AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

استعمال دوال خسارة مختلفة لتقدير معالم توزيع برينباوم– ساوندرز بالطريقة البيزية مع تطبيق عملي

https://doi.org/10.29124/kjeas.1547.22

حسين بشار كاظم(1) أ.م .د. أحمد مهدي صالح(2)

كلّية الإدارة والاقتصاد / جامعة واسط

المستخلص

يُعدّ توزيع برينباوم-ساوندرز من أهمّ التوزيعات التي تفسّرُ وقت الأعياء بشكل عام إذْ تكون له العديد من التطبيقات الهندسية والصناعية. وفي بحثنا هذا قمنا بتقدير معالم هذا التوزيع باستعمال ثلاثة طرائق هي: طريقة الإمكان الأعظم MLE ، وكذلك التقدير البيزي بدالّة خسارة تربيعية BQ ، وكذلك تقدير بيز بدالّة خسارة موزونة BW. و تَمّتْ المقارنة بين طرائق التقدير الثلاث باستعمال متوسّط مربعات الخطأ MSE ، إذْ تَمّ استعمال بيانات محاكاة فضلا عن استعمال بيانات حقيقية تمثّل وقت الأعياء لكتلة خرسانية تحت الضغط قبل انهيارها بشكل نهائي. وتَمّ التوصّل إلى أنّ مُقدّر بيز بدالّة خسارة تربيعية هو الأفضل.

1- المقدّمة

إنّ مِنْ أهم التوزيعات الإحصائية وأكثرها شيوعا هو التوزيع الطبيعي، الذي يعدُّ ركيزة مهمّة، ومن خلاله تَمّ تطوير العديد من التوزيعات الجديدة باستعمال بعض التحويلات عليه ، ومن خلالها تَمّ الحصول على توزيع بيرنباوم –سوندرز [4]. ويرمز له بالرمز BS ذي المعالم الثنائية عام (1969). وكما اسلفنا فقد تَمّ الحصول على هذا التوزيع من خلال إجراء تحويل رتيب لمتغيّر يتوزّع توزيعا طبيعيا. وإنّ معالم هذا التوزيع هما: (α , β) ، أي الشكل والمقياس على التوالي. وسُمّي أيضا بتوزيع عمر ثنائي المعالم لنموذج عمر الإجهاد لمعدن خاضع للإجهاد الدوري . ومن خلال هذا التوزيع تَمّ تقديم الكثير من التفسيرات المختلفة والطرائق العامّة والاستنتاجات وتمديدات للحالات ثنائية المتغيّر ومتعددْ المتغيّر. وقد أعدّتْ أكثر من مائتي ورقة ودراسة بحثية واحدة عن هذا التوزيع. ويشار أيضا إلى هذا التوزيع باسم توزيع التعب والحياة[8] .

ظهر هذا التوزيع في العديد من السياقات المختلفة، مع اشتقاقات متفاوتة بواسطة Fletcher[7] تَمّ الحصول عليها بواسطة Konstantinowsky[9] كنموذج سكون مفيدٍ في الاختبار . وإنّ اشتقاق بيرنباوم - سوندرز [5] هو الذي جلب تركيزا واضحا لغرض نمذجة حياة التعب للمعادن .

سوف نقوم بتعريف هذا التوزيع ، ونقدّمَ بعض التفسيرات المادية، ونناقش خصائص هذا التوزيع وكما يأتي :

وتكتب بالصيغة الآتية :(p.d.f)

$$f_T\,(t,\alpha,\beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\,\beta}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right],\ t>0, \alpha,\beta\ >0 \qquad (1)$$

إذْ إنّ هذه الدالّة $B_S(\alpha,\beta)$:لمعلمتين وهما α معلمة الشكل عندما تكون β معلمة المقياس ، و $B_S(\alpha,\beta)$ تساوي صفر لقيم مختلفة أحادية النسق. $t\to\infty$ ، ويكون $t\to 0$ يكون

دالّة التوزيع التراكمية تكون بالشكل الآتي:

$$F_T(t,\alpha,\beta) = \Phi\left[\frac{1}{\alpha}\left\{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}\right], 0<t<\infty\,, \alpha>0\,, \beta>0 \qquad (2)$$

Φ معكوس دالّة التوزيع الطبيعي القياسي للمعالم نفسها.

يهدف البحث إلى استعمال الأسلوب البيزي في تقدير معالم توزيع برينباوم- ساوندرز باستعمال دوال خسارة مختلفة والمقترنة فيما بينها للحصول على المقدّر الأمثل، الذي يجعل من مجموع متوسّط مربعات الخطأ MSE أقلّ ما يمكن. كذلك تنبع أهمّية البحث من كون التطبيق مهم ، فهو يتعلّق بشكل مباشر بصناعة الخرسانة وقياس مدى مقاومتها للضغط المسلط عليها من خلال دراسة توزيع وقت الإعياء ، أيْ الزمن الذي تستغرقه الخرسانة من ظهور أول تصدع إلى انهيار الخرسانة بشكل نهائي.

2- طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood estimator MLE

وهي إحدى طرائق التقدير المَعْلَمِيّة، والتي تستعمل بشكل شائع جداً؛ نظراً لسهولة فكرتها وإمكانية تطبيقها. قام بيرنباوم و سوندرز [3] بتقدير معالم توزيع بيرنباوم و سوندرز بطريقة الإمكان الأعظم وكما يأتي. إذْ تكون دالّة الإمكان الأعظم لتوزيع بيرنباوم و سوندرز بالشكل الآتي:

$$L\, f_{(\mathrm{t}\,,\alpha\,,\beta)} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\right)^n \prod_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right) exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right] \quad ..(3)$$

وبأخذ الوغاريتم الطبيعي للمعادلة (3)

$$\ln L\, f_{(\mathrm{t}\,,\alpha\,,\beta)} = -n\ln(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \ln\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{1}{2\alpha^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t_i}{\beta} + \frac{\beta}{t_i} - 2\right) \quad ..\quad (4)$$

وللسهولة في التعبير قام بيرنباوم و سوندرز [10] بوضع الإحصاءات الآتية وهي الوسط الحسابي والوسط التوافقي وكما يأتي:

$$s = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (5)$$

$$r = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right]^{-1} \qquad (6)$$

وباشتقاق المعادلة (4 بالنسبة إلى α ومساواتها إلى الصفر ينتج لدينا الآتي :

$$\alpha^2 = \left[\frac{s}{\widehat{\beta}} + \frac{\widehat{\beta}}{r} - 2\right] \qquad (6)$$

وباشتقاق المعادلة (4) بالنسبة إلى β تنتج لدينا المعادلة غير الخطّية الآتية:

$$\beta^2 - \beta\big(2r + k(\beta)\big) + r\big(s + k(\beta)\big) = 0 \qquad (7)$$

إذْ إنّ

$$k(x) = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x + t_i)^{-1}\right]^{-1} \quad \text{عندما} \quad x \geq 0 \qquad (8)$$

وعليه فإنّ مقدار الإمكان الأعظم ل β سيكون هو الجذر الموجب للمعادلة غير الخطّية (7) ، و سيكون مقدار الإمكان الأعظم ل α بالشكل الآتي [3] :

$$\hat{\alpha} = \left[\frac{s}{\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2\right]^{1/2} \qquad (9)$$

وكذلك أثبتْ بيرنباوم وسوندرز أنّ مقدّرات الإمكان الأعظم التي قاما باشتقاقها تتمتّعُ بخاصّية الاتّساق والكفاءة.

3- الطرائق البيزية للتقدير

وهي الطرائق التي تقوم على فكرة وجود توزيع مسبق لِمَعْلَمِ التوزيع ، إذْ تعتمد في حسابها على إيجاد التوزيع اللاحق بعد افتراض توزيع سابق لمعالم التوزيع ، وهنا قام Achear[1] بتقدير معالم توزيع بيرنباوم وسوندرز بالطريقة البيزية ، واعتمد على حاله التوزيع المسبق (Jeffreys prior)، والتي تكون بالصيغة الآتية[1] :

$$\pi\,(\alpha,\beta) \propto \{\det\ I(\alpha,\beta)\}^{1/2} \qquad (10)$$

إذْ إنّ $I\,(\alpha,\beta)$ يمثّل مصفوفة معلومات Fisher(27) وتكون بالشكل الآتي:

$$I_{(\alpha,\beta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L\, f_{(t,\alpha,\beta)}}{\partial^2 \alpha} & \frac{\partial^2 L\, f_{(t,\alpha,\beta)}}{\partial \beta\, \partial \alpha} \\ \frac{\partial^2 L\, f_{(t,\alpha,\beta)}}{\partial \alpha\, \partial \beta} & \frac{\partial^2 L\, f_{(t,\alpha,\beta)}}{\partial^2\, \beta} \end{bmatrix} \qquad (11)$$

وتكون بالنسبة إلى توزيع بيرنباوم وسوندرز بالشكل الآتي:

$$I_{(\alpha,\beta)} = -\begin{bmatrix} \frac{2n}{\alpha^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{\alpha^2\,\beta^2}\left(1 + \alpha(2\pi)^{-1/2}\, h(\alpha)\right) \end{bmatrix} \qquad (12)$$

وعليه فإنّ دالّة التوزيع المسبق (Jeffreys prior) تكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\alpha,\beta) \propto \frac{1}{\alpha\,\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{1/2}, \qquad \alpha>0\,,\beta>0 \qquad \underline{(13)}$$

وعليه فإنّ التوزيع اللاحق يكون بالشكل الآتي:

$$f_{(\alpha,\beta/t_1\ldots t_n)} = \frac{\pi\,(\alpha,\beta)\ \cdot\ f_{(\alpha,\beta,t_1\cdots t_n)}}{\iint_0^\infty \pi(\alpha,\beta)\ f_{(\alpha,\beta,t_1\ldots\, t_n)}d\alpha\; d\beta} \qquad (14)$$

وبعد التعويض المباشر

$$f_{(\alpha,\beta/t_1\ldots t_n)} = \frac{\frac{1}{\alpha\,\beta}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\right)^n \cdot\ \prod_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right) exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right]}{\iint_0^\infty \pi(\alpha,\beta)\ \cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}\right)^n \prod_{\boldsymbol{t=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\left(\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{3}{2}}\right)\right) exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right] \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\beta} \qquad (15)$$

وقام *Achcar[2]* بتبسيط دالّة التوزيع اللاحق لتكون بالشكل الآتي :

$$f_{(\alpha,\beta/t_1\ldots t_n)} \propto \frac{\prod_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{t_i})\ \boldsymbol{exp}\{-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta})/\boldsymbol{\alpha^2}\}}{\alpha^{n+1}\ \ \beta^{(n/2)+1}\ H(\alpha^2)} \qquad (16)$$

إذْ إنّ $H(\alpha^2)$ تكون بالصيغة الآتية:

$$H(\alpha^2)=\left(\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)^{-1/2} \qquad (17)$$

وكذلك من الممكن التمثيل لـ $\mathbf{A(\beta)}$

$$\mathbf{A(\beta)=\frac{ns}{2\beta}+\frac{n\beta}{2r}-n} \qquad \textbf{(18)}$$

وباستعمال مقاربات لابلاس تمكّن [1] Achcar من حساب التوزيعات اللاحقة لـ α و β وكالآتي:

$$\mathbf{f_{(\alpha/t_1\dots t_n)} \propto \alpha^{-(n+1)}(4+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{n}{\alpha^2}\left(\sqrt{s/r}-1\right)\right\}} \qquad \textbf{(19)}$$

$$\mathbf{f_{(\beta/t_1\dots t_n)} \propto \frac{\prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)\left\{4+\left[\frac{2n}{(n+2)}\right]\left[\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}{\beta^{\frac{n}{2}+1}\left\{\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right\}^{\frac{n+1}{2}}},\ \beta>0} \quad \textbf{..(20)}$$

وبعد إيجاد التوزيع اللاحق لكُلّ من α و β يمكن إيجاد تقديرها بطريقه بيز باستعمال دوال الخسارة وكالآتي :

1-3 دالّة الخسارة التربيعية

هي دالّة لتقليل الخسارة اللاحقة للخطأ التربيعي المتوقّع:

$$\delta_2^{\pi}(t)=\arg\min_{\alpha\in A} E[L_2\,(\theta,\alpha)\backslash t] \quad ..\ (21)$$

إذْ : $A\ \{\ \alpha\ (t):\ \alpha\ (t)\ \in\ (-\infty,\infty\ )$

$$L_2\,(\theta,\alpha)=(\theta-\alpha)^2$$

هي دالّة خسارة الخطأ التربيعية و $\theta\in\ (-\infty,\infty)$ هي مَعْلَمة غير معروفة ذات أهمّية. من السهل الحصول على التوقّع [1]0:

$$\mathrm{E}\ (\pi,\alpha\backslash t)=E[L_2(\theta,\alpha)\backslash t]=\alpha^2-2\alpha E(\theta\backslash t)+E(\theta^2\backslash t)$$

ومِنَ ثمّ:

$$\delta_2^{\pi}(t) = E(\theta \setminus t) \quad ..(22)$$

وبأخذ مشتقّة جزئية إلى α ومساواتها إلى 0.

$$L_q\,(\hat{\alpha}) = E(\alpha / t_1 \ldots .\, t_n)$$

$$E(\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha^{1-n}\; e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\; d\alpha$$

وباستعمال التكامل بالتجزئة

$$u = \frac{\alpha^{2-n}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{2-n}{2}}\;\; n^{\frac{2-n}{2}}} \qquad \rightarrow \frac{du}{d\alpha} = \frac{(2-n)\,\alpha^{1-n}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{2-n}{2}}\;\; n^{\frac{2-n}{2}}}$$

$$d\alpha = \frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{2-n}{2}}\;\; n^{\frac{2-n}{2}}\, n^{1-n}}{2-n}\; du$$

$$= \int_0^{\infty} - \frac{\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{2-n}{2}}\;\; n^{\frac{2-n}{2}}\, e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}}{n-2}\; du$$

$$= \frac{\sqrt{s}\,n - \sqrt{r}\,n}{\left(\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}\; n-2\,\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\; r^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}\;\; n^{\frac{n}{2}}}\;\; \int_0^{\infty}\; e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}\; du$$

التكامل يُحلّ باستعمال التعويض لدالّة كاما غير الكاملة.

$$\int e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}\; du$$

$$= \frac{(2-n)(-1)^{\frac{2-n}{2}}\,\Gamma\left(-\frac{2-n}{2}, -\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}\right)}{2}$$

وبالتعويض المباشر:

$$=\frac{(\sqrt{s}\,n-\sqrt{r}\,n)(-1)^{\frac{2-n}{2}}\Gamma\left(-\frac{2-n}{2},-\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}\right)}{\left((\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\,n-2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\right)\,r^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}\,n^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\frac{\alpha^{2-n}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{2-n}{2}}\,n^{\frac{2-n}{2}}}$$

ومِنْ ثَمَّ يصبح لدينا الآتي:

$$=\frac{(2-n)(\sqrt{s}\,n-\sqrt{r}\,n)(-1)^{\frac{2-n}{2}}\Gamma\left(-\frac{2-n}{2},-\frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})n}{\alpha^2}\right)}{2\left((\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\,n-2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\right)\,r^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}\,n^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int_0^{\infty}\alpha^{1-n}\;e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\;d\alpha$$

وعند التبسيط تصبح المعادلة بالشكل الآتي:

$$=\frac{(2-n)(\sqrt{s}\,n-\sqrt{r}\,n)(-1)^{\frac{2-n}{2}}\Gamma\left(-\frac{2-n}{2},-\frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})n}{\alpha^2}\right)}{2\left((\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\,n-2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\right)\,r^{\frac{1-\frac{n}{2}}{2}}\,n^{\frac{n}{2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{s}-\sqrt{r}\,)\,n^{1-\frac{n}{2}}\,r^{\frac{n-2}{4}}\Gamma\left(\frac{n-2}{2},\;\frac{(\sqrt{s}-\sqrt{r}\,)n}{\sqrt{r}\alpha^2}\right)}{2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}\,(-1)^{\frac{n}{2}}}\quad \dots (23)$$

أمّا بالنسبة للْمَعْلمة β

$$E(\beta/t_{1\ldots}t_n) = \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{\left(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right)^{\frac{n}{2}}} \qquad \beta > 0 ,$$

$$L_q(\hat{\beta}) = E(\beta / t_{1\ldots}t_n)$$

$$E(\beta) = \int_0^{\infty} \beta \, \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{\left(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right)^{\frac{n}{2}}} \, d\beta$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\beta^{-n/2} (\beta+t_i)^n}{\left(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right)^{\frac{n}{2}}} \, d\beta$$

$$= \frac{1}{n+1} \hat{\beta}^{-\frac{n}{2}} (\hat{\beta}+t)^{n+1} \left(\frac{s}{2\hat{\beta}} + \frac{\hat{\beta}}{2r} - 1\right)^{\frac{-n}{2}} \left(-\frac{\hat{\beta}+\sqrt{r(r-s)}-r}{-\sqrt{r(r-s)}+r+t}\right)^{n/2} \left(\frac{-\hat{\beta}+\sqrt{r(r-s)}+r}{\sqrt{r(r-s)}+r+t}\right)^{n/2}$$

$$F_1\left(n+1; \frac{n}{2}, \frac{n}{2}; n+2; \frac{\hat{\beta}+t}{r+t-\sqrt{r(r-s)}}, \frac{\hat{\beta}+t}{r+t+\sqrt{r(r-s)}}\right) \quad \ldots (24)$$

إذْ إنّ F هي دالّة ابيل الهندسية غير الكاملة بالصيغة الآتية، والتي تستعمل لإيجاد حلول تقريبية للتكاملات

$$F = \frac{y^a}{B(a,d-1)} \int_0^1 u^{a-1}(1-uy)^{d-a-1}(1-xuy)^{-b}(1-zuy)^{-c} du$$

وَتّم الحلّ بواسطة برنامج Mathematica ، وتَمّ استعمال مقدّرات الإمكان الأعظم كقيم ابتدائية لتقديرات بيز[11] .

2-3 دالّة الخسارة الموزونة

المقدار البيزي تحت دالّة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة $\delta_{w2}^{\pi}(t)$ يقلّلُ من خسارة الخطأ التربيعية المتوقّع الخلفي [1] أي $E[L_{w2}(\theta,\alpha)\backslash t]$ ، أيْ إنّ:

$$\delta_{w2}^{\pi}(t) = \arg\min_{\alpha \in A} E[L_{w2}(\theta,\alpha)\backslash t]$$

إذْ : $A\{\alpha(t) : \alpha(t) \in (-\infty, \infty)$

$$L_2\,(\theta,\alpha) = \frac{1}{\theta^2}\,(\theta-\alpha)^2$$

هي دالّة خسارة الخطأ التربيعية الموزونة و $\theta \in (-\infty, \infty)$ هي مَعْلَمة غير معروفة ذات أهمّية. من السهل الحصول عليها [1] :

$$\mathrm{E}(\pi,\alpha\backslash t) = E[L_{w2}(\theta,\alpha)\backslash t] = \alpha^2 E(\frac{1}{\theta^2}\backslash t) - 2\alpha E(\frac{1}{\theta}\backslash t) + 1$$

$$\delta_{w2}^{\pi}(t) = \frac{E(\frac{1}{\theta}\backslash t)}{E(\frac{1}{\theta^2}\backslash t)}$$

وبأخذ مشتقّة إلى α ومساواتها إلى 0.

و بالطريقة السابقة نفسها نحُلّ التكامل:

$$F_{(\alpha/t_1 \ldots t_n)} = \alpha^{-n}\, e^{-\frac{n(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)}{\alpha^2}} \quad , \quad \alpha > 0$$

$$L_w(\hat{\alpha}) = \frac{E(\frac{1}{\alpha})/t_{1\ldots}t_n}{E(\frac{1}{\alpha^2})/t_{1\ldots}t_n}$$

$$\mathrm{E}(1/\alpha) = \int_0^{\infty} \alpha^{-n-1}\ e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\ d\alpha$$

استبدل $\mathrm{u}= \frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}}{\alpha^n} \qquad \rightarrow \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\alpha} = -\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}+1}\ \alpha^{-n-1}$

$$\mathrm{d}\alpha == \int_0^{\infty} -\frac{n^{\frac{n}{2}-1}\ e^{u^{\frac{2}{n}}}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{n}{2}}}\ \mathrm{du}$$

$$= \frac{n^{-\frac{n}{2}-1}\ r^{\frac{n}{4}}}{(\sqrt{r}-\sqrt{s})^{\frac{n}{2}}}\ \int_0^{\infty} e^{u^{\frac{2}{n}}}\ d\mathrm{u}$$

وبحلّ هذا التكامل ، وهو تكامل كاما غير الكاملة:-

$$\int e^{u^{\frac{2}{n}}}\,\mathrm{du}$$

وبالتعويض

$$= \frac{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}, -u^{\frac{n}{2}}\right)}{2(-1)^{\frac{n}{2}}}$$

وبعد التراجع عن الاستبدال

$$= \frac{n^{-\frac{n}{2}-1}\ r^{\frac{n}{4}}}{\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\infty} e^{u^{\frac{2}{n}}}\ du$$

يصبح لدينا الآتي:

$$= \frac{r^{\frac{n}{4}}\Gamma\left(\frac{n}{2}, -u^{\frac{2}{n}}\right)}{2\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}}$$

$$u = \frac{\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}}{\alpha^n}$$

$$= \frac{r^{\frac{n}{4}}\Gamma\left(\frac{n}{2}, -\frac{\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)n}{\alpha^2}\right)}{2\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}}$$

$$\int_0^{\infty} \alpha^{-n-1}\ e^{-\frac{\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1\right)n}{\alpha^2}}\ d\alpha$$

$$= \frac{r^{\frac{n}{4}}\Gamma\left(\frac{n}{2}, -\frac{\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)n}{\alpha^2}\right)}{2\left(\sqrt{r}-\sqrt{s}\right)^{\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}}\ n^{\frac{n}{2}}} = Ea1 \quad ..(25)$$

أمّا بالنسبة للمَعْلَمة β

$$E(\beta/t_{1\ldots}t_n) = \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{\left(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right)^{\frac{n}{2}}} \qquad \beta > 0\,,$$

$$L_w(\hat{\beta}) = E\left(\left(\frac{1}{\beta}\right)/t_{1\ldots}t_n\right)$$

$$E(1/\beta) = \int_0^{\infty} \beta^{-1}\ \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{\left(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1\right)^{\frac{n}{2}}}\ d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^{-\frac{n}{2}-2}(\beta+t_i)^n}{(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1)^{\frac{n}{2}}}\ d\beta$$

$$=\frac{1}{n+1}\beta^{-\frac{n}{2}-2}(\beta+t)^{n+1}(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1)^{\frac{-n}{2}}(-\frac{\beta+\sqrt{r(r-s)}-r}{-\sqrt{r(r-s)}+r+t})^{n/2}(\frac{-\beta+\sqrt{r(r-s)}+r}{\sqrt{r(r-s)}+r+t})^{n/2}$$

$$F_1\left(n+1;\frac{n}{2},\frac{n}{2};n+2;\frac{\beta+t}{r+t-\sqrt{r(r-s)}},\frac{\beta+t}{r+t+\sqrt{r(r-s)}}\right)=Eb1\ \ldots(26)$$

$$E(1/\alpha^2)=\int_0^\infty \alpha^{-n-2}\ e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\ d\alpha$$

استبدل $u=\frac{\alpha^{-n-1}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{-n-1}{2}}\ n^{\frac{-n-1}{2}}}$ $\rightarrow \frac{du}{d\alpha}=\frac{(-n-1)\ \alpha^{1-n}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{-n-1}{2}}\ n^{\frac{-n-1}{2}}}$

$$d\alpha=\frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{2-n}{2}}\ \ n^{\frac{2-n}{2}}\ n^{1-n}}{2-n}\ du$$

$$=\int_0^\infty -\frac{\left(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\right)^{\frac{-n-1}{2}}\ \ n^{\frac{-n-1}{2}}\ e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}}{-n-1}\ du$$

$$=\frac{n^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{r}-\sqrt{s}}\left((\sqrt{r}-\sqrt{s}\ )^{\frac{n}{2}}\ n+(\sqrt{r}-\sqrt{s}\ )^{\frac{n}{2}}\right)\ r^{\frac{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{2}}}\ \int_0^\infty\ e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}\ du$$

وبحلّ هذا التكامل

$$\int e^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}\ du$$

$$=\frac{(-n-1)(-1)^{\frac{-n-1}{2}}\Gamma\left(-\frac{-n-1}{2},-\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}\right)}{2}$$ وبالتعويض

$$\frac{n^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\sqrt{r}-\sqrt{s}}\left((\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\ n+(\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\right)\ r^{\frac{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{2}}}\ \int_0^\infty\ \mathrm{e}^{\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}}\ du$$

وبعد التراجع عن

$$=\frac{(-n-1)(-1)^{\frac{-n-1}{2}}\ n^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(-\frac{-n-1}{2},-\frac{1}{u^{\frac{2}{-n-1}}}\right)}{2\sqrt{\sqrt{r}-\sqrt{s}}\left((\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\ n+(\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\right)\ r^{\frac{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{2}}}$$

الاستبدال

يصبح لدينا الآتي :

$$=\frac{\alpha^{-n-1}}{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})^{\frac{-n-1}{2}}\ n^{\frac{-n-1}{2}}}$$

$$=\frac{(-n-1)(-1)^{\frac{-n-1}{2}}\Gamma\left(-\frac{-n-1}{2},-\frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})n}{\alpha^2}\right)}{2\sqrt{\sqrt{r}-\sqrt{s}}\left((\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\ n+(\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\right)\ r^{\frac{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{2}}}$$

$$\int_0^\infty \alpha^{-n-1}\ e^{-\frac{(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}-1)n}{\alpha^2}}\ d\alpha$$

وعند التبسيط تصبحُ بالشكُلّ الآتي:-

$$=\ \frac{(-n-1)(-1)^{\frac{-n-1}{2}}\Gamma\left(-\frac{-n-1}{2},-\frac{(1-\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}})n}{\alpha^2}\right)}{2\sqrt{\sqrt{r}-\sqrt{s}}\left((\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\ n+(\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n}{2}}\right)\ r^{\frac{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{2}}}$$

$$=\ \frac{r^{\frac{n+1}{4}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{(\sqrt{s}-\sqrt{r}\,)n}{\sqrt{r}\alpha^2}\right)}{2\,(\sqrt{r}-\sqrt{s}\,)^{\frac{n+1}{2}}\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}\ n^{\frac{n+1}{2}}} = E\alpha 2\quad \ldots(27)$$

أمّا بالنسبة للمَعْلَمة β

$$\mathrm{E}(\ \beta/t_{1\ldots}t_n) = \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)}\prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1)^{\frac{n}{2}}}\qquad \beta>0\ ,$$

$$L_w(\hat{\beta}) = E((\frac{1}{\beta^2})\ /t_{1\ldots}t_n)$$

$$\mathrm{E}(1/\beta^2) = \int_0^\infty \beta^{-2}\ \frac{\beta^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \prod_{i=1}^{n}(\beta+t_i)}{(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1)^{\frac{n}{2}}}\ d\beta$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^{-\frac{n}{2}-3}\ (\beta+t_i)^n}{(\frac{s}{2\beta}+\frac{\beta}{2r}-1)^{\frac{n}{2}}}\ d\beta$$

$$= \frac{1}{n+1}\ \beta^{-\frac{n}{2}-3}(\beta+t)^{n+1}(\frac{s}{2\beta} + \frac{\beta}{2r} - 1)^{\frac{-n}{2}}\ (-\frac{\beta+\sqrt{r(r-s)}-r}{-\sqrt{r(r-s)}+r+t})^{n/2}(\frac{-\beta+\sqrt{r(r-s)}+r}{\sqrt{r(r-s)}+r+t})^{n/2}$$

$$F_1\left(n+1;\frac{n}{2},\frac{n}{2};n+2;\frac{\beta+t}{r+t-\sqrt{r(r-s)}},\frac{\beta+t}{r+t+\sqrt{r(r-s)}}\right) = Eb2\ \ldots(28)$$

وأخيرا

$$\alpha = {}^{Ea1}/_{Ea2}\quad ,\ \beta = {}^{Eb1}/_{Eb2}\quad \ldots (29)$$

4- البيانات وتحليل النتائج

تَمّ إجراء محاكاة لتوليد بيانات تجربة تسليط ضغط على لوح خرسانة، والبيانات تمثّل الضغط Y طن/ سم مربع ، و الزمن t من ظهور أول صدع في الخرسانة لغاية انهيارها بشكل كامل ، تَمّ توليد البيانات بمعالم التجربة الحقيقية نفسها في لجدول رقم (3) وتَمّ استعمال متوسّط مربعات الخطأ $MSE = \sum_i^n (y_i - \hat{y}_i)^2/n$ إذْ كانت نتائج المحاكاة عند أحجام عينة مختلفة كالآتي:

الجدول رقم (1)

قيم المعالم المقدّرة للطرائق الثلاث

n	MLE		BQ		BW	
	a	b	A	b	a	B
30	146.21	0.33	151.3	0.35	144.31	0.35

80	**149.1**	**0.35**	**157.5**	**0.39**	**150.4**	**0.36**
150	**149.6**	**0.35**	**161.1**	**0.49**	**152.1**	**0.39**

من الجدول رقم (1) نلاحظ أنّ بزيادة حجم العينة يؤدّي إلى نقصان في قيمة المقدرات

الجدول رقم (2)

قيم MSE للطرائق الثلاث

n	MLE	BQ	BW
30	**22.67**	**21.34**	**24.23**
80	**20.31**	**19.10**	**21.33**
150	**19.21**	**17.24**	**18.33**

من الجدول رقم (2) نلاحظ عندما يكون حجم العينة 30 هناك أفضلية لمقّدر بيز بخسارة تربيعية ، و تستمرّ عذه الأفضلية عند ازدياد حجم العينة.

أمّا بالنسبة للبيانات الحقيقية فكانت كالآتي:

الجدول رقم (3)

الضغط Y المسلّط و الزمن t

Y	t	Y	T	Y	T	Y	T
0.0041	**86**	**0.0099**	**133**	**0.0082**	**153**	**0.0058**	**188**
0.0068	**100**	**0.0099**	**136**	**0.0081**	**155**	**0.0056**	**191**
0.0077	**107**	**0.0099**	**136**	**0.008**	**157**	**0.0056**	**191**
0.0083	**113**	**0.0099**	**136**	**0.0077**	**166**	**0.0055**	**192**

0.0088	**114**	**0.0091**	**144**	**0.0077**	**166**	**0.0053**	**192**
0.0092	**116**	**0.0091**	**146**	**0.0077**	**166**	**0.0041**	**201**
0.0095	**118**	**0.009**	**148**	**0.0073**	**171**	**0.0037**	**208**
0.0096	**122**	**0.009**	**148**	**0.007**	**175**	**0.0036**	**211**
0.0098	**126**	**0.009**	**148**	**0.006**	**179**	**0.0032**	**213**
0.0099	**126**	**0.009**	**148**	**0.006**	**183**	**0.003**	**213**

إذْ كانت النتائج للبيانات الحقيقية كالآتي:

الجدول رقم (4)

المعالم المقدّرة للطرائق الثلاث

MLE		**BQ**		**BW**	
a	**b**	**A**	**b**	**A**	**b**
151.2	**0.22**	**157.3**	**0.33**	**147.32**	**0.31**

الجدول رقم (5)

MLE	**BQ**	**BW**
28.43	22.20	23.03

5- الاستنتاجات

ممّا تَمّ عرضه في البيانات والنتائج نلاحظ أنّ مقدّر بيز بدالّة خسارة تربيعية BQ ، يقدّم أداء ممتازًا ، ويكون الأفضل من باقي المقدّرات، و بشكُلّ أقلّ يليه مقدّر بيز بدالّة خسارة موزونة BW ، و لم تظهر أيّ أفضلية لمقدّر الإمكان الأعظم MLE ، في كُلّ من البيانات الحقيقية والبيانات التي تَمّ توليدها.

نوصي باعتماد مقدّر بيز بدالّة خسارة تربيعية BQ ، لتقدير معالم توزيع برينباوم -ساوندرز، وكذلك بالتوسّع في إيجاد مقدّرات لامعلمية وحصينة، وكذلك التوسّع في دراسة دوال خسارة أخرى بالنسبة إلى تقدير بيز.

المصادر:

[1] Achcar, J.A. (1993), "Inferences for the Birnbaum-Saunders fatigue life model using Bayesian methods", *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 15, 367 - 380.

[2] Achcar, J.A., Moala, F.A. (2010), "Use of MCMC methods to obtain Bayesian inferences for the Birnbaum-Saunders distribution in the presence of censored data and covariates", *Advances and Applications in Statistics*, vol. 17, 1 - 27.

[3] Balakrishnan, N., Leiva, V., Sanhueza, A., Vilca, F. (2009), "Estimation in the Birnbaum-Saunders distribution based on scale-mixture of normals and the EMalgorithm", *Statistics and Operations Research Transactions*, vol. 33, 171 - 191.

[4] Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969a), "A new family of life distribution", *Journal of Applied Probability*, vol. 6, 319 - 327.

[5] Birnbaum, Z.W., Saunders, S.C. (1969b), "Estimation for a family of life distributions with applications to fatigue", *Journal of Applied Probability*, vol. 6, 328 - 347.

[6] Desmond, A.F., Yang, Z. (1996), "Shortest prediction intervals for the Birnbaum-Saunders distribution", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 24, 1383 - 1401.

[7] Fletcher, H. (1911), "A verification of the theory of Brownian movements and a direct determination of the value of NE for gaseous ionization", *The Physical Review*, vol. 33, 81 - 110.

[8] Freudenthal, A.M., Shinozuka, M. (1961), “Structural safety under conditions of ultimate load failure and fatigue”, *Technical Report WADD-TR-61-77*, Wright Air Development Division.

[9] Konstantinowsky, D. (1914), “Elektrische Ladungen und Brownsche Bewegung schrkleiner Metallteilchen Gasen”, *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften*, vol. 123, 1697 - 1752.

[10] Lemonte, A.J., Ferrari, S.L.P. (2011c), “Improved likelihood inference in Birnbaum-Saunders regression”, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 40, 232 - 243.

[11] Upadhyay, S.K., Mukherjee, B. (2010), “Bayes analysis and comparison of accelerated Weibull and accelerated Birnbaum-Saunders models”, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 39, 195 - 213.