Al Kut Journal of Economics and Administrative Sciences /ISSN: 1999 -558X /ISSN Online 2707-4560/ Vol (15) Issue: 46-2023 (March)

AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

المقارنة بين معلمات الحرف في التقدير ثنائي المعلمة المعدل لأنموذج انحدار ذي الحدين السالب مع تطبيق عملي

Comparison of Ridge parameters in the modified two-parameter estimation of a negative binomial regression model with a practical application

م. أحمد رزاق عبد رمضان

العراق - واسط

جامعة واسط / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الاحصاء

Ahmed Razzaq Abed Ramadan

Iraq - Wasit

Wasit University / College of Administration and Economics / Department of Statistics

ahmedrazzaq@uowasit.edu.iq

المستخلص:

نظرًا للأعداد الكبيرة من حالات التشوه الخلقي لدى الأطفال حديثي الولادة التي يعاني منها أطفال العراق وخاصة في العقدين الاخيرين، تم اجراء كمية كبيرة من الأبحاث التي توضح اهم الأسباب التي تسبب بزيادة نسبة الإصابة في الاجنة. إذْ يمثل هذا النوع من البيانات على شكل اعداد صحيحة غير سالبة وقد يتم نمذجتها باستخدام نموذج انحدار Poisson او انموذج ذي الحدين السالب عندما يعاني انموذج بواسون من خاصية فرط التشتت التي تعني ان التباين فيه أكبر من المتوسط. لكن عندما تكون هناك علاقة خطية بين المتغيرات التفسيرية لتلك النماذج فان المقدرات الكلاسيكية مثل مقدر الإمكان الأعظم الشائع الاستخدام سيكون غير مستقر بشكل واضح، لذا نلجأ إلى طرائق أخرى لمعالجة مشكلة التعدد الخطي التي تظهر نتيجة هذا الارتباط بين المتغيرات التفسيرية والتي تكون كفوءة عند مقارنتها مع الطرائق الاعتيادية، ومنها مقدر انحدار الحرف ومقدر ثنائي المعلمة الذي تم اقتراح عدة توليفات لمعلمتي الحرف ومعلمة ليو الداخلة في حسابه لتشكيل مقدر يمتلك اقل متوسط مربعات خطأ، ونعرض ذلك من خلال عمل تجربة محاكاة مونتي كارلو. وأخيرا يتم توظيف المقدر الأفضل في معالجة المشكلة لتحليل بيانات ظاهرة التشوه الخلقي لدى الأطفال حديثي الولادة في محافظة بابل لإظهار فائدة التوليفات المقترحة. وتبين من خلال النتائج ان أفضل توليفة لمقدر ثنائي المعلمة جاءت عندما استعمال معلمة

الحـرف $\hat{k}_2$ ومعلمــة ليــو d وان كـل مـن عمـر الام وتعرضــها للإشـعاعات والاثــار الجانبيــة لــبعض الادويــة وعـدد الاسقاطات السابقة لها تأثير إيجابي على زيادة نسبة إصابة الطفل بالتشوهات الخلقية.

الكلمــات المفتاحيــة: انمــوذج انحــدار بواســون، انمــوذج انحــدار ذي الحــدين الســالب، بيانــات العــد، مشــكلة التعــدد الخطي، معلمة الحرف، معلمة ليو، مقدر ثنائي المعلمة.

Abstract:

Due to many cases of congenital malformation in newborns that Iraqi children suffer from, especially in the last two decades, a large amount of research has been conducted that explains the most important reasons that cause an increase in infection in fetuses. This type of data is represented in the form of non-negative integers. It may be modelled using the Poisson regression model or the negative binomial model when the Poisson model suffers from hyper dispersion means that the variance is greater than the average. However, when there is a linear relationship between the explanatory variables of these models, classical estimators, such as the commonly used maximum likelihood estimator, will be unstable.

Therefore, we resort to other methods to address multicollinearity that appears as a result of this correlation between the explanatory variables, which are efficient when compared with other methods, a Ridge regression estimator and the two-parameter estimator, in which several combinations of the two Ridge parameters and the Liu parameter included in its calculation were proposed to form an estimator that has less Mean squared error. We study this through a Monte Carlo simulation study. Finally, the best estimator is employed in addressing the problem to analyze the data of the phenomenon of congenital malformation in newborns in Babylon province to show the benefit of the proposed combinations. It was found through the results that the best combination of a two-parameter estimator came when using the ridge parameter $\hat{k}_2$ and the parameter Liu d, and that each of the mother's age, her exposure to radiation, side effects of some medications, and the number of previous miscarriages had a positive effect on increasing the child's incidence of congenital anomalies.

Keywords: Poisson Regression Model, Negative Binomial Regression Model, Count Data, multicollinearity, Ridge Parameter, Liu Parameter, Two-Parameter Estimator.

1. المقدمة: - introduction

عنـد دراسـة أي ظـاهرة فـي الحيـاة لابـد مـن التركيـز علـى متغيـرات تلـك الظـاهرة وغالبـاً مـا تـأتي المشـاهدات علـى شـكل اعـداد صـحيحة غيـر سـالبة ولا تكـون مسـتقلة وموزعـة بشـكل متماثـل (independent and identically distributed) (i.i.d) وكـذلك المشـاهدات المسـتقلة او التفسـيرية التـي تكـون غيـر مسـتقرة وموزعـة بشـكل متماثـل ايضـاً (i.i.d) او التـي يكـون تركيـز الباحـث علـى تلـك المتغيـرات التـي يفتـرض انهـا تـؤثر علـى معلمـات التوزيـع الشرطي للحدث.

وهنـاك عـدة ظـواهر منـا الطبيـة والهندسـية والماليـة ...الـخ تكـون عبـارة عـن بيانـات عـد أي ان قيمهـا تكـون اعـداد صـحيحة وغيـر سـالبة ، إضـافة لعـدم تمثيلهـا بتوزيـع منفـرد بـل تحتـاج إلـى دمـج تـوزيعين معـاً للحصـول علـى توزيـع يمثـل تلـك الظـاهرة المعقـدة ويكـون اكثـر مرونـة ، ويعـد توزيـع ذي الحـدين السـالب هـو احـد التوزيعـات التـي تمثـل مثـل تلـك الظـواهر فهـو أسـاس لنمذجـة البيانـات العدديـة (count data) ومـن المعـروف ان توزيـع ذي الحـدين السـالب هـو عبـارة عـن خلـيط بـين توزيـع بواسـون الـذي يمتلـك خاصـية فـرط التشـتت أي ان التبـاين يكـون اكبـر مـن متوسـط البيانات وبين توزيع كاما .

ويعتبـر انمـوذج ثنـائي الحـدين السـالب عضـو فـي توزيعـات العائلـة الاسـية ذات المعلمـة الواحـدة. وعلـى الـرغم مـن ان هنـاك نسـخ عديـدة ومختلفـة [6] مـن انمـوذج ذي الحـدين السـالب التقليـدي مثـل (Negative Binomial2) (NB2) [2] هـو الـذي سـيتم دراسـته فـي فـي هـذا البحـث لأنـه يسـمح بـالتنوع العشـوائي فـي المتوسـط الشـرطي لنمـوذج بواسـون بواسطة $h_i = Z_i M_i$ عندما:

$$M_i = \exp(X_i \beta)$$

إذْ ان:

X_i تمثل مصفوفة البيانات X من الدرجة $n \times (p+1)$.

p تمثل عدد المتغيرات التفسيرية.

β تمثل متجه المعلمات من الدرجة $(p+1) \times 1$.

مع اعتبار ان Z_i هي متغير عشوائي يتبع توزيع كاما $Z_i \sim \Gamma(\Psi, \Psi)$ و $i = 1, \dots, n$

فأن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير التابع y_i تكون بالشكل الاتي:

$$\Pr\left(y = \frac{y_i}{x_i}\right) = \frac{\Gamma(\theta^{-1} + y_i)}{\Gamma(\theta^{-1})\Gamma(1 + y_i)} \left(\frac{\theta^{-1}}{\theta^{-1} + M_i}\right)^{\theta^{-1}} \left(\frac{M_i}{\theta^{-1} + M_i}\right)^{y_i} \quad \dots (1)$$

إذْ ان معلمة فرط التشتت θ تكون بالشكل الاتي: $\theta = \frac{1}{\Psi}$ ويكون المتوسط الشرطي والتباين للتوزيع بالشكل الاتي [4]: -

$$E(y_i/x_i) = M_i$$

$$Cov(y_i/x_i) = M_i(1 + \theta M_i)$$

وللحصول على تقدير متجه معالم β نجد الدالة اللوغاريتمية للإمكان الأعظم بالشكل الاتي: -

$$L(\theta,\beta) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sum_{j=0}^{y_i-1}\log(j+\theta^{-1})\right]\right.$$
$$\left. - \log(y_i!) - (y_i+\theta^{-1})\log(1+\theta M_i) + y_i\log(\theta) + y_i\log(M_i)\right\} \dots (2)$$

بما ان:

$$Log\,\frac{\Gamma(\theta^{-1}+y_i)}{\Gamma(\theta^{-1})} = \sum_{j=0}^{y_i-1} log(j+\theta^{-1})$$

2. مشكلة البحث:

نمذجة البيانات من المشاكل الشائعة وعلى وجه الخصوص بيانات العد، إذْ تواجه العديد من المشاكل عند نمذجتها بأحد النماذج ومن هذه المشاكل هي مشكلة التعدد الخطي التي يعاني منها انموذج الانحدار ذي الحدين السالب الذي يمثل بيانات العد التي تتبع توزيع بواسون عندما يمتلك خاصية فرط التشتت لذا يجب معالجة هذه المشكلة للحصول على أفضل المقدرات واقل متوسط مربعات أخطاء لهذا الانموذج.

3. هدف البحث:

يهدف البحث إلى إيجاد أفضل مقدر ثنائي المعلمة لحل مشكلة التعدد الخطي في انموذج الانحدار ذي الحدين السالب من خلال دمج عدة توليفات لكل من معلمتي الحرف وليو في مقدر واحد للحصول على أفضل انموذج يمثل ظاهرة عدد إصابات التشوهات الخلقية لدى الأطفال حديثي الولادة ومعرفة اهم الأسباب التي تساهم في زيادة اعداد الإصابة لدى الأطفال.

4. مقدرات الإمكان الأعظم (MLE) لأنموذج ذي الحدين السالب:[3][15]

يمكن الحصول على مقدرات الامكان الاعظم لمعلمات الانموذج بإيجاد المشتقة الاولى للإمكان اللوغاريتمي في المعادلة (2) بالنسبة إلى β ومساواتها بالصفر وحلها:

$$\mathcal{S}(\beta)=\frac{\partial L(\theta,\beta)}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i+M_i}{1+\theta M_i}x_i=0 \qquad \dots(3)$$

المعادلة رقم (3) هي تركيبة غير خطيه في β لذا يجب استخدام الطريقة الأتية لتبسيطها

$$\beta^{(r)}=\beta^{(r-1)}+I^{-1}\,\mathcal{S}\left(\beta^{(r-1)}\right) \qquad \dots(4)$$

عندما $\mathcal{S}\left(\beta^{(r-1)}\right)$ هي المشتقة الأولى للدالة اللوغاريتمية للإمكان الأعظم بالنسبة إلى $\beta^{(r-1)}$ وان:

$$I^{-1}(\beta^{r-1})=E\left(\frac{\partial^2L(X,\beta)}{\partial\beta\partial\acute{\beta}}\right)=X\,W(\acute{\beta}^{(r-1)})X$$

إذْ ان: -

$$W\left(\beta^{(r-1)}\right)=diag\left(\frac{M_i(\beta^{(r-1)})}{1+\theta M_i(\beta^{(r-1)})}\right)$$

بالنسبة إلى $(\beta^{(r-1)})$

في الخطوة الأخيرة من خوارزميه الامكان الاعظم وبالاعتماد على طريقه نيوتن رافسون التكرارية نحصل على تقديرات $\hat{\beta}$ بالشكل الاتي: -

$$\hat{\beta}_{MLE}=(\acute{X}\ \widehat{W}\ X)^{-1}\acute{X}\ \widehat{W}\hat{Z} \qquad \dots(5)$$

إذْ ان $\hat{Z}$ هي عبارة متجه تكون عناصره مساوية إلى ($Log\left(\widehat{M}_i\right)+\frac{y_i-\widehat{M}_i}{\widehat{M}_i}$) وان $\widehat{M}_i$و $\widehat{W}$ هي قيم $W\left(\beta^{(r-1)}\right)$ و $M_i(\beta^{(r-1)})$ في الخطوة الأخيرة على التوالي.

وتعرف هذه الطريقة ايضا باسم خوارزميه المربعات الصغرى المعاد ترجيحها تكرارياً iteratively re-weighted least squares algorithm (IRLS) وهي جزء من طريقه الامكان الاعظم التي استخدمها لإيجاد مقدرات معلمات النموذج.

لكن عندما تكون مصفوفه $\acute{X}\ \widehat{W}\ X$ غير جيده اي بمعنى ان هناك ارتباط بين المتغيرات التفسيرية مما يتسبب بعدم امكانيه ايجاد معكوس المصفوفة او تكون نتائجها غير دقيقه وتصبح مقدرات الامكان الاعظم (MLE) غير كفوءة وتمتلك تبايناً كبيراً وتدعى هذه المشكلة بمشكله التعدد الخطي (Multicollinearity) . وعلى الرغم من انه تطبيق اسلوب (shrinkage) للتقدير يحظى بشعبيه كبيره لحل مشكله التعدد الخطي.[10] [8] الا ان هذا الاسلوب لم يتم التحقق منه عند توظيفه في نماذج العد مع وجود مشكله التعدد الخطي لذا تم اقتراح استخدام

انحـدار الحـرف (Ridge regression) فـي نمـاذج انحـدار ذي الحـدين الســالب.[7] [11] ويمكـن الحصـول علــى مقدر انحدار الحرف ذي الحدين السالب (RR) بالشكل الاتي:

$$\hat{\beta}_k = (\acute{X}\ \widehat{W}\ X + KI)^{-1}\ \acute{X}\ \widehat{W}\hat{Z} \qquad , \qquad K > 0 \qquad \ldots(6)$$

إذْ ان I تمثل مصفوفة الوحدة (*Identity matrix*) ذات ابعاد $(p+1)(p+1)$.

اما k تمثل معلمة الحرف وهناك طرق عديدة لتقديرها سيعرض البعض منها لاحقاً.

امـا الأسـلوب الثـاني لمعالجـة مشـكلة التعـدد الخطـي فـي نمـوذج الانحـدار ذي الحـدين السـالب فهـو مقـدرات ليـو (*Liu estimator) [12]* وان مقدر ليو (Lu) يكون بالشكل الاتي:

$$\hat{\beta}_d = \left(\acute{X}\ \widehat{W}\ X + I\right)^{-1}\left(\acute{X}\ \widehat{W}\ X + dI\right)\hat{\beta}_{MLE} \qquad 0 < d < 1 \qquad \ldots\ (7)$$

اخيـراً ومنطلقـاً مـن فكـره ان الجمـع بـين المقـدرين قـد ينـتج عنـه مزايـا اكثـر لكـلا المقـدرين إذْ تـم اقتـراح مقـدر ثنـائي المعلمـة وهـو مـزيج مـن (RR)و(Lu) مـن قبـل [3] وهنـا نقتـرح اسـتخدام نفس هـذا المقـدر ولكـن بمعـالم حـرف (k) مختلفـة مصـاحبه إلـى معـالم (Liu) المختلفـة ايضـا والـدمج بينهمـا ومعرفـه التوليفـة المناسـبة التـي تعطـي افضـل مقـدر مـع مناقشــه خصائصــها باسـتخدام اسـلوب مونـت كـارلو لتصـميم المحاكـاة واختيـار افضـل توليفــه للمقـدر وذلـك مـن خـلال فحـص خصـائص متوسـط مربعـات الخطـأ (Mean Square Error) (MSE) ومـن ثـم تطبيقـه علـى بيانـات حقيقية لدراسة ظاهره حالات التشوهات الخلقية لدى الاطفال حديثي الولادة في محافظة بابل.

5. مقدر ثنائي المعلمة: [3] [11] [13] Two Parameter Estimator

يمكن التعبير عن نموذج الانحدار الخطي بالصيغة الاتية:

$$Y = X\beta + \epsilon \qquad \ldots(8)$$

إذْ ان X تمثل مصفوفه المعلومات من الدرجة $(n*p)$و β تمثل متجه المعلومات من الدرجه $(p*1)$

و ϵ يمثـل متجـه الاخطـاء العشـوائية مـن الدرجـة $(n*1)$ و $\epsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$ و y تمثـل متجـه المتغيـر التـابع مـن الدرجة $(n*1)$.

فعنـدما يكـون هنـاك علاقـة خطيـة بـين المتغيـرات التفسـيرية تصـبح هنـاك مشـكله التعـدد الخطـي فـلا يمكـن ايجـاد معكـوس المصـفوفة $(\acute{X}X)$ وتصـبح بعـض القيمـة الذاتيـة (Eigenvalues) لهـا قريبـه مـن الصـفر والـرقم الشـرطي (k).

$$k = (e_{max}/e_{min})$$

وبالتـــالي فـــان قيمـــه الـــرقم الشـــرطي تصـــبح عاليـــة جـــداً ممـــا يـــدل علـــى وجـــود مشـــكله التعـــدد الخطـــي اي ان $(j = 1, \ldots, p)$, (e_j) هـــي القيمـــة المميـــزة لمصـــفوفه $(\acute{X}X)$ وهكـــذا فـــان مقـــدر المربعـــات الصـــغرى الاعتياديـــة (Ols) يصبح غير كفوء لذلك تم اقتراح مقدرات الحرف [7]

$$\hat{\beta}_{Ridge} = (\acute{X}X + KI)^{-1}\acute{X}Y$$

والتـــي يـــتم الحصـــول عليهـــا عـــن طريـــق اضـــافه قـــيم صـــغيره نســـبياً إلـــى عناصـــر القطـــر الرئيســـي لمصـــفوفه $(\acute{X}X)$ وبالتـالي إلـى المعادلـة الاصـلية وبسـبب اسـتخدام قـيم كبيـره لمعرفـه لمعلمـه الحـرف $(K)^{1/2}\beta$ احيانـا يـؤدي ذلـك إلـى المزيـد مـن التحيـز (bias) لمقـدر الحـرف. لـذلك اقتـرح ليـو (Liu) [10] اضـافه المقـدار $(-d/K^{\frac{1}{2}})$ إلـى المعادلـة الاصلية والحصول على المقدر من نوع ليو

$$\hat{\beta}_{k,d} = (\acute{X}X + KI)^{-1}(\acute{X}X + dI)\hat{\beta} \qquad k > 0\,, -\infty < d < \infty \qquad \text{عندما}$$

$\hat{\beta}$: هي أي مقدر كان يكون مقدر Olsاو غيره.

وبالتـــالي ســـيكون مقـــدر $\hat{\beta}_{k,d}$ يمتلـــك أفضـــل الخصـــائص مـــن مقـــدر Ols او مقـــدر الحـــرف كمـــا موضـــح بتجربـــة المحاكاة بالاعتماد على معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE).

لـذلك سـنقوم بتوظيـف مقـدر ثنـائي المعلمـة فـي نمـوذج ذي الحـدين السـالب لحـل مشـكله التعـدد الخطـي علـى النحـو الاتـي:

$$\hat{\beta}_{k,d} = \left(\acute{X}\widehat{W}X + KI\right)^{-1}\left(\acute{X}\widehat{W}X + dI\right)\hat{\beta}_{MLE} \quad K > 0\,, -\infty < d < \infty \quad \ldots (9)$$

ومن المقدر العام في المعادلة (7) نلاحظ الاتي:

$$\lim_{d \to -k} \hat{\beta}_{k,d} = \hat{\beta}_{MLE}$$

وعندما

$$\lim_{d \to 0} \hat{\beta}_{k,d} = \hat{\beta}_{k}$$

وهو مقدر الحرف لنموذج ذي الحدين السالب *(RR)*.

وعندما:

$$\lim_{\substack{k \to 1 \\ d \to -1}} \hat{\beta}_{k,d} = \hat{\beta}_{LE}$$

وهو مقدر ليو لنموذج ذي الحدين السالب (Liu).

ومن اجل رؤية تفوق المقدر ثنائي المعلمة يجب استخدام معيار متوسط مربعات الخطأ وتبين تعريفة كالاتي

$$MSE = \left(\hat{\beta}_{k,d}\right) = E[(\hat{\beta} - \beta)^{-}\left(\hat{\beta} - \beta\right) = tr[var\left(\hat{\beta}\right) + Bias\ (\hat{\beta}\acute{)}^{-}Bias\left(\hat{\beta}\right) \quad \dots (10)$$

ويمكن كتابة متوسط مربعات الخطأ لمقدر MLE كلاتي:

$$MSE(MLE) = tr(\acute{X}WX)^{-1} = \sum_{i=1}^{P+1} \frac{1}{\lambda_j}$$

إذْ ان λ_j هو العنصر j من متجهة القيم المميزة لمصفوفة $\acute{X}WX$

من اجل توضيح عناصر معيار متوسط مربعات الخطأ (Bias،Variance) يجب اجراء التحويل الاتي:

نفرض ان

$$\acute{Q}\acute{X}WXQ = \Lambda = diag\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \dots \lambda_{P+1})$$

عندما:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots .. \geq \lambda_{(P+1)}\ \ ,\ X = \acute{Q}\beta$$

إذْ ان Qهي مصفوفة تمثل اعمدتها المنتجات المميزة لمصفوفة $\acute{X}WX$.

نستطيع الحصول الان على دوال التحيز والتباين لمقدر ثنائي المعلمة

$$\text{Bias}\left(\hat{\beta}_{k,d}\right) = -(d\ , k)Q{\Lambda_k}^{-1}\alpha \quad \dots (11)$$

$$(\text{Var}\left(\hat{\beta}_{k,d}\right) = Q{\Lambda_k}^{-1}\Lambda_d\Lambda^{-1}\Lambda_d\Lambda_k^{-1} \quad \dots (12)$$

$$MSE\left(\hat{\beta}_{k,d}\right) = \sum_{j=1}^{p+1} \frac{(\lambda_i - d)^2}{\lambda_i(\lambda_j + k)^2} + \frac{(d + k)^2\alpha_j^2}{(\lambda_j + k)^2} \quad \dots (13)$$

إذْ ان:

$$\Lambda_k = \Lambda + kI$$

$$\Lambda_d = \Lambda - dI$$

6. تقدير معلمتي الحرف ليو [9][7][2] (Ridge and Liu Estimator)

مـن اجـل الوصـل إلـى افضـل مقـدر لانحـدار الحـرف او مقـدر ليـو يجـب العثـور علـى افضـل تقـدير لمعلمـة الحـرف k ومعلمة ليو d للحصول على اقل قيمة لمعيار متوسط مربعات الخطأ MSE عند استخدام مقدر ثنائي المعلمة.

ومن معادلة (9) يمكن تعريف

$$k = diag\ (k_1, k_2, \dots\dots, k_p)$$
$$d = diag\ (d_1, d_2, \dots\dots, d_p)$$

وباستخدام اسلوب المصدر [7] , [3] وباشتقاق المعادلة (12) وتبسيطها نحصل على:

$$\hat{k}^j_{k,d} = \frac{\lambda_i - d\left(1 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2\right)}{\lambda_j \hat{\alpha}_j^2} \quad j = 1,2, \dots p + 1 \quad \dots (14)$$

بشرط ان:

$$d < \frac{\lambda_j}{(1 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2)(\hat{k}\lambda_j)^{\frac{1}{2}}} \quad \dots (15)$$

نقتـرح مقـدرات جديـدة لمعلمـة الحـرف k اسـتناداً إلـى مـنهج Kibria 2003 و Alkhamisietal 2006 و Hoerl and Kennard 1970.

$$\hat{k}_1 = \min(\left|\hat{k}^j_{k,d}\right|)$$

$$\hat{k}_2 = \max(\left|\hat{k}^j_{k,d}\right|)$$

$$\hat{k}_3 = \text{mean}(\left|\hat{k}^j_{k,d}\right|)$$

$$\hat{k}_1 = \min\left(\frac{\lambda_j - d\left(1 + \theta_i \hat{\alpha}_j^2\right)}{\lambda_j \hat{\alpha}_j^2}\right) \quad \dots (16)$$

$$\hat{k}_2 = \max\left(\frac{\lambda_j - d\left(1 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2\right)}{\lambda_j \hat{\alpha}_j^2}\right) \quad \dots (17)$$

$$\hat{k}_3 = \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \left[\frac{\lambda_j - d\left(1 + \lambda_j \hat{\alpha}_j^2\right)}{\lambda_j \hat{\alpha}_j^2}\right] \quad \dots (18)$$

إذْ ان $\hat{k} > 0, \alpha_j^2 > 0, \lambda_j > 0$ *مما يعني ان قيمة مقدر ليو* d تقع بين (0,1).

وستتبع الخوارزمية الاتية لتقدير كل من d , k .

1-لايجاد $\hat{k}_1 - \hat{k}_3$ نحتاج إلى قيمة اولية لمعلمة ليو d لذا سنختار قيمة اولية بين $(0,1)$ لإيجاد معلمة الحرف $\hat{k}_j$

2- باستخدام المعادلة (15) تقوم بتقدير المعلمة $\hat{d}$ باستعمال قيمة المعلمة $\hat{k}$ الناتجة من الخطوة (1)

3- للحصول على نسبة تقديرية مناسبه إلى المعلمة $\hat{k}_1 - \hat{k}_3$ نقوم بتعويض قيمة المعلمة $\hat{d}$ الناتجة من الخطوة (2)

4-اخيراً ولاختيار أفضل تقدير للمعلمة d نستخدم واحد من $\hat{k}_1 - \hat{k}_3$ الناتجة من الخطوة (3) وتعويضها بالمعادلة (15)

7. تجربة المحاكاة: *[3] [1] [15]* ***Simulation experience***

ندرس الان اداء المقدر ثنائي المعلمة ومقدر MLE *باستعمال توليفات* مختلفة من معلمات الحرف k ومعلمات ليو d باستخدام محاكاة مونت كارلو تحت عوامل مختلفة مثل درجة الارتباط بين المتغيرات التفسيرية ρ وعدد المتغيرات التفسيرية وملخصة بالجدول (1).

في البداية نقوم بتوليد مشاهدات المتغيرات التفسيرية باستعمال

$$X_{ij} = (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} z_{ij} + \rho z_{ip} \qquad i = 1,2, \dots n \, , j = 1,2..p$$

إذْ ان

ρ^2 هو معامل الارتباط بين المتغيرات التفسيرية.

z_{ij} : تمثل ارقام عشوائية تتوزع توزيع طبيعي بمتوسط $(0,1)$.

الان سيتم توليد مشاهدات المتغير التابع y باستعمال توزيع ثنائي الحدين السالب.

$$N\beta(M_i, M_i + \theta M_i^2)$$

إذْ ان

$$M_i = \exp(\mathrm{X_i}\beta) \qquad , i = 1,2, \dots n$$

وتـم تحديـد المعلمـات بحيـث ان $\sum_{i=1}^{p} \beta_i^2 = 1$ وهـو قيـد شـائع الاسـتعمال فـي هـذا المجـال انظـر [15] [11 [12]]تكرار التجربة (3000) مرة ويتم حساب MSE للقيم المقدرة :

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{\sum_{r=1}^{3000}(\hat{\beta}_r - \beta)'\,(\hat{\beta}_r - \beta)}{3000}$$

إذْ ان $(\hat{\beta}_r - \beta)$ هـو الفـرق بـين المعلمـات المقـدرة والصـحيحة يـتم ذلـك باسـتخدام برنـامج Rواسـتخدام بعـض الحـزم الجـاهزة فـي البرنـامج. (مثـل طريقـة الإمكـان الأعظـم فـي انمـوذج انحـدار ذي الحـدين السـالب، طريقـة انحـدار الحرف وغيرها).

الجدول (1) العوامل المستخدمة في تجربة المحاكاة

العوامل	الرمز	العينة
الارتباط بين المتغيرات التفسيرية	ρ^2	*0,9 0,95 0,99*
عدد المتغيرات التفسيرية	*P*	*6 , 3*
القيم الاولية للمعلمة *d*	*d*	*0,9 0,5 0,1*
حجم العينة	*n*	*500 200 100 25*
التكرار	*R*	*3000*
القيم الاولية للمعلمة θ(حسب الدراسات السابقة على سبيل المثال انظر [3]).	θ	*2 , 1*

تم انشاء ستة جداول بين كل من تقديرات متوسط مربعات الخطأ لطريقتي التقدير $\hat{\beta}_{k,d}$, MLE باستعمال توليفات مختلفة من معلمة الحرف k ومعلمة d مع تغيير حجم العينة وعدد المتغيرات التفسيرية وقيمة المعلمة θ وقيمة معامل الارتباط بين المتغيرات التفسيرية اي درجة التعدد الخطي.

الجدول (2) تقديرات MSE عندما P=3 , d=0.1

θ		1				2			
	n	MLE	$\hat{\beta}_{k1,d}$	$\hat{\beta}_{k2,d}$	$\hat{\beta}_{k3,d}$	MLE	$\hat{\beta}_{k1,d}$	$\hat{\beta}_{k2,d}$	$\hat{\beta}_{k3,d}$

	25	1.343	0.795	0.455	1.007	2.887	0.873	0.568	1.064
0.9=ρ	**50**	1.232	0.702	0.389	0.588	2.857	0.622	0.518	0.606
	100	1.233	0.616	0.2571	0.511	2.656	0.414	0.411	0.535
	200	1.201	0.318	0.2129	0.495	2.622	0.491	0.222	0.418
	n								
	25	1.865	0.822	0.509	0.884	3.857	0.739	0.524	0.943
=ρ 0.95	**50**	1.733	0.505	0.481	0.862	3.653	0.521	0.517	0.743
	100	1.563	0.386	0.366	0.626	1.919	0.411	0.405	0.655
	200	1.286	0.310	0.287	0.503	1.887	0.331	0.316	0.514
	n								
=ρ 0.99	**25**	6.021	0.780	0.561	0.807	9.544	0.970	0.633	0.860
	50	5.654	0.666	0.548	0.710	8.243	0.795	0.588	0.741
	10	5.54	0.654	0.313	0.663	8.09	0.544	0.442	0.697

	0	5				5			
	200	2.812	0.540	0.207	0.646	4.719	0.318	0.277	0.658

الجدول (3) تقديرات MSE عندما P=6 , d=0.1

θ	1				2				
	n	MLE	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$	MLE	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$
0.9=ρ	25	1.76616	0.9625	0.3763	1.0834	3.663	0.915	0.791	1.345
	50	1.65516	0.8695	0.2103	0.6644	3.633	0.664	0.741	0.887
	100	1.65616	0.7835	0.1783	0.5874	3.432	0.456	0.634	0.816
	200	1.62416	0.4855	0.1393	0.5714	3.398	0.533	0.445	0.699
	n								
=ρ 0.95	25	2.28816	0.9895	0.5303	0.9604	4.633	0.781	0.747	1.224
	50	2.15616	0.6725	0.5023	0.9384	4.429	0.563	0.74	1.024
	100	1.98616	0.5535	0.3873	0.7024	2.695	0.453	0.628	0.936

	200	1.70916	0.4775	0.3083	0.5794	2.663	0.373	0.539	0.795
	n								
=ρ 0.99	**25**	6.44416	0.9475	0.5823	0.8834	11.32	1.012	0.856	1.141
	50	6.07716	0.8335	0.5693	0.7864	9.019	0.837	0.811	1.022
	100	5.96816	0.8215	0.3343	0.7394	7.871	0.586	0.665	0.978
	200	3.23516	0.7075	0.2953	0.7224	5.495	0.36	0.43	0.939

الجدول (4) تقديرات MSE عندما P=3 , d=0.5

θ		**1**				**2**			
	n	**MLE**	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k1,d}$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k2,d}$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k3,d}$	**MLE**	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k1,d}$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k2,d}$	$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{k3,d}$
=ρ 0.9	**25**	2.08946	0.793	0.353	1.005	3.746584	0.871	0.566	1.062
	50	1.97846	0.7	0.287	0.586	3.716584	0.62	0.516	0.604
	100	1.97946	0.614	0.255	0.509	3.515584	0.412	0.409	0.533
	20	1.947	0.316	0.211	0.493	3.48158	0.489	0.22	0.416

	0	46				4			
	n								
=ρ 0.95	**25**	2.61146	0.82	0.407	0.882	4.716584	0.737	0.522	0.941
	50	2.47946	0.503	0.379	0.86	4.512584	0.519	0.515	0.741
	100	2.30946	0.384	0.364	0.624	2.778584	0.409	0.403	0.653
	200	2.03246	0.308	0.285	0.501	2.746584	0.329	0.314	0.512
	n								
=ρ 0.99	**25**	6.76746	0.778	0.559	0.805	13.403584	0.968	0.631	0.858
	50	6.40046	0.664	0.546	0.708	12.102584	0.793	0.586	0.739
	100	6.29146	0.652	0.311	0.661	11.954584	0.542	0.44	0.695
	200	3.55846	0.538	0.205	0.644	5.578584	0.316	0.257	0.656

الجدول (5) تقديرات MSE عندما P=6 , d=0.5

θ		1				2			
	n	**MLE**	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$	**MLE**	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$
=ρ 0.9	**25**	3.18846	0.9575	0.2653	1.0794	4.542584	0.911	0.789	1.344
	50	3.07746	0.8645	0.1993	0.6604	4.512584	0.66	0.739	0.886
	100	3.07846	0.7785	0.1673	0.5834	4.311584	0.452	0.632	0.815
	200	3.04646	0.4805	0.1241	0.5674	4.277584	0.529	0.443	0.698
	n								
=ρ 0.95	**25**	3.71046	0.9845	0.5193	0.9564	5.512584	0.777	0.745	1.223
	50	3.57846	0.6675	0.4913	0.9344	5.308584	0.559	0.738	1.023
	100	3.40846	0.5485	0.3763	0.6984	3.574584	0.449	0.626	0.935
	200	3.13146	0.4725	0.2973	0.5754	3.542584	0.369	0.537	0.794
	n								
	25	7.866	0.942	0.571	0.879	12.1995	1.008	0.854	1.14

=ρ 0.99		46	5	3	4	84			
	50	7.49946	0.8285	0.5583	0.7824	11.898584	0.833	0.809	1.021
	100	7.39046	0.8165	0.3233	0.7354	10.750584	0.582	0.663	0.977
	200	4.65746	0.7025	0.2843	0.7184	6.374584	0.356	0.428	0.938

الجدول (6) تقديرات MSE عندما P=3 , d=0.9

θ		**1**				**2**			
	n	**MLE**	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$	**MLE**	$\widehat{\beta}_{k1,d}$	$\widehat{\beta}_{k2,d}$	$\widehat{\beta}_{k3,d}$
	25	2.2385	0.7072	0.3672	0.9192	4.6608	0.7852	0.4802	0.9762
=ρ 0.9	**50**	1.3098	0.6913	0.2783	0.5773	4.7078	0.6113	0.5073	0.5182
	100	1.2284	0.5371	0.2781	0.4321	3.4387	0.3351	0.4003	0.4472
	200	1.2000	0.2391	0.1331	0.4161	2.40472	0.4121	0.2113	0.3302
	n								
	25	5.7746	0.7431	0.4301	0.8051	5.63972	0.6601	0.5133	0.8552

=ρ 0.95	**50**	4.7026	0.4261	0.2021	0.7831	4.4357	0.4421	0.5063	0.65524
	100	3.2326	0.3071	0.2871	0.5471	4.7017	0.3321	0.3943	0.5672
	200	3.9556	0.2311	0.2081	0.4241	4.6697	0.2521	0.3053	0.4262
	n								
=ρ 0.99	**25**	14.6906	0.7011	0.4821	0.7281	18.32	0.8911	0.6223	0.7722
	50	13.3236	0.5871	0.4691	0.6311416	15.02	0.7161	0.57731	0.65324
	100	9.2146	0.5751	0.2341	0.5841416	10.8777	0.4651	0.43131	0.6092
	200	6.481	0.4611	0.1951	0.5671	8.50176	0.2391	0.1963	0.5702

الجدول (7) تقديرات MSE عندما P=6 , d=0.9

θ		1				2			
	n	**MLE**	$\hat{\beta}_{k1,d}$	$\hat{\beta}_{k2,d}$	$\hat{\beta}_{k3,d}$	**MLE**	$\hat{\beta}_{k1,d}$	$\hat{\beta}_{k2,d}$	$\hat{\beta}_{k3,d}$
	25	2.26820	0.7369	0.3969	0.94891	4.69052	0.8149	0.5099	1.0055
=ρ	**50**	1.337	0.719	0.406	0.605	4.735	0.639	0.535	0.545

0.9		56	0	0	06	55	0	0	8
	100	1.24918	0.5578	0.2987	0.45288	3.45946	0.3555	0.4210	0.4671
	200	1.21871	0.2573	0.1518	0.43403	2.4235	0.4308	0.2300	0.3480
	n								
	25	5.7922	0.7607	0.3477	0.82278	6.6574	1.6777	0.5301	0.8739
=ρ 0.95	**50**	4.72245	0.4458	0.3219	0.80297	5.4555	0.4619	0.5237	0.6740
	100	3.25247	0.3264	0.30619	0.56692	5.7215	0.3519	0.4116	0.5853
	200	2.9754	0.2502	0.1796	0.44304	3.6895	0.2719	0.3229	0.4446
	n								
	25	14.7104	0.7209	0.4019	0.74798	17.339	0.9109	0.6396	0.7903
=ρ 0.99	**50**	12.3434	0.6069	0.3883	0.6510	16.039	0.7359	0.5949	0.6720
	100	8.2344	0.59498	0.35343	0.60402	9.89758	0.48424	0.44809	0.62718
	200	4.5008	0.4809	0.11476	0.58655	6.52164	0.25876	0.21338	0.58863

لتلخيص النتائج تبين ان اقل قيمة لمتوسط مربعات الخطأ جاءت ضمن طريقة التقدير $\hat{\beta}_{k,d}$ ضمن التوليفة $d,\ \mathrm{k}_2$.

وتبين ان زيادة قيمة المعلمة θ تسبب بزيادة قيمة متوسط مربعات الخطأ ومع زيادة درجة الارتباط بين المتغيرات التفسيرية تتضخم قيمة متوسط مربعات الخطأ وخاصة في طريقة التقدير MLE. ووفقاً لما تبين وبصورة واضحة ان طريقة تقدير $\hat{\beta}_{k,d}$ هي أفضل من طريقة MLEبكل الاحوال.

يتبين من الجداول اعلاه ان زيادة حجم الارتباط بين المتغيرات التفسيرية له تأثير سلبي على المقدرات بصورة عامة ومع ذلك فأن زيادة حجم العينة يقلل من قيمة متوسط مربعات الخطأ ويرجع ذلك لخفض قيمة التحيز والذي هو أحد مكونات متوسط مربعات الخطأ اضافة إلى التباين.

ولذلك تبين ان زيادة عدد المتغيرات التفسيرية له تأثير سلبي على قيمة متوسط مربعات الخطأ. وهذا منطقي لان زيادة عدد المتغيرات التفسيرية المرتبطة مع بعضها سوف يزيد من مشكلة التعدد الخطي.

واخيراً وبشكل واضح يمكننا ان نستنتج ان طريقة MLE هي اسوء من الطريقة الاخرى لكون مقدرات MLE تعاني من وجود مشكلة التعدد الخطي وان أفضل توليفة لمقدرات $\hat{\beta}_{k,d}$هي عندما تكون قيمة $d\ ,\hat{k}_2$ و k_2 هي عباره عن$\max(\hat{k}_j)$ في جميع الظروف.

8. الجانب التطبيقي: Applied aspect

في هذا القسم نستعمل مقدر $\hat{\beta}_{k,d}$ عند معلمتي $\hat{k}_2\ ,\hat{d}$ على مجموعة بيانات حقيقية مأخوذة من دراسات (طعمة، عدنان 2018) [5] المتغير التابع فيها هو y (*count variable*) ويمثل نوع العوق (التشوه الخلقي عند الاطفال) والمتغيرات التفسيرية هي عمر الام (x_1)، وعدد الاسقاطات السابقة للام (x_2) وتعرض الام لعوامل مؤثرة x_3مقسمة الى [1- حمى 2- اشعاع 3- تناول ادوية 4- لا شيء مما ذكر] مهنة الام x_4 مقسمة الى] 1- ربة بيت 2- موظفة حكومية 3- موظفة اهلية 4- اعمال حرة].

وفي هذا التحليل نحاول معرفة تأثير هذه العوامل على عدد التشوهات الخلقية لدى الاطفال حديثي الولادة في محافظة بابل، العراق. وللكشف عن وجود مشكلة التعدد الخطي نستخدم مقياس الرقم الشرطي الذي هو عبارة عن الجذر التربيعي لحاصل نسبة أكبر قيمة جذر مميز على أصغر قيمة جذر مميز لمصفوفة البيانات $X'X$.

$$CI = \sqrt{\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

وكـان النـاتج 216.1461 وهـذا يـدل علـى وجـود مشـكلة التعـدد الخطـي. وبعـد اثبـات وجـود مشـكلة التعـدد الخطـي سـيكون التقـدير باسـتعمال طريقـة التقـدير ثنـائي المعلمـة وفـق التوليفـة المقترحـة لكـل مـن معلمـة الحـرف k ومعلمـة ليـو d ومقارنتها مع طريقة تقدير انحدار الحرف الكلاسيكية وفق المعادلة (6) جاءت النتائج كما في الجدول (8).

الجدول (8) تقديرات طريقة انحدار الحرف وطريقة ثنائي المعلمة مع معيار MSE

$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_k$	P-Value	$\hat{\beta}_{k2,d}$	P-Value
$\hat{\beta_0}$	4.3691	0.000	8.1417	0.000
$\hat{\beta_1}$	-0.0462	0.074	-0.1818	0.046
$\hat{\beta_2}$	0.4461	0.054	0.8096	0.048
$\hat{\beta_3}$	0.3857	0.006	1.1241	0.003
$\hat{\beta_4}$	-0.1589	0.483	-1.6946	0.161
MSE	7.563		2.069	

جـاءت النتـائج واضـحة بشـأن افضـلية طريقـة التقـدير باسـتعمال التوليفـة المقترحـة لمعلمـة الحـرف ومعلمـة ليـو علـى طريقـة التقـدير الكلاسـيكية (انحـدار الحـرف) وذلـك مـن خـلال الفـارق بـين قيمـة متوسـط مربعـات الخطـأ لكـلا الطريقتين.

وجـاءت جميـع العوامـل المـؤثرة ذات معنويـة مـا عـدا العامـل الرابـع وهـو مهنـة الام وذلـك مـن خـلال قيمـة P-Value التـي عنـدما تكـون اقـل مـن مسـتوى المعنويـة 0.05 يـدل علـى معنويـة المعلمـة المقـدرة وإذا كانـت قيمتهـا أكبـر مـن مستوى المعنوية يدل على عدم معنوية تأثير ذلك العامل على الظاهرة المدروسة.

ومـن خـلال النتـائج نلاحـظ تـأثير كـل عمـر الام وعـدد الاسـقاطات التـي تعرضـت لهـا وتعرضـها لعوامـل خارجيـة كـل الاشعاع او تناول بعض الادوية التي لها تأثيرا جانبيا على حصول التشوهات الخلقية في الأطفال حديثي الولادة.

9. الاستنتاجات: *Conclusions*

أشـارت الكثيـر مـن الادبيـات الخاصـة بمشـاكل الانحـدار وخاصـة مشـكلة التعـدد التخطـي تفـوق طريقـة تقـدير ثنـائي المعلمـة فـي معالجـة مشـكلة التعـدد الخطـي علـى كـل طرائـق التقـدير الكلاسـيكية فضـلا عـن الطرائـق التـي تعـالج مشـكلة التعـدد الخطـي مثـل انحـدار الحـرف. ومـن اجـل التوصـل إلـى أفضـل مقـدر ثنـائي المعلمـة يسـتعمل فـي البيانـات التـي

تتوزع توزيع بواسون يعاني من خاصية فرط التشتت والذي يمثل بأنموذج ثنائي الحدين السالب تم عمل توليفات للدمج بين معلمتي الحرف وليو للحصول على مقدرات كفوءة تمتلك اقل متوسط مربع خطأ ومقارنتها مع الطرائق الكلاسيكية لنوضح بشكل تجريبي بأفضلية هذه الطريقة على مقدر MLE إذْ تم اجراء دراسة المحاكاة باستعمال برنامج R لمقارنة أداء المقدرات التي تشكلت من توليف ثلاثة أنواع من معلمة الحرف K مع ثلاثة قيم لمعلمة ليو d مع مقدر الإمكان الأعظم واستنادا إلى نتائج تجربة المحاكاة التي كررت بمقدار 3000 تكرار لكل مرة واظهرت قيم معيار المقارنة MSE تبين:

1- طريقة تقدير ثنائي المعلمة ذات التوليفة $\hat{\beta}_{k2,d}$ كانت تمتلك اقل قيمة متوسط مربعات خطأ ويمكن التوصية باستخدامها.
2- تم الاستفادة من هذا المقدر وتوظيفية في دراسة تطبيقية لدراسة اهم العوامل المؤثرة في ظهور التشوهات الخلقية لدى الأطفال حديثي الولادة
3- كانت مشاهدات المتغير التابع هي بيانات عد يمكن نمذجتها بأنموذج ذي الحدين السالب ووجود علاقة بين العوامل المؤثرة (المتغيرات التفسيرية) مما أدى إلى ظهور مشكلة التعدد الخطي.

10. التوصيات: *Recommendations*

نوصي باستعمال طريقة التقدير مع توليفاتها كلما تم دراسة انموذج ذي الحدين السالب الذي يعاني من مشكلة التعدد الخطي. كما نوصي بضرورة زيادة الوعي الصحي لدى الأمهات لتجنب العوامل التي تسهم في زيادة نسبة حدوث التشوهات الخلقية في الأطفال.

كما ويمكن دراسة عدة توليفات أخرى وتوظيفها في هذا الانموذج او نماذج الانحدار الأخرى مثل (Beta Regression) او غيره، على امل الحصول على أفضل مقدر قادر على معالجة مشكلة التعدد الخطي بشكل أفضل.

المصادر: *Reference*

1. Alheety, Mustafa I.; Qasim, Muhammad; Månsson, Kristofer; Kibria, B. M. Golam. ‘‘Modified almost unbiased two-parameter estimator for the Poisson regression model with an application to accident data’’. *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, 2021, Vol. 45, Num. 2, pp. 121-142,
2. Alkhamisi, M., Khalaf, G. and Shukur, G. (2006). Some modifications for choosing ridge parameters.
   Communications in Statistics—Theory and Methods, 35(11), 2005-2020.

3. Asar, Y. (2018). Liu-type negative binomial regression: A comparison of recent estimators and applications. In *Trends and Perspectives in Linear Statistical Inference: Proceedings of the LINSTAT2016 meeting held 22-25 August 2016 in Istanbul, Turkey* (pp. 23-39). Springer International Publishing.
4. Cameron, A. C. and Trivedi, P. K. (1986). Econometric models based on count data. Comparisons and
   Communications in Statistics—Theory and Methods, 35(11), 2005-2020.
5. Fadhel,A. and ALRida Saeed,S.(2018). Choice of best estimate of regression model to negative binomial distribution with practical application. Master Thesis published. Karbala University, College of Administration and Economics, Statistics Department.
6. Hilbe, J. (2011). *Negative binomial regression*: Cambridge University Press.
7. Hoerl, A. E. and Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal
   problems. *Technometrics, 12*(1), 55-67.
8. Hoerl, A. E., Kennard, R. W. and Baldwin, K. F. (1975). Ridge regression: Some simulations. *Communications in Statistics-Theory and Methods, 4*(2), 105-123.
9. Kibria, B. M. G. (2003). Performance of some new ridge regression estimators. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 32(2), 419-435.
10. Liu, K. (2003). Using Liu-type estimator to combat collinearity. *Communications in Statistics-Theory and Methods, 32*(5), 1009-1020.
11. Månsson, K. (2012). On ridge estimators for the negative binomial regression model. *Economic Modelling, 29*(2), 178-184.
12. Månsson, K. (2013). Developing a Liu estimator for the negative binomial regression model: method and application. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83(9), 1773-1780.
13. M. N. Akram, M. Amin, M. Amanullah, Two-parameter estimator for the inverse Gaussian regression model, *Commun. Stat. Simul. C.*, 2020. doi: 10.1080/03610918.2020. 1797797.
14. Omara, T. M. (2022). Almost unbiased modified ridge-type estimator: An application to tourism sector data in Egypt. *Heliyon, 8*(9), e10684. problems. *Technometrics, 12*(1), 55-67.

15. Rashad, N. K., Hammood, N. M., & Algamal, Z. Y. (2021, May). Generalized ridge estimator in negative binomial regression model. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1897, No. 1, p. 012019). IOP Publishing. *Statistics-Simulation and Computation*, *32*(2), 419-435.