Al Kut Journal of Economics and Administrative Sciences /ISSN: 1999 -558X /ISSN Online 2707-4560/ Vol (15) Issue: 49-2023 (December)

AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

توزيع رايلي باريتو ، الخصائص والتقدير

آيات حبيب عبدالحسين[1]　　　أ . د عباس لفته كنيهر[2]

ayatabdulhussein523@uowasit.edu.iq　　　alafta@uowasit.edu.iq

جامعة واسط – كُلّية الإدارة والاقتصاد

https://doi.org/10.29124/kjeas.1549.1

المستخلص

في هذا البحث تَمّ تقديم توزيع رايلي باريتو، وهو توسيع لتوزيع رايلي ،إذْ تَمّ دراسة العديد من الخصائص الإحصائية مثل: العزوم ،الوسط الحسابي ، التباين ،الوسيط ، معامل الالتواء ، معامل التفرطح ، فضلاً عن ذلك تَمّ تقدير مَعْلَمْات التوزيع الجديد باستعمال طريقة الإمكان الأعظم . وكذلك تَمّ تقديم دراسة محاكاة لبيان مدى كفاءة طريقة الإمكان الأعظم . وكان من بينَ أهمّ الاستنتاجات كفاءة طريقة الإمكان الأعظم في تقدير معالم التوزيع الجديد .

Abstract

In this paper , the Rayleigh-Pareto distribution was presented, which is an expansion of the Rayleigh distribution. Many statistical properties were studied, such as moments, mean, variance, median, skewness coefficient, kurtosis coefficient.

In addition, the parameters of the new distribution were estimated using maximum likelihood method .

Simulation experiment showed the efficiency of maximum likelihood method . Among the most important conclusions was the efficiency of the maximum likelihood method in estimating the parameters of the new distribution .

1- المقدمة

تستعمل التوزيعات الاحتَمّالية لغرض التعبير عن مجتَمّعات إحصائية، و التي بدورها تعتَمّد على معالم مجتَمّع تحت الدراسة ،إذْ إنّ عملية تقدير هذه المعالم يكون أساساً في الاستدلال الإحصائي و توجد طرائق احصائية عديدة لتقدير هذه المعالم مثل : طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة المربّعات الصغرى ، طريقة العزوم ، طريقة النسب المئوية ... وغيرها من الطرائق الإحصائية الأخرى . تَمّ اشتقاق صيغة التوزيع الجديد رايلي باريتو ، وايضا تقديم أهمّ الخصائص الإحصائية للتوزيع وأهمّ الدوال : كدالة الكثافة الاحتَمّالية ، والدالة التجميعية ،والدالة المولِّدة للعزوم ،وكذلك تقدير معالم التوزيع باستعمال طريقة الإمكان الأعظم .

في عام 2008 قام Alfred Akinsete & et.al.[3] بدراسة توزيع بيتا باريتو بأربع مَعْلَمْات إذْ تَمّتْ مناقشة الخصائص للتوزيع وقد وجدوا أنّ التوزيع له معدّل متناقص الخطورة، وقد قدّموا بعض من خصائص التوزيع مثل: المتوسط، والانحراف المتوسط ،والتباين ،والانحراف، و التفرطح، والانتروبيا ، ايضاً اقترح الباحثون طريقة الإمكان الأعظم لتقدير مَعْلَمْات التوزيع، وايضاً طبَّقوا التوزيع على مجموعتين من بيانات الفيضانات .

في عام 2013 قدَّم الباحثان: كريمة عبد الكاظم ،و محمد عبد الحسين بوشي[7] توزيعا جديدا يعتَمّد على التوزيع الأُسي و توزيع باريتو، وقدّما بعض الخصائص مثل: الدالة المولدة للعزوم ، المتوسّط ، المنوال ، الوسيط ، التباين ، العزم الرائي حول المتوسّط ، العزم الرائي حول نقطة الأصل ، المعّولية، دالّة المخاطرة ، معامل الاختلاف ، معامل الالتواء ،و التفرطح وايضاً قَدّرا معالم التوزيع باستعمال طريقة الإمكان الأعظم . في عام 2020 الباحثتان Reyah Zeadan Khalaf and Kareema Abad Al-Kadim [8] قدّمتا توزيع جديد ،وهو توزيع ريلي باريتو المقطوع وايضاُ قدمتا بعض الدوال المفيدة وايضاً قامتا بتقديم بعض الخصائص الرياضية والإحصائية مثل: دالّة الكثافة الاحتَمّالية، والدالة التجميعية ودالة البقاء ودالة المخاطرة والوسط الحسابي والوسيط والمنوال وكذلك معامل الاختلاف ومعامل الالتواء والتفلطح والإحصاءات المرتبة وكذلك استعملتا بعضاً من طرائق التقدير لتقدير مَعْلَمْات التوزيع الجديد .

في عام 2012 الباحثون Ayman ALzaatreh & et.al. [4] قاموا بتعريف توزيع جديد وهو Gamma-pareto إذْ تَمّ دراسة التوزيع المقترح ،وتقديم بعض الخواص المختلفة له . واقترحوا طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المَعْلَمْات، وايضاً طّبقوا التوزيع على ثلاث مجموعات من البيانات الحقيقية.

2- مشكلة البحث

نظرا لتنّوع وتعقيد البيانات وطرائق الحصول عليها فإنّ ذلك يتطلّب إيجاد توزيعات معلمية جديدة تمكّننا من وصف أفضل للظواهر أو التجارب المدروسة ،التي تمثّلها تلك البيانات. لذلك فإنّ تقديم مثل هذه التوزيعات يكون من الأهمية في التعامل مع المشاكل الإحصائية عندما يرغب الباحث في الحصول على دقّة أكثر في تشخيص توزيع تلك البيانات في المستقبل .

3- هدف البحث

يهدف البحث إلى تقديم توزيع جديد ضمن عائلة رايلي من خلال استبدال المتغيّر الذي يتّبع توزيع رايلي ذو المَعْلَمة الواحدة بدوال التعميم : $\frac{G(z,\varepsilon)}{\bar{G}(z,\varepsilon)}$ ودالة $G(z,\varepsilon)$ ستعتَمّد هنا على دالة التوزيع التراكمية لتوزيع باريتو لغرض بناء نموذجا جديدا لتوزيع رايلي باريتو كتعميم جديد لتوزيع رايلي : ومَنْ ثَمّ اشتقاق بعض الخصائص المهمّة لهذا التوزيع وتقدير معالم النموذج باستعمال المحاكاة.

4- توزيع رايلي باريتو

يُعدّ توزيع رايلي من التوزيعات المهّمة وهو حالة خاصّة من توزيع **Weibull** ، سُمّي بهذا الاسم نسبة للعالم الانكليزي : **Lord Rayleigh** [2]، و توزيع رايلي هو أحد أهمّ نماذج الفشل الشائعة في المعولية ،ويقدّم نموذجا أكثر مرونة و موثوقية للبيانات في مجال التطبيق. توزيع رايلي له العديد من الخصائص المرغوبة، أمّا توزيع باريتو وهو أحد التوزيعات المهّمة للنمذجة والتنبُؤ الذي يستعمل بشكل واسع في مجالات الاقتصاد ومختلف مجالات العلوم منها الفيزياء والجيولوجيا ، وينسب هذا التوزيع للعالم الايطالي Fleverdu Pareto .[1]

دالّة الكثافة الاحتَمّالية لتوزيع رايلي باريتو هي :-

$$f(z;\alpha,\theta,m)_{R.G}=\frac{\theta z^{\theta-1}}{\alpha^2 m^\theta}\left(\left(\frac{z}{m}\right)^\theta-1\right)e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\left(\frac{z}{m}\right)^\theta-1\right)^2}\dots \qquad 1$$

إذْ أنّ : $\theta>0 \quad m>0 \quad \alpha>0 \quad z>m$

أمّا الدالة التجميعية لتوزيع رايلي باريتو

$$F(z;\alpha,\theta,m)_{R.G}=1-e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\left(\frac{z}{m}\right)^\theta-1\right)^2}\quad\dots \qquad 2$$

إذْ أنّ : $z>m \quad \alpha>0 \quad m>0 \quad \theta>0$

سَيتَمّ الاعتمّاد على تقديم شكل معمم لتوزيع رايلي باستعمال التوسعة التي قدّمها الباحثون Hanan Haj Ahmad,& et .al. الصيغة العمومية لتوزيع رايلي[5] كالآتي:-

$$f(z;\alpha,\varepsilon)_{R.G}=\frac{1}{\alpha^2}\frac{G(z;\theta,m)}{\bar{G}^3(z;\theta,m)}g(z;\theta,m)\ e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{G(z;\theta,m)}{\bar{G}(z;\theta,m)}\right)^2}\dots \qquad 3$$

وباستعمال متسلسلة القوى وتوسعة ثنائي الحدين

$$\frac{1}{\bar{G}^3(z;\theta,m)}=\frac{1}{(1-G(z;\theta,m))^3}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma k+3}{k!\,\Gamma 3}G^k(z;\theta,m)\dots \qquad 4$$

$$e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{G(z;\theta,m)}{\overline{G}(z;\theta,m)}\right)^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j(\frac{1}{2\alpha^2})^j}{j!} \left(\frac{G(z;\theta,m)}{\overline{G}(z;\theta,m)}\right)^{2j} \ldots \qquad 5$$

$$\frac{1}{\overline{G}^{2j}(z;\theta,m)} = \frac{1}{\left(1-G(z;\theta,m)\right)^{2j}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma i+2j}{i!\,\Gamma 2j} G^i(z;\theta,m) \ldots \qquad 6$$

وبتعويض المعادلات 4,5,6 في 3 نحصل على

$$f(z;\alpha,\varepsilon)_{R.G} = g(z;\theta,m) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)(-1)^j(\Gamma i+2j)}{j!\,i!\,\Gamma 2j(2\alpha^2)^{j+1}} G^{2j+k+i+1}(z;\theta,m) \ \ldots \qquad 7$$

إذْ أنّ $g(z;\theta,m) = \frac{\theta m^\theta}{z^{\theta+1}}$ وهـي دالــة الكثافــة الاحتَمّاليــة لتوزيــع بــاريتو أمّــا الدالــة التجميعيــة لتوزيــع بــاريتو تعطى كالآتي $G(z;\theta,m) = 1-(\frac{m}{z})^\theta$ ويمكن التعويض عنهما في معادلة 7 للحصول على :-

$$f(z;\alpha,\varepsilon)_{R.G} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} P_{kji}(-1)^n C_n^{2j+k+i+1} \ \frac{\theta m^{\theta(n+1)}}{z^{\theta n+\theta+1}} \ldots \qquad 8$$

5- خصائص توزيع رايلي باريتو

لكُلّ توزيع معلمي توجد هناك عدد من الخصائص المهّمة وسَيتّمّ إيجاد صيغة كُلّ منهم وفقاً للآتي **:-**

أولاً العزوم :- يعرف العزم الرائي وفقاً للصيغة الآتية

$$\acute{\mu}_r = E(z^r) = \int_{-\infty}^{\infty} z^r f(z) \qquad dz \qquad r=1,2,3\ldots$$

وبالتعويض عن دالّة كثافة الاحتمال التي في معادلة 8

$$E(z^r) = A_{kjin} \int_m^{\infty} z^r \, z^{-\theta n-\theta-1} \qquad dz$$

$$where\ A_{kjin} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{2j+i+k+1}(-1)^n p_{jik}\theta m^{\theta(n+1)}$$

$$E(z^r) = A_{kjin} \frac{m^{-(\theta n+\theta-r)}}{\theta n+\theta-r} \quad \ldots \qquad 9$$

لحساب الوسط الحسابي والتباين يمكن التعويض عن $r=1,2$ في معادلة 9

$$mean = \mu_{1=} A_{kjin} \frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}$$

$$Variance = A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-2)}}{\theta n+\theta-2} - A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1)}\right)^2\right)$$

ثانياً معامل الالتواء والتفرطح :

معامل الاتواء يعطى بالصيغة الآتية:

$$SKEWNESS=\frac{A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-3)}}{\theta n+\theta-3}-3\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}*A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-2)}}{\theta n+\theta-2}\right)+2\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}\right)^{3}}{\left(A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-2)}}{\theta n+\theta-2}-A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}\right)^{2}\right)\right)^{\frac{3}{2}}}$$

معامل التفرطح يعطى بالصيغة الآتية:

Kurtosis=

$$\frac{A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-4)}}{\theta n+\theta-4}-4\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}*\ A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-3)}}{\theta n+\theta-3}\right)+6\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}\right)^{2}\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-2)}}{\theta n+\theta-2}\right)-3\left(A_{kjin}\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}\right)^{4}}{\left(A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-2)}}{\theta n+\theta-2}-A_{kjin}\left(\frac{m^{-(\theta n+\theta-1)}}{\theta n+\theta-1}\right)^{2}\right)\right)^{2}}$$

ثالثاً الدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة :-

الدالة المولّدة للعزوم تعطى بالصيغة الآتية:

$$M_z(t)=E(e^{zt})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{2j+i+k+1}(-1)^n p_{jik}\theta m^{\theta(n+1)}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{t^x}{x!}\left[\frac{m^{-(\theta n+\theta-x)}}{\theta n+\theta-x}\right]$$

الدالة المميزة تعطى بالصيغة الآتية

$$\emptyset_z(t)=E(e^{izt})$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{2j+i+k+1}(-1)^n p_{jik}\theta m^{\theta(n+1)}\quad\sum_{c=0}^{\infty}\frac{it^c}{c!}\left[\frac{m^{-(\theta n+\theta-c)}}{\theta n+\theta-c}\right]$$

رابعاً الوسيط :-

وسيط التوزيع يحسب وفقاً للصيغة الآتية

$$z=m\sqrt[\theta]{1+\ \alpha\ \sqrt{-2Log\frac{1}{2}}}$$

6- طريقة الإمكان الأعظم

وتستعمل طريقة الإمكان الأعظم في الإحصائيات الاستدلالية لأنّها تحتوي على العديد من الخصائص أهَمها الثبات والاتّساق وتعتمد هذه الطريقة بشكل أساس على تعظيم الدالة الاحتَمّالية ،وتُعدّ طريقة بسيطة نسبياً لبناء مقدّر لمَعْلَمة غير معروفة.

افترض أنّ $z_1, z_2 \dots, z_n$ متغيّرات عشوائية تتّوزع توزيع رايلي باريتو بثلاث مَعْلمات $\theta, \alpha, m,$ إذْ أنّ المقدر هو الذي يجعل داله الإمكان الأعظم في نهايتها العظمى ويتّمّ الحصول عليه من خلال اشتقاق دالة الإمكان الأعظم بالنسبة لمعالم التوزيع الثلاث بعد أخذ اللوغاريتم لها ومساواتها للصفر، حيث تعطى دالة الإمكان الأعظم [6]:-

$$L=\prod_{i=1}^{n} f(z;\alpha,\theta,m)$$

$$L=\frac{\theta^n \prod_{i=1}^{n} z_i^{\theta-1}}{\alpha^{2n} m^{\theta n}} \prod_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) e^{-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right)^2}$$

وبأخذ اللوغاريتّم لطرفي الدالة تصبح كالآتي

$$\text{Log } L = n\text{Log}\theta - 2n\text{Log}\alpha - \theta n\text{Log}m + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\text{Log}z_i + \sum_{i=1}^{n}\text{Log}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) - \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right)^2$$

ويمكن إيجاد مقدّرات المعالم من خلال تعظيم دالّة الاحتمالية بالنسبة للمَعلمْات إذْ يتّمّ حسابها بالحصول على مشتّقة دالّة الإمكان الأعظم ونساويها للصفر :

$$\frac{\partial \text{LogL}}{\partial m} = \left[-\frac{\theta n}{m} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{-\theta z_i^{\theta} m^{\theta-1}}{m^{2\theta}}}{\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1} - \frac{2}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) * \frac{-z_i^{\theta}\theta m^{\theta-1}}{m^{2\theta}} = 0\ \right] * \frac{m^{2\theta}}{\theta m^{\theta-1}}$$

$$0=-nm^{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^{\theta}}{\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) * z_i^{\theta} 0=-nm^{\theta} - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{m^{\theta}}-z_i^{-\theta}} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) * z_i^{\theta}$$

$$m^{\theta} = \frac{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{m^{\theta}}-z_i^{-\theta}} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right) * z_i^{\theta}}{n}$$

$$m=\left(\frac{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{m^{\theta}}-z_i^{-\theta}}+\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right)*z_i^{\theta}}{n}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial\alpha}=-\frac{2n}{\alpha}+\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((\frac{z_i}{m})^{\theta}-1\right)^2}{\alpha^3}=0$$

$$\frac{-2n\alpha^2+\sum_{i=1}^{n}\left((\frac{z_i}{m})^{\theta}-1\right)^2}{\alpha^3}=0$$

$$\hat{\alpha}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left((\frac{z_i}{m})^{\theta}-1\right)^2}{2n}}$$

$$\frac{\partial LogL}{\partial\theta}=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}Logz_i-nLogm+\sum_{i=1}^{n}\frac{(\frac{z_i}{m})^{\theta}Log\frac{z_i}{m}}{(\frac{z_i}{m})^{\theta}-1}-\frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{z_i}{m}\right)^{\theta}-1\right)*(\frac{z_i}{m})^{\theta}Log(\frac{z_i}{m})$$
$$=0$$

ولمّـا كُنّـا لا نسـتطيع إيجـاد مقـدّرات المعلمــة الأولــى mوالمعلمــة الثالثــة θ لـذلك نسـتعمل الطرائـق العدديــة لحـلّ المعادلة آنياً.

7- تجربة المحاكاة Simulation Experiment :

تَـمّ إجـراء دراســة المحاكــاة لاختبــار قــدرة تقــدير المَعلمْــات باســتعمال طريقــة الإمكــان الأعظــم إذْ تَــمّ افتــراض مجموعـة مـن القـيم لكُـل معلمـة مـن مَعُلَمْـات التوزيـع كمـا فـي جـدول (1) و احجـام عينـات مختلفـة (10,25,50,100) وثُمّ تَمّ حساب *MSE*.

نتائج طريقة الإمكان الأعظم :-

تَـمّ عـرض نتـائج طريقـة الإمكـان الأعظـم فـي الجـدول (1)واتّضـح مـن خـلال الجـدول أنّ قـيم المقـدرات جميعهـا للمعلمات جميعها هي الأقرب للقيم الحقيقية للمَعْلَمْات ولاسيّما عند زيادة حجم العيّنة .

الجدول (1) قيم مقّدرات الإمكان الأعظم

التجربة	PARAMETAR			n	ESTMATOR		
	A	θ	M		α	θ	M
1	0.5	1	2.5	10	0.5411571	1.121208	2.529796
				25	0.5058032	1.029355	2.519234
				50	0.5019	1.015229	2.509748
				100	0.5001304	1.005168	2.504365
2	1	0.5	1.5	10	1.052931	0.5435906	1.584502
				25	1.013581	0.5137854	1.52349
				50	1.002462	0.5048203	1.511897
				100	1.000448	0.5019101	1.506001
3	1	1	1	10	1.06681	1.100997	1.026557
				25	1.012312	1.028371	1.012244
				50	1.002115	1.011704	1.005981
				100	1.000693	1.005188	1.002723
4	0.7	0.6	0.5	10	0.7304871	0.6501772	0.5152357
				25	0.7063399	0.6144974	0.5057832
				50	0.7024711	0.6061688	0.5031299

				100	0.7002691	0.6023894	0.5014986
5	2	2.5	5	10	2.211267	2.776634	5.075061
				25	2.100326	2.610367	5.031742
				50	2.014932	2.547217	5.031048
				100	2.001864	2.518323	5.015128

متوسّط مربّعات الخطأ في مقّدرات الإمكان الأعظم :-

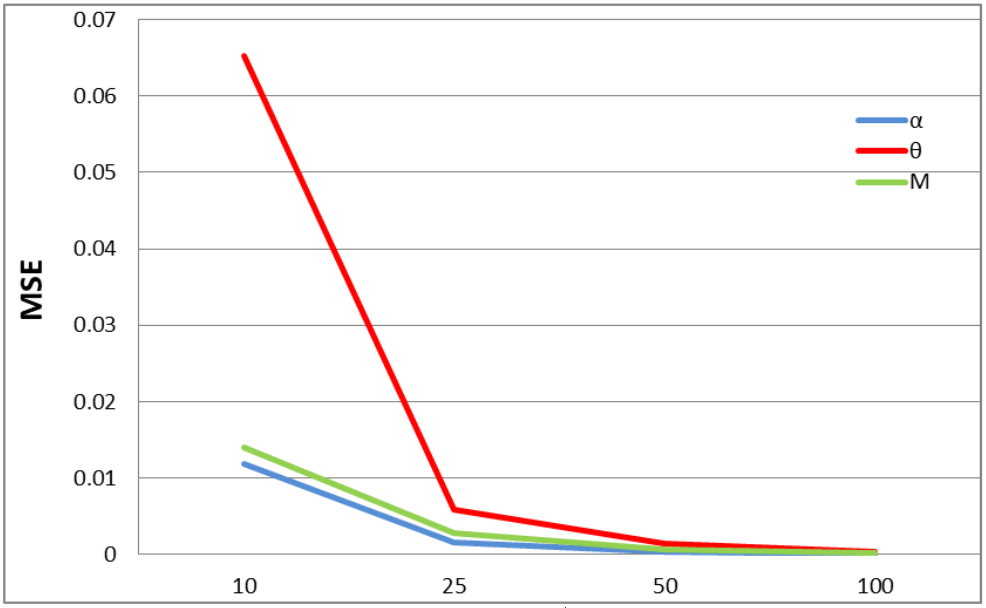
متوسّطات مربّعات الخطأ لتقديرات مربعات الخطأ لقيم الإمكان الأعظم عُرضتْ في الجدول (2) أحجام العيّنات كُلّها ولُكلّ قيمة مفترضة من قيم المعالم.

الجدول (2) يوضّح قيم متوسّط مربّعات الخطأ لمقّدرات مَعلَمْات الإمكان الأعظم

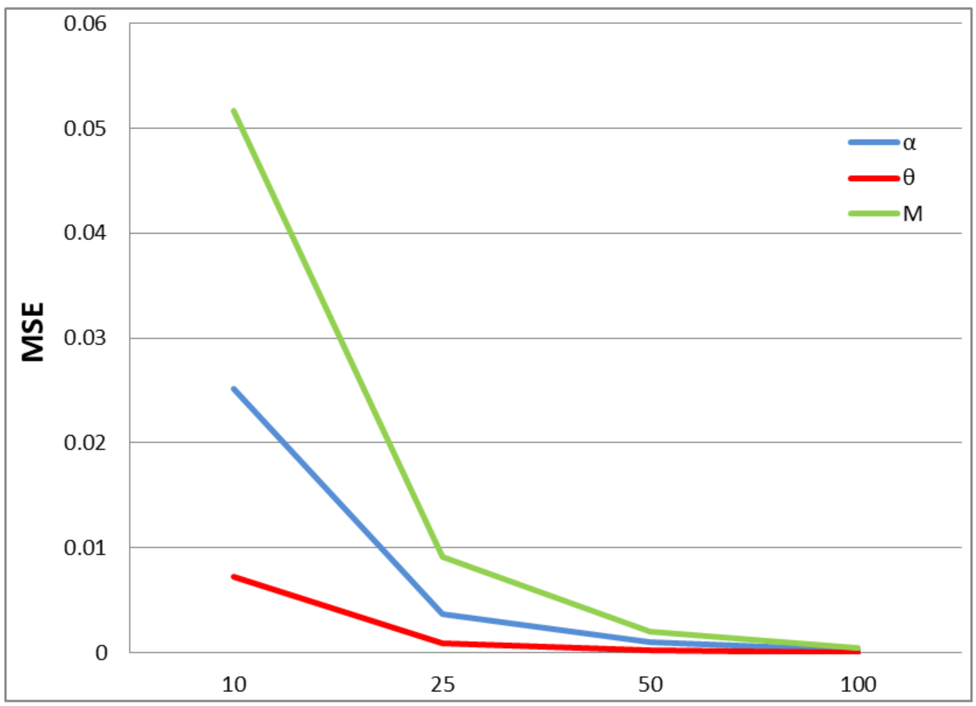
التجربة	PARAMETAR			N	MSE		
	α	**θ**	**M**		**α**	**θ**	**M**
1	0.5	1	2.5	10	0.01189715	0.06533647	0.01396719
				25	0.00157258	0.00592957	0.00280363
				50	0.00039248	0.00143531	0.00070084
				100	0.00009531	0.00028739	0.0001811
2	1	0.5	1.5	10	0.02518309	0.00725171	0.05162718
				25	0.00365198	0.00090513	0.00908598
				50	0.000958	0.00017063	0.00200794
				100	0.00024808	0.00003502	0.00047601

3	1	1	1	10	0.04136644	0.04285961	0.00740116
				25	0.00601234	0.00492946	0.00132643
				50	0.00166681	0.00101836	0.00033648
				100	0.0004001	0.00022879	0.00007713
4	0.7	0.6	0.5	10	0.00987204	0.00961178	0.00161785
				25	0.0014878	0.00106957	0.00029021
				50	0.0003369	0.00021909	0.00007
				100	0.00009104	0.00004587	0.00001639
5	2	2.5	5	10	0.43977951	0.4675484	0.21185308
				25	0.123922	0.07259943	0.04660141
				50	0.02780269	0.01752996	0.0126563
				100	0.00709967	0.00370165	0.00326366

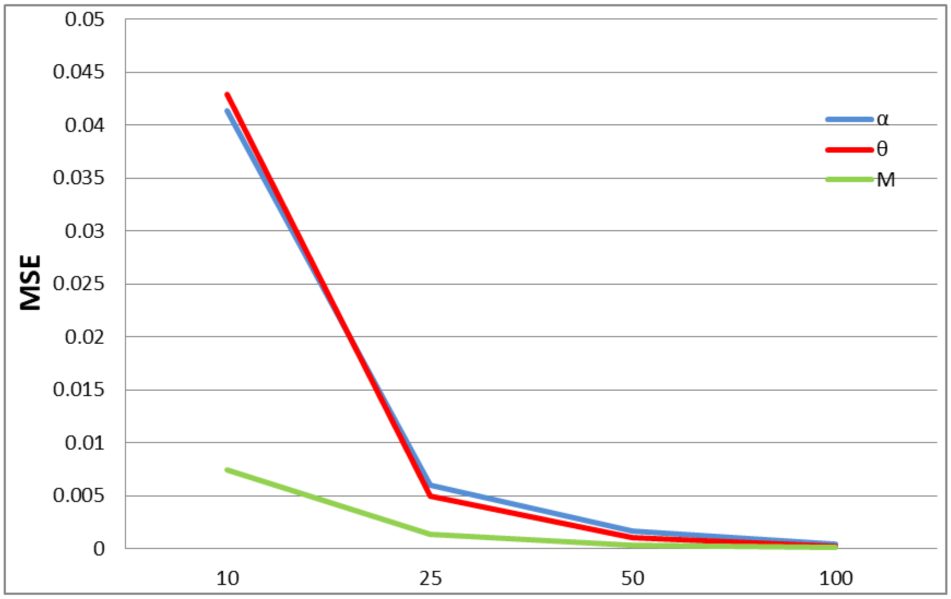
يتبيّن من الجدول (2) مدى كفاءة طريقة الإمكان الأعظم لجميع المَعُلَمْات المقدرة جميعها، حسب التجربة الأولى تميّزت أَلمْعلمة $\boldsymbol{\alpha}$ بأنّها تَمتلك أقلّ MSE مقارنة مع المَعلَمْات الأُخرى ، أمّا في التجربة الثانية فتميّزت المَعلمة $\boldsymbol{\theta}$ بانها تَمّتلك أقّل MSE أمّا في التجربة الثالثة والرابعة والخامسة فتميّزتْ المعلمة m بانها تَمّتلك أقّل MSE مقارنة مع تقديرات المَعلَمْات الأخرى وبصورة عامة يمكن عدّ المقدرات جميعها بأنها تَمّتلك متوسّط مربعات صغير نسبياً بدرجة أنّه يمكن الوثوق بطريقة الإمكان الأعظم في تقدير مَعُلَمْات النموذج ، وكما موضّح في الآشكال الاتية :-



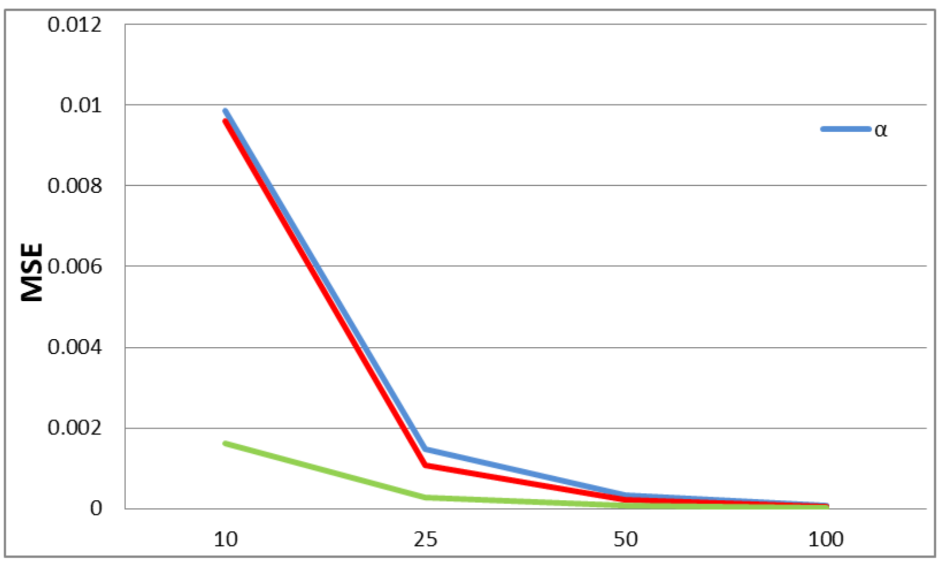
الشكل(1) تغيّر قيم MSE عندما ($\boldsymbol{M}$ =2.5 , $\boldsymbol{\theta}$ =1, $\boldsymbol{\alpha}$=0.5)



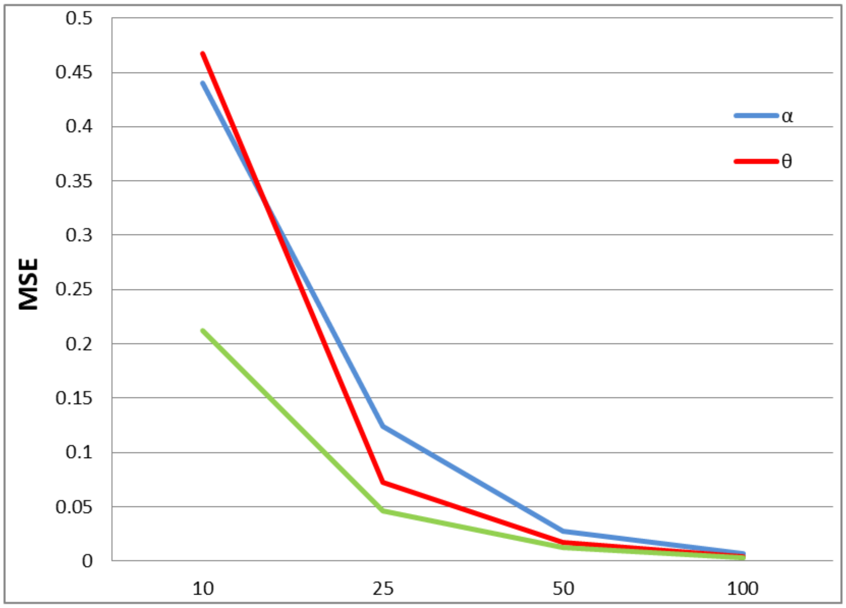
الشكل(2) تغيّر قيم MSE عندما ($\boldsymbol{M}$ =1.5 , $\boldsymbol{\theta}$ =0.5, $\boldsymbol{\alpha}$=1)



الشكل (3)تغيّر قيم MSEعندما ($\boldsymbol{M}$ =*1* , $\boldsymbol{\theta}$ =*1*, **α**=*1*)



الشكل (4) تغيّر قيم MSEعندما ($\boldsymbol{M}$ =*0.5* , $\boldsymbol{\theta}$ =*0.6*, **α**=*0.7*)



الشكل(5)تغيّر قيم MSE عندما $(\boldsymbol{M}=5\ ,\ \boldsymbol{\theta}=2.5,\ \boldsymbol{\alpha}=2)$

6- الاستنتاجات

بناءً على ما تَمّ انجازه في الجانب النظري والجانب التجريبي تَمّ التوصّل للاستنتاجات الآتية:-

1- تَمّ تقديم توزيع جديد هو توزيع رايلي باريتو، وهو ذو ثلاث مَعلَمْات $(m,\ \ \alpha,\theta)$ يتوقّع أنْ يكون أكثر ملائمة من التوزيعات الأخرى في الجانب التطبيقي .

2- تَمّ تقديم خصائص التوزيع الجديد :كالعزوم، و الوسط الحسابي ،والوسيط ،والتباين، والالتواء، و التفرطح، والدالة المولدة للعزوم ،والدالة المميّزة بصيغ نهائية .

3- إنّ التوزيع المقترح هو توزيع ملتوٍ باتّجاه اليمين بذيل طويل نسبياً ،يمكن أنْ يكون ملائماً لبعض التطبيقات التي تشتَمّل على قيم كبيرة جداً قياساً بنمط البيانات الأخرى أو البيانات التي تحتوي على عدد من القيم الشاذة .

4- أثبتتْ تجارب المحاكاة أنّ تقديرات مَعْلَمْات النموذج تَمّتلك قيماً بمتوسّطات مربّعات الخطأ وهي قليلة نسبياً بدرجة يمكن الوثوق بها .

5- من خلال تجارب المحاكاة يمكن عدّ طريقة الإمكان الأعظم طريقة كفوءة في تقدير مَعْلَمْات النموذج على الرغم من التباينات النسبية البسيطة بينها .

المصادر العربية

[1] لـؤي فـرح، وفـاء عيسـى، مصـطفى مظهـر رنـة، (2019)، اسـتخدام خوارزميـة *MCMC* لإيجـاد مقـدر بـايز لتوزيـع بـاريتو بمَعْلمتـين بالاعتَمّـاد علـى دالـة خسـارة متوازنـة ،مجّلـة جامعـة حمـاة – المجّلـد الثـاني – العـدد الثـاني عشر

[2] م. د. إسـماعيل هـادي جلـوب ،م. م. بلسـم مصـطفى شـفيق ، (2013)، مقارنـة بعـض طرائـق التقـدير البيزيـة مـع طرائـق اخـرى لتوزيـع ريلـي لبيانـات تحـت المراقبـة بـين النـوع الاول باسـتخدام المحاكـاة ، الكُليـة التقنيـة الإداريـة / بغداد ،مجّلة الإدارة والاقتصاد –السنة السادسة والثلاثون – عدد سبعة وتسعون.

المصادر الاجنبية

[3] Alfred Akinsete ,Felix Famoye , Cari Lee.(2008). The beta-pareto distribution. Statistics 42(6),547-563.

[4] Ayman Alzaatreh, Felix Famoye, Carl Lee.(2012). Gamma-Pareto Distribution and Its Applications. Journal of Modern Applied Statistical Methods, Volume 11 | Issue 1.

[5] H.Haj Ahmad,O.M.Bdair,M.F.M.Naser,A.Asgharzadeh,2021. The Rayleigh Lindley distribution:A new generalization of Rayleigh distribution with physical applications **.**

[6] Hanan A. Haj Ahmad , Ehab M. Almetwally ,2020. Marshall-Olkin Generalized Pareto Bayesian and Non Bayesian Estimation. Pak.j.stat.oper.res. Vol.16 No. 1 2020 pp Distribution: 21-33.

[7] Kareema Abed Al-kadim , Mohammad Abdalhussain Boshi .(2013). Exponential Pareto Disrtibution. Mathematical Theory and Modeling. Vol.3,No.5 .

[8] Reyah Zeadan Khalaf , Kareema Abad Al-Kadim.(2020). Truncated Rayleigh Pareto Distribution. Journal of Physics: Conference Series.