استخدام معادلة اويلر – لاكرانج في حل مسائل تساوي الأطوال

الدكتور محمد دخيل الأسدي
كلية المنصور الجامعة
قسم علم الحاسبات

المستخلص

ان كثيرا من التطبيقات في حساب التغاير تؤدي الى مسائل فيها شروط اضافية مساعدة تختلف عن الشروط الحدودية المعطاة وذلك لايجاد المنحني المتطرف (Extermal) المطلوب. تسمى هذه المسائل بمسائل تساوي الأطوال (Isoperimetric Problems) سيناقش البحث هذه المسائل وكيفية ايجاد معادلة اويلر-لاكرانج الخاصة واستخدامها في حلها مع بعض التطبيقات .

١. المقدمـــــة :

١-١ : المنحني الذي يبين أقصر مسافة بين نقطتين على سطح مستو يسمى جيودسـك (Geodesic) او المنحنـــي الأقصر وان مسألة ايجاد هذا المنحني وأي منحـــن متطـــرف آخـــر (extermal) هـــي مـــن مسائل حساب التغاير وكيفيـة ايجاده هو باســتخدام معادلة اويلر– لاكرانج (Euler-Lagrange Equation)[١] .

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\right]=0 \qquad (1)$$

حيث أن $y=y(x)$ هو المنحني المطلوب الذي يجعل التكامل التالي نهاية عظمى أو صغرى (stationary)

$$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx \qquad (2)$$

1.2 مسائل تساوي الأطوال (Isoperimetric Problems) [٢].

هناك مسائل أخرى فيها شروط إضافية مساعدة تختلف عن الشروط الحدودية المعطاة مثل أيجاد المنحني الذي يحصر أكبر مساحة ($\int_{x_1}^{x_2}ydx$) بين نقطتين معلومتين عندما يكون طول المنحني ($\int_{x_1}^{x_2}ds$) كمية ثابتة. وهذا يتطلب أن نجد معادلة اويلر-لاكرانج الخاصة لحل مثل هذا النوع من المسائل وهذا يعني أننا نريد أن نجعل التكامل :

$$I=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y')dx \qquad (1)$$

نهاية عظمى أو صغرى (stationary) عندما يكون التكامل:

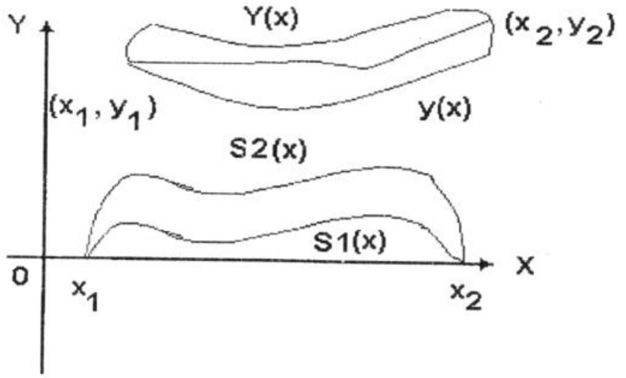
$$J = \int_{x_1}^{x_2} G(x, y, y')\, dx \qquad \text{.......(2)}$$

يساوي كمية ثابتة.

2. إيجاد معادلة اويلر – لاكرانج الخاصة

لأجل حل المسألة نفرض أن الدالتين F و G في المعادلتين , (1.2.2) (1.2.1) مستمرتان (continuous) ويمكن إيجاد المشتقتين الأولى والثانية لهما وهذا يتطلب أن نجد المنحني y=y(x) الذي يجعل التكامل (1.2.1) أكبر ما يمكن عندما يكون التكامل (1.2.2) يساوي كمية ثابتة وباستخدام (شكل -١) مجموعة المنحنيات يكون لدينا:

$$Y(x) = y(x) + \lambda_1 S_1(x) + \lambda_2 S_2(x) \qquad \text{.......(1)}$$



شكل (١)

حيث أن $S_1(x)$ و $S_2(x)$ هما منحنيان اختياريان وأن:

$$S_1(x_1) = S_1(x_2) = S_2(x_1) = S_2(x_2) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

و λ_1, λ_2 هما معلمان (Two Parameters) و $y(x)$ هي الدالة المطلوبة. وبما أن الدالة $Y(x)$ هي دالة ذات قيمة واحدة وقابلة للاشتقاق ومستمرة بين النقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) وهي إحدى المنحنيات أيضاً وأن $Y(x)= y(x)$ عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ فتكون المسألة أنه يجب أن يكون التكامل:

$$I(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')dx \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

أكبر ما يمكن عندما التكامل

$$J(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{x_1}^{x_2} G(x, Y, Y')dx \qquad (4)$$

بساوي كمية ثابتة وباستخدام مضروب لالكرانج (λ) Lagrange Multiplier

$$H = I + \lambda J$$

فيكون لدينا:

$$H(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (F + \lambda G)dx \qquad (10)$$

$$H(\lambda) = \int_{x_1}^{x_2} f\, dx \qquad (11)$$

حيث أن: $f(x, Y, Y`) =$

$F + \lambda G$

ونريد أن نجعل $\frac{dH}{d\lambda i} = 0$ عندما $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

اذن :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda i} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial Yi}\cdot\frac{\partial Yi}{\partial \lambda i} + \frac{\partial f}{\partial Y'i}\cdot\frac{\partial Y'i}{\partial \lambda i}\right]dx \qquad (12)$$

حيث : $(I = 1, 2)$

وبالتعويض عن Yو Y' من اعلاقة (2.1) ومشتقته وأن $\frac{\partial H}{\partial \lambda i} = 0$ عندما $\lambda_1 = \lambda_2$

$= 0$

نحصل على :

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda i} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial Yi}\cdot Si + \frac{\partial f}{\partial Y'i}\cdot S'i\right]dx = 0 \qquad (13)$$

وعندما $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ تكون $Y(x)=y(x)$

فنجد بعد التكامل بالتجزئة للحد الثاني من المعادلة (2.13) واستخدام العلاقة (2.2)

ما يلي:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y'}Si\right]_{x1}^{x2} + \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right]Si\,dx = 0 \qquad (14)$$

وبما أن (Si) هي دالة اختيارية فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0 \qquad (15)$$

وبما أن : $f = F + \lambda G$ أذن تكون المعادلة (2.15) كالآتي:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(F+\lambda G)-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}(F+\lambda G)\right)=0 \qquad (16)$$

هي معادلة اويلر –لاكرانج الخاصة التي باستخدامها نجد المنحني المطلوب $y(x)$.

وعندما تكون الدالة "f" تعتمد على y' و y فقط فالمعادلة (2.15) تصبح كالآتي:

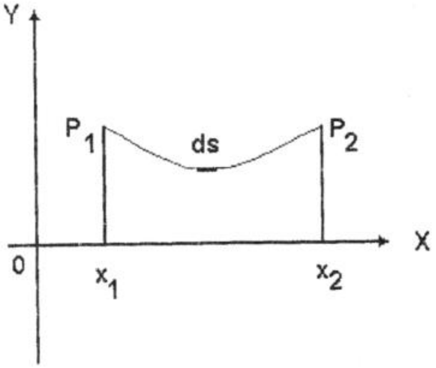
$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y}=c \qquad (17)$$

وهي حالة خاصة لمعادلة اويلر – لاكرانج عندما تكون x غير موجودة.

3 . التطبيقات

3.1 مثال : سلسلة طولها يساوي (1) معلقة من النقطتين P_1وP_2 وأن وزنها (w)

لكل وحدة طول (شكل – 2) جد شكل المنحني.



الشكل رقم -2-

الحل من الفيزياء : الطاقة الكامنة (P.E) تساوي :

$$P.E = V = w\int_{x_1}^{x_2} y\, ds \quad \text{.........(1)}$$

$$V = w\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \quad \text{.........(2)}$$

نفـــــــــــرض أن:

$$\sqrt{1+y'^2} = J = I \qquad , I = \frac{V}{w}$$

أذن

$$H = I + \lambda J$$

$$\therefore\ f(x, y, y') = F + \lambda G = y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2} \quad \text{.........(3)}$$

وبما أن الدالة لا تعتمد على (x)فيمكننا استخدام المعادلة (2.17) وهي :

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y} = c \qquad (4)$$

وعند التعويض يكون لدينا:

$$\left(y\sqrt{1+y'^2} + \lambda\sqrt{1+y'^2}\right) - \frac{y'^2 y}{\sqrt{1+y'^2}} + \frac{\lambda y'^2}{\sqrt{1+y'^2}} = c \qquad (5)$$

وباختصار المعادلة نحصل على:

$$y + \lambda = c\sqrt{1+y'^2} \qquad (6)$$

وبتربيع الطرفين نجد أن :

$$y' = \frac{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}}{c} \qquad (7)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y+\lambda)^2 - c^2}} = \frac{dx}{c} \qquad (8)$$

وبالتكامل يكون لدينا:

$$x = c\ \cosh^{-1}\left(\frac{y+\lambda}{c}\right) = b \qquad (9)$$

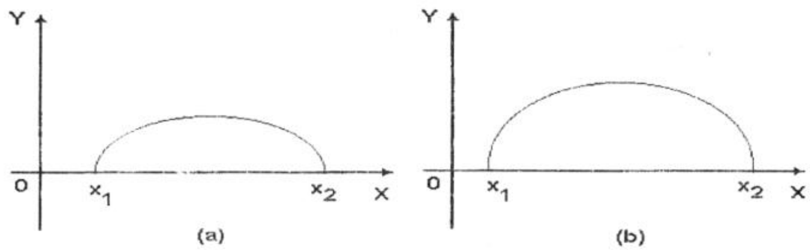
أو:

$$y + \lambda = \cosh\left(\frac{x-b}{c}\right) \qquad (10)$$

وهو منحني السلسلة (catenary curve).

3.2 مثال [2]

لنجد شكل المنحني الذي طوله يساوي (l) والواصل بين النقطتين x_1 و x_2 على محور السينات والذي يحصر أكبر مساحة.



الشكل رقم (3)

الحل:

المسألة تتطلب أن نجعل التكامل : (الذي يمثل المساحة)

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx \quad \text{.......}(1)$$

أكبر ما يمكن عندما يكون التكامل (الذي يمثل طول المنحني) يساوي كمية ثابتة

$$j = \int_{x_1}^{x_2} ds = \ell$$

أذن: $H = I + \lambda J$

أي أن الدالة "f" تساوي: $f = F + \lambda G$

$$f = y + \lambda\sqrt{1+y'^2} \quad \text{.....(2)}$$

وباستخدام معادلة اويلر – لاكرانج الخاصة (2.16) نجد أن

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(F + \lambda G) = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{.....(3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'}(F + \lambda G) = 1 \quad \text{.....(4)}$$

أذن : يكون لدينا:

$$1 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0 \quad \text{.....(5)}$$

بالتكامل نحصل على:

$$\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = x + c \quad \text{.....(6)}$$

أذن:

$$dy = \frac{(x+c)dx}{\sqrt{\lambda^2 - (x+c)^2}} \quad \text{.....(7)}$$

وبالتكامل أيضاً نجد أن :

$$y + b = -\sqrt{\lambda^2 - (x+c)^2} \quad \text{.....(8)}$$

بتربيع الطرفين يكون لدينا:

$$(y + b)^2 = \lambda^2 - (x + c)^2 \quad \ldots\ldots(9)$$

أذن :

$$(x + c)^2 + (y+b)^2 = \lambda^2 \quad \ldots\ldots(10)$$

وهــذه هي معادلة دائرة مركزها في النقطة $(-c, -b)$ ونصف قطرها يساوي (λ)

ويمكن ايجادها من النقطتين المعلومتين (x_1, x_2) وطول المنحني (l).

ونلاحــظ أنــه إذا كان طول المنحني (l) ليس أكبر كثيراً من $(x2 - x1)$ فالشكل

يبدو مثل (شكل-3a)

وإذا كــان طول المنحنــــي (l) أكبــــر كثيراً من (x_2-x_1) فالشكل يبدو مثل

(شكل-3b) .

4. الخلاصة والاستنتاجات

4.1 أن المنحنـــي الذي يؤشر أقصر مسافة بين نقطتين على مستو يسمى جيودسك السطح (Geodesic) ويمكن إيجاده باستخدام معادلة اويلر-لاكرانج (4) و (1)

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

4.2 بينما هناك مسائل في حساب التغاير فيها شروط مساعدة إضافية إلى الشروط الحدوديـــة المعطـــاة مـــثل إيجاد المنحني الذي يحصر مساحة عظمى عندما طوله يســـاوي كمـــية ثابتة فهذا يتطلب استخدام معادلة اويلر - لاكرانج الخاصة التي تم إيجادها :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

حيث أن $f = F + \lambda G$ وقد تم استخدام المعادلة في مثالين تطبيقيين.

5. المصادر

1. AL-Asadi, M.D., Finding the extremal curve by using Euler-Langrange equation and its application.

إيجاد المنحني المتطرف باستخدام معادلة أويلر-لاكرانج.

(بحث مقبول للنشر في مجلة كلية الإدارة والإقتصاد - الجامعة المستنصرية رقم الكتاب (848) في 2003/1/22

2. Boas, M.L, Mathematical Methods in the physical sciences, John-Wily & Son, Inc / (966).
3. Craggs, J. W Calculus of Variation, Allen & unwin Ltd, London (1973).
4. Stephenson, G. E, Mathematical Methods for science students, London (1973).

Using Euler-Lagrange Equation In Solving Isoperimetric Problems

Dr. Muhammed D. Al-Alasadi
Mansour University College
Dept. of Computer Science

ABSTRACT

Many applications of calculus of variation lead to problems in which not only boundary conditions, but also conditions called subsidiary are imposed on the extreme curve. These problems are known as Isoperimetric problems. The paper will discuss these problems and derive the special Euler-lagrange equation which is used to solve such problem with some applications.