $\left[x_{2n-2},x_{2n}\right]\times\left[y_0,y_2\right]$ نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\Big[\ 4h_1h_2+4h^2{}_1h_2D_x-4h_1h^2{}_2D_y+\frac{16}{3!}h^3{}_1h_2D_x^2+\frac{16}{3!}h_1h^3{}_2D_y^2-4h^2{}_1h^2{}_2D_xD_y+\frac{32}{4!}h^5D_x^3$$
$$-\frac{32}{4!}h_1h^4D_y^3-\frac{8}{3!}h^3{}_1h^2{}_2D_x^2D_y+\frac{8}{3!}h^2{}_1h^3{}_2D_xD_y^2+\frac{64}{5!}h^5{}_1h_2\ D_x^4+\frac{64}{5!}h_1h_2{}^5D_y^4+\frac{64}{36}h^3{}_1h^3{}_2D_x^2D_y^2$$
$$-\frac{32}{4!}h^4{}_1h_2{}^3D_x^3D_y-\frac{32}{4!}h^4{}_1h^2{}_2D_xD_y^3+\frac{128}{6!}h^6{}_1h_2\ D_x^5-\frac{128}{6!}h\ {}_1h^6{}_2D_y^5+\cdots\ \Big]f\left(x_{2n-2},y_2\right)\quad(9)$$

وعند التعويض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ y_0 في الصيغة (8) نحصل عل

$$f(x_{2n-2},y_0)=\Big[\ 1-2h_2D_y+2h_2{}^2D_y^2-\frac{8}{3!}h_2{}^3D_y^3+\frac{16}{4!}h_2{}^4D_y^4-\frac{32}{5!}h_2{}^5D_y^5+...\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(10)$$

وكذلك عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_2 في الصيغة (8) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_2)=\Big[\ 1+2h_1D_x+2h_1{}^2D_x^2+\frac{8}{3!}h_1{}^3D_x^3+\frac{16}{4!}h_1{}^4D_x^4+\frac{32}{5!}h_1{}^5D_x^5+...\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(11)$$

وأيضا عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_0 في الصيغة (8)نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_0)=\Big[\ 1+2h_1D_x-2h_2D_y+2h_1{}^2D_x^2+2h_2{}^2D_y^2-4h^2D_xD_y+\frac{8}{3!}h^3D_x^3-\frac{8}{3!}h_2{}^3D_y^3$$
$$-4h^2{}_1h_2D_x^2D_y+4h\ {}_1h^2{}_2D_xD_y^2+\frac{16}{4!}h_1{}^4D_x^4+\frac{16}{4!}h_2{}^4D_y^4+4h^2{}_1h^2{}_2D_x^2D_y^2-\frac{16}{3!}h^3{}_1h_2D_x^3D_y$$
$$-\frac{16}{3!}h_1h_2{}^3D_xD_y^3+\frac{32}{5!}h_1{}^5D_x^5-\frac{32}{5!}h_2{}^5D_y^5-\frac{32}{4!}h^4{}_1h_2D_x^4D_y+\frac{32}{4!}h\ {}_1h_2{}^4D_xD_y^4+...\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(12)$$

ثم نعوض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ y_2 في الصيغة (8) نحصل على :-

$$f(x_{2n-2},y_0+h_2)=\Big[\ 1-h_2D_y+\frac{1}{2!}h_2{}^2D_y^2-\frac{1}{3!}h_2{}^3D_y^3+\frac{1}{4!}h_2{}^4D_y^4-\frac{1}{5!}h_2{}^4D_y^5+...\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)$$

(13)

وبالمثل نعوض عن x بـ $x_{2n-2}+h_1$ وعن y بـ y_0+h_2 في الصيغة (8) نحصل على

$$f(x_{2n-2}+h_1,y_0+h_2)=\Big[\ 1+h_1D_x-h_2D_y+\frac{1}{2!}h_2{}^2D_x^2+\frac{1}{2!}h^2D_y^2-h_1h_2D_xD_y+\frac{1}{3!}h_2{}^3D_x^3$$
$$-\frac{1}{3!}h_2{}^3D_y^3-\frac{1}{2!}h_1{}^2h_2D_x^2D_y+\frac{1}{2!}h_1h^2{}_2D_xD_y^2+\frac{1}{4!}h_1{}^4D_x^4+\frac{1}{4!}h_2{}^4D_y^4+\frac{1}{4}h^2{}_1h^2{}_2D_x^2D_y^2$$
$$+\frac{1}{3!}h^3{}_1h_2D_x^3D_y-\frac{1}{3!}h_1h^3{}_2D_xD_y^3+\frac{1}{5!}h_1{}^5D_x^5-\frac{1}{5!}h_2{}^5D_y^5-\frac{1}{4!}h^4{}_1h_2D_x^4D_y+\frac{1}{4!}h_1h^4{}_2D_xD_y^4$$
$$+...\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(14)$$

الان نعوض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_0+h_2 في الصيغة (8) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_0+h_2)=\Big[\ 1+2h_1D_x-h_2D_y+2h_1^{\,2}D_x^2+\frac{1}{2!}h_2^{\,2}D_y^2-2h_1h_2D_xD_y+\frac{8}{3!}h_1^{\,3}D_x^3-\frac{1}{3!}h_2^{\,3}D_y^3$$
$$-2h^2{}_1h_2D_x^2D_y+h_1h^2{}_2D_xD_y^2+\frac{16}{4!}h_1^{\,4}D_x^4+\frac{1}{4!}h_2^{\,4}D_y^4+h^2{}_1h^2{}_2D_x^2D_y^2-\frac{8}{3!}h_1h^3{}_2D_x^3D_y$$
$$-\frac{1}{3}h_1h^3{}_2D_xD_y^3+\frac{32}{5!}h_1^{\,5}D_x^5-\frac{1}{5!}h_2^{\,5}D_y^5+\cdots\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(15)$$

كذلك عن x بـ $x_{2n-2}+h_1$ وعن y بـ y_2 في الصيغة (8) نحصل على :

$$f(x_{2n-2}+h_1,y_2)=\Big[\ 1+h_1D_x+\frac{1}{2!}h_1^{\,2}D_x^2+\frac{1}{3!}h_1^{\,3}D_x^3+\frac{1}{4!}h_1^{\,4}D_x^4+\frac{1}{5!}h_1^{\,5}D_x^5+\cdots\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(16)$$

وبالتالي نعوض عن x بـ $x_{2n-2}+h_1$ وعن y بـ y_0 في الصيغة (8) نحصل على:-

$$f(x_{2n-2}+h_1,y_0)=\Big[\ 1+h_1D_x-2h_{12}D_y+\frac{1}{2!}h_1^{\,2}D_x^2+2h_2^{\,2}D_y^2-2h_1h_2D_xD_y+\frac{1}{3!}h_1^{\,3}D_x^3$$
$$-\frac{8}{3!}h_2^{\,3}D_y^3-h^2{}_1h_2D_x^2D_y+2h_1h^2{}_2D_xD_y^2+\frac{1}{4!}h_1^{\,4}D_x^4+\frac{16}{4!}h_2^{\,2}D_y^4+$$
$$h_1^{\,2}h^2{}_2D_x^2D_y^2-\frac{2}{3!}h_1^{\,3}h_2D_x^3D_y-\frac{8}{3!}h_1h^3{}_2D_xD_y^3+\frac{1}{5!}h_1^{\,5}D_x^5-\frac{32}{5!}h_2^{\,5}D_y^5-\ldots\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(17)$$

و من الصيغ(8), (9) - (17) نحصل على الاتي :-

$$I_3=\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}[f(x_{2n-2},y_0)+f(x_{2n-2},y_2)+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_2)$$
$$+4\big(f(x_{2n-2}+h_1,y_0)+f(x_{2n-2}+h_1,y_2)+f(x_{2n-2},y_0+h_2)+f(x_{2n},y_0+h_2)$$
$$+4f(x_{2n-2}+h_1,y_0+h_2))]+$$
$$\Big[-1/45(h_1^5h_2D_x^4+h_1h_2^5D_y^4)+1/45(h_1^6h_2D_x^5-h_1h_2^6D_y^5-h_1^5h_2^2D_x^4D_y+h_1^2h_2D_x^5D_y^4+\ldots)$$
$$+\cdots\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)\qquad(18)$$

$$I_4=\int_{y_2}^{y_{2m}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}f(x,y)dxdy=\sum_{l=1}^{n-1}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\sum_{l=1}^{n-1}\big[f(x_{2n-2},y_{2l})$$
$$+f(x_{2n-2},y_{2l+2})+f(x_{2n},y_{2l})+f(x_{2n},y_{2l+2})+4\big(f(x_{2n-2},y_{2l}+h_2)$$
$$+f(x_{2n}-h_1,y_{2l})+4f(x_{2n}-h_1,y_{2l}+h_2)+f(x_{2n}-h_1,y_{2l+2})+f(x_{2n},y_{2l}+h_2)\big)\big]$$
$$+c_1h_1^{\,4}+c_2h_2^{\,4}+c_3h_1^{\,6}+\cdots\qquad(19)$$

حيث $c_i,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط و $i=1,2,\ldots$

وبجمع الصيغ (7) ,(6) ,(18) و(19) نحصل على :-

$$I=\int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Bigg[\ f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2m})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2m})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_{(2i-1)},y_0)+f(x_{(2i-1)},y_{2m})\Big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f(x_{2i},y_0)+f(x_{2i},y_{2m})\Big)$$
$$+4\sum_{j=1}^{n}\Big(\ f(x_0,y_{(2j-1)})+(x_{2n},y_{(2j-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\ \Big)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\ f(x_0,y_{2j})+f(x_{2n},y_{2j})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\Big)\Bigg]+$$
$$\Big[-1/45(h_1^5h_2D_x^4+h_1h_2^5D_y^4)-1/45(h_1^6h_2D_x^5-h_1h_2^6D_y^5-h_1^5h^2{}_2D_x^4D_y+h_1^2h_2D_x^5D_y^4+\ldots)$$
$$+\cdots\ \Big]f(x_{2n-2},y_2)+A_1h_1^4+A_2h_2^4+A_3h_1^6+A_4h_2^6+\cdots$$

...(20)

حيث ان $A_1, A_2,\ldots$ ثوابت تعتمدعلى المشتقات الجزئية للدالة $f\ (x\,,y\,)$ فقط .

الحالة الثانية

(مبرهنة2) لتكن الدالة $f\ (x\,,y\,)$ مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2m}]$ وغيرقابلة للاشتقاق عند النقطة $(x_0,y_{2m})=(x\,,y\,)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الآتية :

$$I=\int_{y_0}^{y_{2m}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{9}\Bigg[\ f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2m})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2m})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\Big(f(x_{(2i-1)},y_0)+f(x_{(2i-1)},y_{2m})\Big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\Big(f(x_{2i},y_0)+f(x_{2i},y_{2m})\Big)$$
$$+4\sum_{j=1}^{m}\Big(\ f(x_0,y_{(2j-1)})+f(x_{2n},y_{(2j-1)})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\ \Big)$$
$$+2\sum_{j=1}^{m-1}\Big(\ f(x_0,y_{2j})+f(x_{2n},y_{2j})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{2j})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\Big)\Bigg]$$
$$+\Big[-1/45(h^5{}_1h_2D_x^4+h_1h^5{}_2D_y^4)+1/45(h^6{}_1h_2D_x^5-h_1h^6{}_2D_y^5-h^5{}_1h^2{}_2D_x^4D_y+h^2{}_1h_2D_x^5D_y^4+\ldots)\ \Big]f(x_{2,}y_{2m-2})$$
$$+B_1h_1{}^4+B_2h_2{}^4+B_3h_1{}^6+\cdots$$

البرهان: نتبع نفس أسلوب المبرهنة السابقة .

4-الأمثلة

1- $I=-\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+y}\ dxdy$ القيمة التحليلية لهذا التكامل هي (0.48758056659899) مقربة الى أربع عشرة مرتبة عشرية .

2- $I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\sqrt{x^4+y^4}\ dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية.

3- $I=-\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$ القيمة التحليلية لهذا التكامل هي (0.43931732073626) مقربة الى أربع عشرة مرتبة عشرية .

4-النتائج

1- إن مكامل التكامل $I=-\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+y}\,dxdy$ مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئيةفي النقطة $(x,y)=(0,0)$, ونوع الاعتلال هنا جذري, و القيمة التحليلية لهذا التكامل هي (0.487580566598) مقربة إلى اثنتا عشرة مرتبة عشرية وبحدود تصحيح هي (...,2,2.5,3.5,4,4.5,5,5.5,6,6.5)حسب المبرهنه(1) . وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل(مقربة إلى اثنتا عشرة مرتبة بعد الفاصلة) وقيمته في برنامج الماتلاب نلاحظ عند تطبيق القاعدة ($SS(h_1,h_2)$) تم الحصول على ثمان مراتب عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $n=2m=512$ مقارنة مع القيمة التحليلية للتكامل , ولكن بعد استخدام تعجيل رومبرك اي عند تطبيق طريقة ($ROSS(h_1,h_2)$) بالاعتماد على حدود التصحيح هذه تحسنت النتيجة حيث تم الحصول على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية مقربة لاثنا عشرة مرتبة عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $m=512, n=256$ ، كما مبين في الجدول رقم(1).علماً أنّ الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (1.908 ثانية).

2- إن مكامل التكامل $I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$ مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y)=(0,0)$, ونوع الاعتلال هنا جذري, والتكامل هذا غير معروف القيمة التحليلية .
وحسب المبرهنة(2)وجدت أنّ حدود التصحيح هي : (k=4,6,8,..) وعند تطبيق القاعدة ($SS(h_1,h_2)$) بالاعتماد على حدود التصحيح هذه وعند استخدام برنامج الماتلاب تم الحصول على دقة لغاية(14) مرتبة عشرية بعد الفاصلة عندما يكون $n=64, m=128$, ولبيان كيفية الحصول على هذه الدقة نلاحظ من الجدول أن العدد نفسه تكرر في الأعمدة الثلاثة الأخيرة أي أن القيمة تكررت عندما كانت (k=4,6,8,10,12) باستخدام الطريقة ($ROSS(h_1,h_2)$) هذا يعني أن القيمة التحليلية التقريبية لهذا التكامل هي(0.54471470661241)أي أنها صحيحة على الأقل لأربع عشرة مرتبة عشرية حتى وإن كان التكامل غير معروف القيمة التحليلية كما مبين في الجدول رقم(2).علماً أنّ الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (580. ثانية)

3- إن مكامل التكامل $I=-\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة $(x,y)=(0,0)$, ونوع الاعتلال هنا جذري, و القيمة التحليلية لهذا التكامل هي (0.43931732073) مقربة إلى احد عشرة مرتبة عشرية .
وعند تطبيق المبرهنة(1) وجدت أنّ حدود التصحيح هي : (k=2,4,4,6,8,10,12) وعند تطبيق القاعدة ($SS(h_1,h_2)$) تم الحصول على خمس مراتب عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $n=2m=256$ مقارنة مع القيمة التحليلية للتكامل , ولكن بعد استخدام تعجيل رومبركاي عند تطبيق طريقة ($ROSS(h_1,h_2)$) بالاعتماد على حدود التصحيح هذه تحسنت النتيجة حيث تم الحصول على قيمة مطابقة مقربة لاثنا عشرة مرتبة عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $n=2m=256$ ، كما مبين في الجدول رقم(3) . علماً أنّ الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (0.718 ثانية).
ورغم ان هذه النتيجة تعدّ جيدة لكن قمنا باقتراح تكرار في حدود التصحيح (مرة بسبب الاعتلال ومرة بسبب الاستمرارية) وبالذات (K=4) مرتين بغية الحصول على نتائج أفضل لاحظنا أنّ هذا الاقتراح قد نجح وعند تطبيق القاعدة ($SS(h_1,h_2)$) حصلنا على تسع مراتب عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $n=2m=256$ مقارنة مع القيمة التحليلية للتكامل و, بعد استخدام تعجيل رومبركاي عند تطبيق طريقة ($ROSS(h_1,h_2)$) بالاعتماد على حدود التصحيح الجديدة حصلنا على اثنتا عشرة مرتبة عشرية صحيحة بعد الفاصلة عندما يكون $n=2m=256$ كما مبين في الجدول (3).
علماً أنّ الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (0.500 ثانية).

الجداول

n	m	SIM	K=2.5	K=3.5	K=4	K=4.5	K=5.5	K=6	K=6.5
2	4	0.49978285728354							
4	8	0.48744461443483	0.48479513429488						
8	16	0.48756903354202	0.48759575095694	0.48786729408445					
16	32	0.48757931731663	0.48758152562594	0.48758014636154	0.48756100318001				
32	64	0.48758039537659	0.48758062687620	0.48758053973493	0.48758056595982	0.48758087648013			
64	128	0.48758053949880	0.48758057044721	0.48758056497595	0.48758056665868	0.48758056666977	0.48758056545483		
128	256	0.48758056201095	0.48758056684515	0.48758056649590	0.48758056659723	0.48758056659626	0.48758056659597	0.48758056659708	
256	512	0.48758056580083	0.48758056661466	0.48758056659231	0.48758056659874	0.48758056659876	0.48758056659877	0.48758056659878	0.48758056659878

$$I = -\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2 + y}\; dxdy \approx 0.487580566598$$

جدول رقم (1)

n	m	ss	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12
2	4	0.54161746355696					
4	8	0.54454337324810	0.54473843389418				
8	16	0.54470401688243	0.54471472645805	0.54471435014954			
16	32	0.54471403947477	0.54471470764759	0.54471470734901	0.54471470874979		
32	64	0.54471466493206	0.54471470662922	0.54471470661305	0.54471470661017	0.54471470660807	
64	128	0.54471470400764	0.54471470661268	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241

$$I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4 + y^4}\;\; dxdy$$

جدول رقم (2)

N	m	ss	k=2	k=4	k=4
2	4	0.451682232968			
4	8	0.439172492585	0.435002579124		
8	16	0.439305397576	0.439349699240	0.439639507247	
16	32	0.439316398565	0.439320065562	0.439318089984	
32	64	0.439317252073	0.439317536575	0.439317367976	0.439317319842
64	128	0.439317315756	0.439317336984	0.439317323678	0.439317320725
128	256	0.439317320382	0.439317321924	0.439317320920	0.439317320736

k=6	k=8	k=10
0.439317647742		
0.439317320739	0.439317319456	
0.439317320736	0.439317320736	0.439317320738

جدول رقم (3)

$$I=-\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0} x\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy \approx 0.43931732073$$

5-المناقشة والاستنتاج

يتضح من خلال نتائج وجداول هذاالبحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير إحدى نهايتي منطقة التكامل بقاعدة سمبسون على كلا البعدين x,y وعندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الداخلي مساوية لنصف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الخارجي قد أعطت هذه القاعدة ($SS(h_1,h_2)$) قيما" صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات وباستخدام عدد من الفترات الجزئية من دون استخدام تعجيل رومبرك عليها ,ففي التكامل الأول حصلت على ثمان مراتب عشرية عند $n=2m=512$ وفي التكامل الثاني حصلت على قيمة تقريبية مقربة لثمان مراتب عشرية عند $n=2m=128$ وفي التكامل الثالث حصلت على قيمة تقريبية مقربة لتسع مراتب عشرية عند $n=2m=256$ وعند استخدام الطريقة $ROSS(h_1,h_2)$ أي تعجيل رومبرك تم الحصول على قيم مطابقة للقيم التحليلية باستخدام برنامج الماثلاب

ففي التكامل القيمة التقريبية مقربة لاثنتا عشرة مرتبة عشرية عند $n=2m=512$ وفي التكامل الثاني على قيمة تقريبية لأربع عشرة مرتبة عشرية عند $n=2m=128$ وفي التكامل الثالث على قيمة تقريبية مقربة لإحدى عشرة مرتبة عشرية عند $n=2m=256$.

وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة $ROSS(h_1,h_2)$ في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير إحدى نهايتي منطقة التكامل عندما تكون الفترات الجزئية على البعد x مساوية لنصف الفترات الجزئية على البعد y.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp.87-93,1967.

[2] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- andTwo-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .

[3] Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7, No.3 , pp. 21-28 , 2002.

[4] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Publishing Company, chapter 5 , 1975 .

[5] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972.

[6] Sastry S.S. , "Introductory Methods of Numerical Analysis" , New Delhi , 2008 .

[7]الشريفي, فؤاد حمزة عبد ,"اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون لحساب التكاملات الثنائية عددياً وصيغ الخطأ لها وتحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية", رسالة ماجستير مقدمة إلىجامعة الكوفة,2012.

[8]حسن ,زينب فليح حسن, " حساب التكاملات الثنائية والثلاثية عددياً عندما تكون أعداد الفترات الجزئية على الأبعاد غير متساوية باستعمال قاعدة النقطة الوسطى مع طريقة تعجيلية", رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2015.

[9]عكار, بتول حاتم, "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية ",رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2010.

[10]فرانك آيرز, " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل ", دار ماكجروهيل للنشر, الدار الدولية للنشر والتوزيع, ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين.

[11]فاضل ,رؤى عزيز فاضل , " حساب التكاملات الثنائية والثلاثية عدديا عندما تكون أعد اد الفترات الجزئيه على الابعاد غير متساويه باستخدام قاعدة سمبسون مع طريقة تعجيلية", رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2015.