المجلة العراقية للعلوم الاقتصادية / عدد خاص لوقائع المؤتمر العلمي الدولي/ السادس/ والسنوي/ السابع عشر/لسنة 2023
بعنوان / القيادة الرشيدة والتنمية المستدامة سبل الإصلاح الاقتصادي العراقي
Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

التقدير الحصين لأنموذج الانحدار الخطي العشوائي المستعمل لتقدير تأثير نسبة السكر في الدم على حجم كريات الدم الحمراء

Hippocampal estimation of the random linear regression model used to estimate the effect of blood sugar on the size of red blood cells

اماني عماد لعيبي /الباحثة　　　أ. د احمد شاكر محمد طاهر المتولي
Amani Imad Laibi　　　Ahmed ShakerMohamed
amaniemad92@uomustansiriyah.edu.iq　　　ahmutwali@uomustansiriyah.edu.iq
كلية الادارة والاقتصاد / الجامعة المستنصرية

الكلمات المفتاحية: المتغير التفسيري العشوائي، انموذج الانحدار العشوائي، طريقة الامكان الاعظم المعدلة (MMLE)، طريقة التقدير MM ، طريقة الامكان التجريبي الحصينة (REL).

Keywords: Random Explanatory Variable, Random Linear Regression model, Modified Maximum likelihood Method, MM estimation method, Robust Empirical Likelihood Method

المستخلص:

انموذج الانحدار بمتغير توضيحي عشوائي من النماذج الواسعة الاستعمال في تمثيل علاقة الانحدار بين المتغيرات في مختلف الظواهر الاقتصادية او الحياتية، يطلق على هذا الانموذج بأنموذج الانحدار الخطي العشوائي. في هذا الانموذج القيم المختلفة للمتغير التوضيحي تحدث باحتمالية معينة، بدلا من كونها ثابتة في العينات المتكررة، لذا فأنها تعارض أحد الفرضيات الأساسية لأنموذج الانحدار الخطي، الامر الذي يؤدي الى أن مقدرات المربعات الصغرى تفقد بعض او جميع خواصها المثلى وذلك حسب طبيعة العلاقة بين المتغير التفسيري العشوائي وحدود الخطأ العشوائي.

كبدائل لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية، تم استعمال طريقة الإمكان الأعظم المعدلة (MMLE) والتي استعملت سابقا من قبل العديد من الباحثين في تقدير معاملات انموذج الانحدار العشوائي، كما تم توظيف طريقتين استعملتا في تقدير نماذج الانحدار الخطي التي تعاني من بعض المشاكل القياسية او في حالة احتواء قيم العينة على قيما شاذة او متطرفة، تلك الطريقتين هما طريقة (MM) وطريقة الإمكان التجريبية الحصينة. الطرائق الثلاثة تعد من طرائق التقدير الحصينة.

استعملت طرائق التقدير الحصينة سابقة الذكر لتقدير علاقة الانحدار بين حجم كريات الدم الحمراء (PCV) كمتغير استجابة وسكر الدم (RBS) كمتغير توضيحي عشوائي بالاعتماد على بيانات عينة عشوائية مؤلفة من 30 مريض من المصابين بأمراض القلب، افرزت نتائج التطبيق العملي تفوق طريقة الامكان الاعظم المعدلة بالنسبة لبيانات عينة البحث.

Abstract

The regression model with a random explanatory variable is one of the widely used models in representing the regression relationship between variables in various economic or life phenomena, this model is called the random linear regression model. In this model, the different values of the explanatory variable occur with a certain probability, rather than being fixed in repeated samples. Therefore, it contradicts one of the basic assumptions of the linear regression model, which leads to the least squares estimators losing some or all of their

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

optimal properties, depending on the nature of the relationship between the random explanatory variable and the random error terms. As an alternative to the ordinary least squares method, the modified maximum likelihood method (MMLE) was used, which was previously used by many researchers in estimating the coefficients of the random regression model, two methods have also been employed, which were used in estimating linear regression models that suffer from some standard problems, or if the sample values contain outliers or extreme values, these two methods are the MM method and the robust empirical likelihood method. The three methods are among the robust estimation methods. The aforementioned robust estimation methods were used to estimate the regression relationship between red blood cell volume (PCV) as a response variable and blood sugar (RBS) as a random explanatory variable based on the data of a random sample of 30 patients with heart disease. The results of the practical application revealed the superiority of the modified maximum likelihood method for the data of the research sample.

1- المقدمة:

من الفرضيات الأساسية لأنموذج الانحدار الخطي هي ان المتغيرات التفسيرية تكون ثابتة في العينات المتكررة، غير ان هذا الافتراض قد يكون من الناحية العملية غير متحققاً، كما هو الحال في اغلب الظواهر الاقتصادية والحياتية، اذ تكون المتغيرات التفسيرية عشوائية، بمعنى قيم تلك المتغيرات ليست ثابتة، لذلك فأن القيم المختلفة للمتغيرات التفسيرية تحدث باحتمالية معينة . في مثل هذه الحالات يتم تحديد قيم المتغير التفسيري جنبًا إلى جنب مع قيم متغير الاستجابة كنتيجة لبعض آليات الاحتمالات، بدلاً من التحكم بقيمها من قبل القائمين بعمل التجربة. في حال اعتماد طريقة المربعات الصغرى لتقدير معاملات انموذج الانحدار بمتغيرات تفسيرية عشوائية فان تقديرات تلك الطريقة لمعاملات الانموذج تفقد بعض او جميع خواصها المثلى، وذلك يعتمد على نوع العلاقة بين المتغير أو المتغيرات التفسيري العشوائي وحدود الخطأ العشوائي. في هذه الحالة يجب البحث عن طرائق بديلة عن طريقة المربعات الصغرى تتميز بالكفاءة ولا تتأثر كثيراً بالانحراف عن افتراضات انموذج الانحدار الخطي ومن تلك الطرائق هي الطرائق الحصينة، ومن تلك الطرائق، طريقة الامكان الاعظم المعدلة (MMLE) وطريقة MM وطريقة الامكان التجريبي الحصينة (REL).

أول من تعامل مع انموذج الانحدار بمتغيرات تفسيرية عشوائية هو الباحث Kerridge في عام 1967 [4] ، اذ افترض ان قيم المتغيرات التفسيرية المناظرة لقيم متغير الاستجابة مسحوبة من مجتمع ذي توزيع طبيعي متعدد المتغيرات ومستقلة عن حدود الخطأ العشوائي للأنموذج، وعمل على تحليل الخطأ الناتج عن عملية التقدير، أوضح انه من المفيد دراسة انموذج الانحدار بمتغيرات تفسيرية عشوائية بالرغم من اقتراح Ehrenberg في عام 1963 بان دراسة هذا الانموذج يكون غير مجدي ومحدود خصوصا عندما يكون عدد المتغيرات التفسيرية كبير. Lai و Wei عام 1981، [6]، عملا على دراسة خصاص مقدرات المربعات الصغرى لنماذج الانحدار العشوائية في ضوء افتراضات خاصة بالمتغير التفسيري العشوائي وحدود الخطأ العشوائي.

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

Tiku، Vaugham، 1997، [11]، عملا على استعمال طريقة الإمكان الأعظم المعدلة modified maximum likelihood method في تقدير معاملات انموذج الانحدار الثنائي بمتغير تفسيري عشوائي اذ بينا ان استعمال مقدرات الإمكان الأعظم في تقدير هذ الانموذج تكون مستعصية على الحل ويصعب حلها تكراريًا، وبينا ان مقدرات الإمكان الأعظم المعدلة هي دوال صريحة بمشاهدات العينة وبالتالي فهي سهلة الحساب وإنها كفؤة بشكل تقريبي تمامًا، وبالنسبة للعينات الصغيرة ، فهي كفؤة بشكل كامل. وفي عام 2000 استعملا أيضا طريقة الإمكان الأعظم المعدلة في تقدير انموذج الانحدار بمتغير تفسيري عشوائي اذ افترضا ان هذا المتغير يتوزع وفق توزيع القيمة المتطرفة extreme value distribution وان التوزيع الشرطي لمتغير الاستجابة هو التوزيع الطبيعي، وان تلك التقديرات تكون كفؤة بشكل كبير كما اشتقا طريقة اختبار الفرضية الخاصة بمعاملات الانموذج.
Islam، Tiku، 2004، [2] اشتقا مقدرات الإمكان الأعظم المعدلة ومقدرات M لمعاملات انموذج الانحدارالخطي المتعدد تحت افتراض ان الأخطاء العشوائية لا تتبع التوزيع الطبيعي اذ توصلا الى ان تلك المقدرات تكون كفؤة وحصينة، وان مقدرات المربعات الصغرى الاعتيادية تكون اقل كفاءة.
Sazak، Tiku، Islam، 2006، [9] استعملا مقدرات الإمكان الأعظم المعدلة لمعاملات انموذج الانحدار الخطي العشوائي التي تتصف بالكفاءة والحصانة وبافتراض ان كل من المتغير التفسيري العشوائي والاخطاء العشوائية تتبع توزيع اللوجستي العام Generalized logistic distribution.
نفس النتيجة توصل اليها Tiku Islam، 2010، [3] في اعتماد نفس الطريقة الحصينة لتقدير انموذج الانحدار الخطي المتعدد عندما لا يتبع كل من المتغير التفسيري والاخطاء العشوائية التوزيع الطبيعي.
في هذا البحث تم استعمال طريقة الإمكان الاعظم المعدلة في تقدير معاملات انموذج الانحدار الخطي بمتغير تفسيري عشوائي علاوة عن استعمال طريقتين حصينتين، طريقة MM و طريقة الامكان التجريبي الحصينة، تلكما الطريقتين تم استعمالهما في تقدير معاملات انموذج الانحدار بوجود القيم الشاذة او في حالة معاناة الانموذج من بعض المشاكل القياسية ولكن لم يستعملا سابقا في تقدير انموذج الانحدار بمتغير تفسيري عشوائي، لذا سيتم توظيفهما لتقدير معاملات هذا الانموذج، اذ يهدف البحث الى تقدير علاقة الانحدار بين حجم كريات الدم الحمراء (PCV) كمتغير استجابة وسكر الدم (RBS) كمتغير توضيحي عشوائي باستعمال الطرائق الحصينة موضوع البحث ومن ثم المقارنة بين ما تفرزه تلك الطرائق من نتائج التقدير واعتماد افضل طريقة باعتماد معيار دقة التقدير RMSE (الجذر التربيعي لمتوسط مربعات الأخطاء).

2- انموذج الانحدار الخطي بمتغير تفسيري عشوائي:

بافتراض انموذج الانحدار الخطي البسيط المبين بالعلاقة الآتية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

لعينة عشوائية بحجم n فأن Y_i هو متغير عشوائي ذو قيما مستقلة يمثل متغير الاستجابة والذي يفترض ان يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي $E(Y_i)$ وتباين σ^2، X_{ij} ، اذ أن $i = 1,2, \ldots, n$ ، $j = 1,2, \ldots, p$ ، تمثل p من المتغيرات التفسيرية والذي يفترض ان تكون ثابتة للعينات المتكررة، u_i هي الأخطاء العشوائية للأنموذج والتي يفترض ان تكون قيمها مستقلة وتتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط يساوي 0 وتباين ثابت يساوي σ^2 . في الكثير من التطبيقات العملية المتغير التفسيري لا يكون ثابت وانما متغير عشوائي وفي هذه الحالة فأن انموذج الانحدار وفق المعادلة (1) يسمى بأنموذج الانحدار العشوائي، [3]، [5]. لغرض التبسيط سيتم التطرق الى حالة وجود متغير تفسيري واحد أي

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

انموذج احدار خطي بسيط. في حالة كون المتغير التفسيري عشوائي فان القيم المختلفة له تحدث وفق احتمالات معينة، بمعنى اخر انها تتحدد مع قيم متغير الاستجابة المناظرة لها وفق توزيع احتمالي معين بدلا من كونها مسيطر عليها من قبل القائم بعملية التجربة. المتغير التفسيري العشوائي يمكن ان يتبع التوزيع الطبيعي أي نفس التوزيع الاحتمالي لمتغير الاستجابة وفق افتراضات انموذج الانحدار، أو تتحد قيمه وفق أي توزيع احتمالي اخر، [3].

بافتراض ان التوزيع الاحتمالي للمتغير التفسيري X هو توزيع القيمة المتطرفة وفق الدالة الاحتمالية الآتية،[12] :

$$f(x) = \frac{1}{\theta} exp[-((x-\alpha)/\theta) - exp(-\frac{x-\alpha}{\theta})] \quad ، \quad -\infty < x < \infty \qquad (2)$$

اذ أن، α: تمثل معلمة الموقع Location parameter، θ: تمثل معلمة القياس Scale parameter. وعندما تكون $\alpha = 0$ و $\theta = 1$ نحصل على توزيع القيمة المتطرفة القياسي. اما التوزيع الاحتمالي الشرطي لمتغير الاستجابة Y فيكون التوزيع الطبيعي وفق الدالة الاحتمالية الشرطية الآتية:

$$f(Y|X=x) = [2\pi\sigma^2(1-\rho^2)]^{-\frac{1}{2}} exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2((1-\rho^2)}\left(y-\beta_0 - \rho\frac{\sigma}{\theta}(x-\alpha)\right)^2\right] \quad -\infty < y < \infty \qquad (3)$$

اذ أن ، $\beta_0 \in R$ ، $\beta_1 = \rho\frac{\sigma}{\theta}$ ، $\sigma > 0$ و $-1 < \rho < 1$ ، $\boldsymbol{u} = y - \beta_0 - \rho\frac{\sigma}{\theta}(x-\alpha)$ ،
اذ ان u تمثل حدود الخطأ العشوائي التي تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط شرطي يساوي الصفر ($E(u|X=x) = 0$) وتباين شرطي ثابت $Var(u / X) = \sigma^2(1-\rho^2)$],اذ أن، [3]:

$$E(Y|X=x) = \beta_0 - \rho\frac{\sigma}{\theta}(x-\alpha) \qquad (4)$$

3- طرائق التقدير الحصينة لمعاملات انموذج الانحدار الخطي العام بمتغير تفسيري عشوائي:

تتضمن هذه الفقرة عرض لطرائق التقدير الحصينة موضوع البحث والتي اعتمدت في تقدير انموذج الانحدار الخطي البسيط بمتغير تفسيري عشوائي.

1-3 طريقة الامكان الاعظم المعدلة : Modified Maximum Likelihood Method (MMLE)

عملية تقدير معاملات انموذج الانحدار بمتغير تفسيري عشوائي وفق المعادلة (1) باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وبالاعتماد على الدالتين الاحتمالية (2) و (3)، تكون صعبة وغير مجدية، اذ ان المعادلات الناتجة من اشتقاق دالة الإمكان ليس لها حلول صريحة وعملية حلها بالطرق التكرارية يكون محفوف بالصعوبات لعدم تحقق التقارب بشكل سريع او التقارب لقيم خاطئة علاوة عن ان لها جذور متعددة. لذا يتم استعمال طريقة الإمكان الأعظم المعدلة والمقترحة من قبل Vaugham،Tiku، [11].

دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغير الاستجابة Y والمتغير التفسيري X هي كالآتي:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$f(y,x) = f(x)f(y\backslash x) = \left(\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right)(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\theta}\right) - \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\theta}\right)\right] exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2((1-\rho^2)}(u_i)^2\right] \quad (5)$$

وعليه فأن دالة الإمكان تكون وفق الصيغة الآتية:

$$L = (\theta)^{-n}(\sigma)^{-n}(1-\rho^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{x_i-\alpha}{\theta}\right) + \exp\left(-\frac{x_i-\alpha}{\theta}\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2\right] \quad (6)$$

وان لوغاريتم دالة الإمكان يكون كما في الصيغة الآتية، بافتراض أن ($z_i = \left(\frac{x_i-\alpha}{\theta}\right)$)

$$\mathrm{LnL} = -\mathrm{n}\ln\theta - \mathrm{n}\ln\sigma - \frac{\mathrm{n}}{2}\ln(1-\rho^2) - \sum_{i=1}^{n}(z_i + \exp(-z_i)) - \frac{1}{2\sigma^2((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 \quad (7)$$

بالاشتقاق الجزئي للمعادلة (7) بالنسبة للمعاملات (ρ، α ، $\boldsymbol{\sigma}$ ، β_0، β_1، θ) ومساواتها بالصفر نحصل على معادلات الإمكان الأعظم التالية التي بحلها نحصل على تقديرات تلك المعاملات:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} \exp(-z_i) - \frac{\rho}{\theta\sigma(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} z_i \exp(-z_i) + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{\rho}{\theta\sigma(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} z_i u_i = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_0} = \frac{1}{\sigma^2((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} u_i = 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 + \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} z_i u_i = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \frac{n\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)^2}\sum_{i=1}^{n} {u_i}^2 + \frac{1}{\sigma(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} z_i u_i = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \frac{\theta}{\sigma^2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} z_i u_i = 0 \quad (13)$$

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

المعادلتين (9,8) تتضمن حدود صعبة الحل مما يؤدي الى ان مجموعة المعادلات (8-13) ليس لها حلول صريحة والتي يجب حلها باستعمال الطرائق التكرارية، لذا فان تقديرات الإمكان الأعظم تكون صعبة الحصول. لمعالجة هذه المشكلة نلجأ الى تحويل المتغير التفسيري الى الإحصاءات المرتبة $\boldsymbol{x}_{(i)}$ ، $1 \le i \le n$ ، من خلال ترتيب قيمه تصاعديا وكالآتي:

$$\boldsymbol{x}_{(1)} \le \boldsymbol{x}_{(2)} \le \cdots \le \boldsymbol{x}_{(n)} \tag{14}$$

وبالاعتماد على القيم المرتبة للمتغير التفسيري فان $\boldsymbol{y}_{[i]}$ تمثل قيم متغير الاستجابة المناظرة للقيم المرتبة $x_{(i)}$ ، كذلك الصيغة القياسية z_i والاخطاء العشوائية u_i يعاد كتابتها كالآتي:

$$\boldsymbol{z}_{(i)} = \frac{x_{(i)} - \alpha}{\theta} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{u}_{[i]} = \boldsymbol{y}_{[i]} - \beta_0 - \rho \frac{\sigma}{\theta}\left(\boldsymbol{x}_{(i)} - \alpha\right) \tag{16}$$

بما ان المجموع الكلي للأخطاء لا يتأثر بترتيب القيم مما يؤدي الى ان $\sum_{i=1}^{n} u_{[i]} = 0$ و $\sum_{i=1}^{n} z_{(i)} u_{[i]} = 0$. بالاعتماد على ما تقدم يعاد كتابة المعادلات (8-13) كالآتي:

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \alpha} \equiv \frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} \exp\left(-z_{(i)}\right) \quad = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} \equiv -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)} \exp\left(-z_{(i)}\right) = 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta_0} \equiv \frac{1}{\sigma^2((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} u_{[i]} \ = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \sigma} \equiv -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} {u_{[i]}}^2 = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \rho} \equiv \frac{n\rho}{(1-\rho^2)} - \frac{\rho}{\sigma^2(1-\rho^2)^2}\sum_{i=1}^{n} {u_{[i]}}^2 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \beta_1} \equiv \frac{\theta}{\sigma^2(1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} z_{(i)} u_{[i]} = 0 \tag{22}$$

المعادلات (17-22) تمثل معادلات الإمكان الأعظم المعدلة. لتحقيق الصيغة الخطية لـ $\exp\left(-z_{(i)}\right)$ يمكن استعمال اول حدين من متسلسلة تايلر بافتراض ان $\boldsymbol{t}_{(i)} = E[\boldsymbol{z}_{(i)}]$ كالآتي:

$$\exp\left(-z_{(i)}\right) \cong \exp\left(-t_{(i)}\right) + \left[z_{(i)} - t_{(i)}\right]\left\{\frac{d}{dz} e^{-z}\right\}_{z=t_{(i)}} \tag{23}$$

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

والتي يمكن إعادة كتابتها كالآتي:

$$\exp\left(-z_{(i)}\right) = a_i + b_i \boldsymbol{z}_{(\boldsymbol{i})} \qquad , \mathbf{1} \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{n} \tag{24}$$

اذ أن:

$$a_i = e^{-\boldsymbol{t}_{(i)}}\left(1 + \boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{i})}\right) \tag{25}$$

$$b_i = -\left\{\frac{d}{dz} e^{-z}\right\}_{z=\boldsymbol{t}_{(\boldsymbol{i})}} \tag{26}$$

مع ملاحظة أن $b_i \ge 0$ لكل i= 1,2,…, n . المعادلتين (17) و(18) يعاد كتابتهما بعد تعويض المعادلة (24) في كل منهما لتصبحا:

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \alpha} \equiv \frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + b_i z_{(i)}\right) \quad = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial \ln L^*}{\partial \theta} \equiv -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} z_{(i)} - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} z_{(i)}\left(a_i + b_i z_{(i)}\right) \quad = 0 \tag{28}$$

بحل المعادلات (27) ، (28). و (19) – (22) نحصل على ما يسمى بتقديرات الإمكان الأعظم المعدلة والتي تتصف في حالة العينات الكبيرة بأنها غير متحيزة ولها تباين يساوي اقل تباين محدود MVB ، وانها كفؤة بالكامل fully efficient ، وفي حالة العينات الصغيرة بانها على الاغلب كفؤة بالكامل، كما انها دوال صريحة بمشاهدات العينة وسهلة الحساب.

من المعادلة (27) وبعد التعويض عن $z_{(i)}$ نحصل على تقدير المعلمة $\boldsymbol{\alpha}$ وكالآتي:

$$\frac{n}{\theta} - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta a_i + b_i (x_{(i)} - \alpha)}{\theta}\right) = 0 \tag{29}$$

وبالقيام ببعض العمليات الرياضية نحصل على تقدير α

$$\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{i})} + \sum_{i=1}^{n} (1 - a_i) \hat{\theta}}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \tag{30}$$

التي يمكن إعادة كتابتها كالآتي:

$$\hat{\alpha} = \mathrm{K} + \mathrm{D}\hat{\theta} \tag{31}$$

اذ ان:

$$\mathrm{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i \boldsymbol{x}_{(\boldsymbol{i})}}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \quad \text{and} \quad \mathrm{D} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \sum_{i=1}^{n} (1 - a_i)$$

تقدير المعلمة θ نحصل عليه من المعادلة (28) بعد التعويض عن قيمة $\boldsymbol{z}_{(\boldsymbol{i})}$ واجراء بعض العمليات الحسابية وكما مبين ادناه:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \left(x_{(i)} - \hat{\alpha}\right)^2 - \left[\hat{\theta}\left(n\hat{\theta} + \sum_{i=1}^{n} (x_{(i)} - \hat{\alpha})\right] - \hat{\theta} \sum_{i=1}^{n} a_i \left(x_{(i)} - \hat{\alpha}\right) = 0 \tag{32}$$

المعادلة (32) يمكن إعادة كتابتها بعد التعويض عن $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ بما يساويها وفق المعادلة (31) كالآتي:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$n\hat{\theta}^2 - \hat{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - K\right)(1-a_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x_{(i)} - K\right)^2 = 0 \quad (33)$$

المعادلة (32) يمكن كتابتها بصيغة أبسط كالآتي:

$$A\hat{\theta}^2 - B\hat{\theta} + C = 0 \quad (34)$$

بافتراض ان: $A = n$ ،$C = \sum_{i=1}^{n} b_i\left(x_{(i)} - k\right)^2$, $B = \sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - k\right)(1-a_i)$

فأن الحل للمعادلة (34) يمثل تقدير المعلمة θ ، أي أن:

$$\hat{\theta} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4aC}}{2a} \quad (35)$$

وللحصول على تقدير المعلمة β_0 نعوض عن قيمة $u_{[i]}$ في المعادلة (19) واجراء بعض العمليات الحسابية كالآتي:

$$\frac{1}{\sigma^2((1-\rho^2)}\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_{[i]} - \hat{\beta}_0 - \rho\frac{\sigma}{\theta}\left(\boldsymbol{x}_{(i)} - \alpha\right) = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}(\bar{x} - \hat{\alpha}) \quad (36)$$

لإيجاد تقدير σ نعيد كتابة $u_{[i]}$ بالتعويض عن $\hat{\beta}_0$ في المعادلة (16) بما يساويها بموجب المعادلة)(36وكالآتي:

$$u_{[i]} = \left(y_{[i]} - \overline{y}\right) - \hat{\rho}\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)\left(x_{(i)} - \overline{x}\right) \quad (37)$$

بتربيع الطرفين وأخذ المجموع لكل قيم حجم العينة نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n} u_{[i]}^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_{[i]} - \overline{y}\right) - \hat{\rho}\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)\left(x_{(i)} - \overline{x}\right)\right]^2 \quad (38)$$

بتعويض المعادلة (38) في المعادلة (20) واجراء بعض العمليات الحسابية نحصل على المعادلة الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - \bar{y})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(y_{[i]} - \bar{y})\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)\hat{\rho}\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}} + \frac{\hat{\rho}^2\hat{\sigma}^2}{\hat{\theta}^2}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \bar{x}\right)^2 - n\sigma^2 + n\sigma^2\rho^2 = 0 \quad (39)$$

المعادلة الأخيرة يمكن إعادة كتابتها بدلالة التباين والتباين المشترك للعينة ولكل من $y_{[i]}$ و $x_{(i)}$ وكالآتي:

$$\mathrm{n}s^2{}_y - 2ns_{xy}\frac{s_{xy}\hat{\theta}}{s^2{}_x\hat{\sigma}}\cdot\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}} + \frac{s^2{}_{xy}\hat{\theta}^2}{s^4{}_x\hat{\sigma}^2}\cdot\frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\theta}^2}ns^2{}_x - n\sigma^2 + n\sigma^2\frac{s^2{}_{xy}\hat{\theta}^2}{s^4{}_x\hat{\sigma}^2} = 0 \quad (40)$$

والحل للمعادلة الأخيرة يمثل تقدير σ وكما مبين ادناه:

$$\hat{\sigma} = \left[s^2{}_y + \frac{s^2{}_{xy}}{s^2{}_x}\left(\frac{\hat{\theta}^2}{s^2{}_x} - 1\right)\right]^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

وللحصول على تقدير β_1 نعوض عن قيمة $u_{[i]}$ و $z_{(i)}$ في المعادلة رقم (22) واجراء بعض العمليات الحسابية لنحصل على المعادلة الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_{(i)} - \alpha\right)\left(y_{[i]} - \hat{\beta}_0\right) - \left(x_{(i)} - \alpha\right)^2\hat{\beta}_1 = 0 \quad (42)$$

وبحل تلك المعادلة نحصل على تقدير β_1 :

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{(i)}-\hat{\alpha})(y_{[i]}-\hat{\beta}_0)}{(x_{(i)}-\hat{\alpha})^2} \qquad (43)$$

تقدير معلمة الارتباط ρ نحصل عليه من المعادلة (21) بعد التعويض عن مجموع مربعات الأخطاء العشوائية $u_{[i]}$ ، اذ يمكن إعادة كتابتها بدلالة التباين والتباين المشترك للعينة ولكل من $y_{[i]}$ و $x_{(i)}$ بعد اجراء بعض العمليات الحسابية لنحصل على الصيغة الآتية:

$$\left[\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)^2 S_x^2 + \hat{\sigma}^2\right]\hat{\rho}^2 - 2\left[\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)S_{xy}\right]\hat{\rho} - \left[\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}\left(\frac{\hat{\theta}}{S_x^2} - 1\right)\right] = 0 \qquad (44)$$

والتي يمكن إعادة كتابتها كالآتي:

$$a\hat{\rho}^2 - b\hat{\rho} - c = 0 \qquad (45)$$

اذ أن:

$$a = \left[\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)^2 S_x^2 + \hat{\sigma}^2\right] b = -2\left[\left(\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\theta}}\right)S_{xy}\right] \;,\; c = -\left[\frac{S_{xy}^2}{S_x^2}\left(\frac{\hat{\theta}}{S_x^2} - 1\right)\right]$$

وبحل المعادلة (45) نحصل على تقدير المعلمة ρ وفق الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\theta}S_{xy}}{\hat{\sigma}S_x^2} \qquad (46)$$

تقديرات طريقة الإمكان الأعظم المعدلة تم اشتقاقها بافتراض ان التوزيع الاحتمالي للمتغير التفسيري X هو توزيع القيمة المتطرفة ولكن يمكن ان يكون أي توزيع احتمالي اخر تفرضه علينا البيانات قيد البحث.

2-3: طريقة التقدير MM: Minimum M-Estimation method

تعد طريقة التقديرMM حالة خاصة من طريقة التقدير الحصينة M، والتي تم اقتراحها من قبل Yohai عام 1986،[1]،[13] هذه الطريقة الحصينة تتصف بانها كفوؤة بدرجة عالية في حالة كون الأخطاء العشوائية لأنموذج الانحدار تتبع التوزيع الطبيعي، وان لها نقطة انهيار عالية (BP=0.5). تتلخص عملية تقدير معاملات انموذج الانحدار بموجب هذه الطريقة بثلاث مراحل والمبينة ادناه [10] [1]:

المرحلة الأولى: فيها يتم الحصول على تقدير اولي حصين لمعاملات انموذج الانحدار ولتكن $\hat{\beta}_0$ هذا التقدير الاولي يمكن الحصول عليه باستعمال طريقة التقدير الحصينة S، يتصف هذا التقدير الاولي بأنه متسق وحصين وله نقطة انهيار عالية (BP=0.5) ولا يشترط ان يكون كفوء.

المرحلة الثانية: يتم حساب قيم البواقي e_i لأنموذج الانحدار المقدر وبالاعتماد على التقدير الاولي الحصين الذي تم الحصول عليه في المرحلة الأولى اذ أن:

$$e_i = Y_i - \hat{\beta}_0^T X_i \qquad 1 \le i \le n \qquad (47)$$

اذ ان :

$Y_i \in R$ والتي تمثل قيم متغير الاستجابة.

$X_i \in R^p$ والتي تمثل قيم المتغيرات التفسيرية.

$\hat{\beta}_0$ التقدير الاولي الحصين وكما تم تعريفه سابقا.

بعد الحصول على قيم البواقي يتم تقدير الانحراف المعياري لها باعتماد طريقة التقدير الحصينة M والذي يمثل الحل للمعادلة الآتية:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\rho_0\left(\frac{e_i}{S}\right)=\frac{b}{\alpha} \quad (48)$$

بحيث أن الثابت b يحقق المعادلة الآتية:

$$\frac{b}{\alpha}=0.5 \quad (49)$$

وأن ρ_0 دالة تحقق الافتراضات الآتية:
1- $\rho(0)=0$. 2- $\rho(-v)=\rho(v)$. 3- إذا كـان $0\le v\le a$ فـأن $\rho(v)\le\rho(a)$ 4- ρ دالـة مستمرة. 5- إذا كانت $\alpha=sup\rho(v)$ فأن $0<\alpha<\infty$. 6- إذا كان $\rho(v)\le\alpha$ و$0\le v<a$ فأن $\rho(v)<\rho(a)$.
الثابت b يمكن ان يعرف على انـه $E_{\emptyset}(\rho_0(v))$ ، وان $\emptyset$ تشير الـى التوزيـع الطبيعي القياسي، وان $\alpha=max.\rho_0(v)$.
اثبت الباحث Huber ،1981، المعادلة (49) تعطي تقدير حصين ذو نقطـة انهيار عاليـة (BP=0.5)، [13].

المرحلة الثالثة: بالاعتماد على دالة وزن أخرى مثل ρ_1 بحيث تحقق الافتراضات الستة المذكورة في المرحلة الثانية وبحيث أن:

$$\rho_1(v)\le\rho_0(v) \quad (50)$$

$$sup\rho_1(v)=sup\rho_0(v)=\alpha \quad (51)$$

فأن التقدير الحصين MM لمعاملات انموذج الانحدار $\hat{\beta}_1$ هو الحل للمعادلة الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_1\left(\frac{e_i}{S}\right)X_i=0 \quad (52)$$

اذ أن φ_1 هي مشتقة الدالة ρ_1 ، وأن S يمثل التقدير الحصين للانحراف المعياري لبواقي انموذج الانحدار والذي تم تقديره في المرحلة الثانية. التقدير الحصين الناتج من المعادلة (52) يحقق الخاصية الآتية:

$$S(\hat{\beta}_1,n)\le S(\hat{\beta}_0,n) \quad (53)$$

اذ أن:

$$S(\hat{\beta}_1,n)=\sum_{i=1}^{n}\rho_1\left(\frac{e_i}{S}\right) \quad (54)$$

علما أن $\rho_1\left(\frac{0}{0}\right)$ يعرف على انه يساوي الصفر.
ان (ρ_1) هي دالة وزن ممكن ان تكون دالة الوزن (Tukey's Bisquare) أو دالة الوزن (Huber) .
عملية اختيار دالتي الوزن ρ_0 و ρ_1 بحيث تحقق الشروط المذكورة في المرحلة الثانية وتحقق المعادلتين (50) و (52) تكون كالآتي:
أي ثابتين بحيث أن k_1 و k_0بافتراض ان الدالة ρ تحقق الافتراضات (1-6) السابقة الذكر، وليكن $0\le k_0\le k_1$: ليكن .

$$\rho_0(v)=\rho\left(\frac{v}{k_0}\right) \quad (55)$$

المجلة العراقية للعلوم الاقتصادية / عدد خاص لوقائع المؤتمر العلمي الدولي/ السادس/ والسنوي/ السابع عشر/لسنة 2023
بعنوان / القيادة الرشيدة والتنمية المستدامة سبل الإصلاح الاقتصادي العراقي
Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$\rho_1(v) = \rho\left(\frac{v}{k_1}\right) \quad (56)$$

قيمة الثابت k_0 تحدد بحيث تحقق المعادلة (49)، اما قيمة الثابت k_1 فان اختيارها يحدد الكفاءة التقاربية للتقدير،[13].

3-3 طريقة الامكان التجريبية الحصينة: Robust Empirical Likelihood Method (REL)

طريقة الإمكان التجريبية احدى طرائق التقدير اللامعلمية المقترحة من قبل Owen، 1988، [7]، التي تعد بديل لطريقة الإمكان الأعظم في حالة عدم وجود افتراضات حول التوزيع الاحتمالي لحدود الأخطاء العشوائية لأنموذج الانحدار. هذه الطريقة تفترض أن هناك اوزان احتمالية p_i لكل مشاهدة من شاهدات العينة (i=1,2,…,n)، وتهدف الى تقدير معاملات انموذج الانحدار من خلال تعظيم دالة الإمكان التجريبية التي تعرف على انها مضروب تلك الاوزان الاحتمالية في ظل بعض القيود المتعلقة بمعاملات الانموذج التي يراد تقديرها، تلك القيود تكون مشابهة للمعادلات الطبيعية لطريقة المربعات الصغرى أو لمعادلات الإمكان في ظل فرضية التوزيع الطبيعي، الامر الذي يؤدي الى ان تكون هذه الطريقة حساسة جدا لعدم تحقق فرضية التوزيع الطبيعي أو وجود قيم شاذة أو متطرفة، لذلك اقترح كل من Arslan،Ozdemir، 2018،[8]،استعمال قيود محصنة مستعارة من دالة الهدف الخاصة بطريقة التقدير الحصينة M، بمعنى اجراء توفيق بين طريقة الإمكان التجريبية وطريقة M الحصينة.

لأنموذج الانحدار الخطي المبين بالمعادلة (1) وبافتراض p_i لكل (i=1,2,…,n) تمثل الاوزان احتمالية لكل مشاهدة من مشاهدات العينة والتي تكون غير المعلومة وذات قيم مختلفة لكل مشاهدة وتحتاج الى التقدير، اذ أن $p_i \geq 0$، فأن طريقة الإمكان التجريبية المستعملة لتقدير معاملي الانموذج $\underline{\beta}$ و تباين المجتمع σ^2 تقضي بتعظيم دالة الإمكان التجريبية تحت توفر بعض القيود على عملية التعظيم وكما مبين ادناه:

$$L_{EL}(\beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} p_i \text{m} \quad (57)$$

تحت تحقق القيود الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i \right) X_i = 0 \quad (59)$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left[(Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2 - \sigma^2 \right] = 0 \quad (60)$$

بأخذ اللوغاريتم لطرفي المعادلة (57) نحصل على لوغاريتم دالة الإمكان التجريبية كما في المعادلة الآتية:

$$LogL(\beta, \sigma^2) = Log \prod_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} Log\,(p_i) \quad (61)$$

تقدير الاوزان الاحتمالية $\underline{p}^T = [p_1\ p_2\ \dots\ p_n]$ ومتجه المعاملات $\underline{\beta}^T = [\beta_0\ \beta_1]$ والتباين σ^2 ، يتم من خلال تعظيم لوغاريتم دالة الإمكان التجريبية تحت تحقق القيود الثلاثة وفق المعادلات (58-60) مشكلة التعظيم هذه يمكن حلها باستعمال طريقة مضاعف لاكرانج الامر الذي يتطلب صياغة دالة لاكرانج وفق الصيغة الآتية:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$L\left(\underline{p},\underline{\beta},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2\right)=\sum_{i=1}^{n}Log\ (p_i)-\lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n}p_i-1\right)-n\lambda_1\sum_{i=1}^{n}p_i\ (Y_i-X_i^T\ \underline{\beta})\ X_i-n\lambda_2\ \sum_{i=1}^{n}p_i\ [(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2] \qquad (62)$$

اذ أن $\lambda_0\ ,\lambda_1,\lambda_2\ \in R$ التي تمثل مضاعفات لاكرانج، عملية التقدير تتطلب أولا تقدير متجه الاوزان الاحتمالية من خلال اخذ المشتقة لدالة لاكرانج (59) بالنسبة لكل p_i ومساواتها بالصفر لنحصل على تقدير تلك الاوزان وفق الصيغة الآتية:

$$p_i=\frac{1}{\lambda_0+n\lambda_1\left(Y_i-X_i^T\ \underline{\beta}\right)X_i+n\lambda_2[(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2]}\qquad for\ i=1,2,\dots,n \qquad (63)$$

بأخذ المجموع لطرفي المعادلة (63) لكل قيم i ، نحصل على أن $\lambda_0=n$ ، لذا يمكن إعادة كتابة تلك المعادلة بعد التعويض عن λ_0 وكالآتي:

$$p_i=\frac{1}{n(\ 1+\lambda_1\left(Y_i-X_i^T\ \underline{\beta}\right)X_i+\lambda_2[(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2]}\qquad for\ i=1,2,\dots,n \qquad (64)$$

بالتعويض عن p_i بموجب الصيغة (64) في دالة الإمكان التجريبية (61) لنحصل على دالة الهدف التالية بدلالة $\beta,\lambda_1,\lambda_2,\sigma^2$ فقط:

$$L\left(\underline{\beta},\lambda_1,\lambda_2\ ,\sigma^2\right)=-\sum_{i=1}^{n}Log\ \left(1+\lambda_1\left(Y_i-X_i^T\ \underline{\beta}\right)X_i+\lambda_2\ [(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2\right]-nLogn \qquad (65)$$

قيم مضاعفات لاكرانج λ_1 و λ_2 بالنسبة لكل من متجه معاملات انموذج الانحدار $\underline{\beta}$ و σ^2 يمكن ان نحصل عليها من خلال مشكلة التصغير الآتية:

$$\underline{\hat{\lambda}}\left(\underline{\beta},\sigma^2\right)=arg\min_{\lambda}[-\sum_{i=1}^{n}Log\ (\lambda_0+\lambda_1(Y_i-X_i^T\ \beta)X_i+\lambda_2[(Y_i-X_i^T\beta)^2-\sigma^2]-nLogn] \qquad (66)$$

اذ أن $\underline{\lambda}=[\lambda_1\ \ \lambda_2]$، مع ملاحظة ان مشكلة التصغير (66) ليس لها حلول صريحة مما نحتاج الى الطرائق العددية لإيجاد الحلول لتلك المشكلة، وبتعويض تلك الحلول في $L\left(\underline{\beta},\lambda_1,\lambda_2\ ,\sigma^2\right)$ نحصل على لوغاريتم دالة الإمكان التجريبية $L\left(\underline{\hat{\lambda}}\left(\underline{\beta},\sigma^2\right)\ ,\underline{\beta}\ ,\sigma^2\right)$ ، هذه الدالة بدلالة متجه معاملات الانموذج $\underline{\beta}$ والتباين σ^2 ، وتقدير الإمكان الأعظم التجريبية لتلك المعلمات نحصل عليها بحل مشكلة التعظيم الآتية:

$$\left(\hat{\beta},\hat{\sigma}^2\right)=arg\max_{(\beta,\sigma^2)}L\left(\underline{\hat{\lambda}}(\beta,\sigma^2)\ ,\underline{\beta}\ ,\sigma^2\right) \qquad (67)$$

مشكلة التعظيم الأخيرة تحل باستعمال الطرائق العددية لعدم وجود حلول صريحة لها.

اقترح الباحثين Arslan،Ozdemir ، 2018 ،[8]، الدمج بين طريقة التقدير الحصينة M و طريقة الإمكان التجريبية باستبدال القيود الاعتيادية للطريقة الأخيرة بالقيود الحصينة وذلك باستعمال معادلة طريقة M والمبينة ادناه:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij}\psi\left(\frac{Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i}{\hat{\sigma}}\right)=0 \qquad ,j=0,1,\dots,k \tag{68}$$

هذا التعديل اعتمد من قبل الباحثين لزيادة فاعلية طريقة الإمكان التجريبية في معالجة تأثير القيم الشاذة على تقدير معاملات الانموذج، بمعنى جعلها حصينة ضد وجود القيم الشاذة أو المتطرفة، وأطلق عليها بطريقة الإمكان التجريبية الحصينة، وهنا سنوظف هذه الطريقة لتقدير معاملات انموذج الانحدار الخطي في حالة كون المتغير التفسيري عشوائي.

دالة الإمكان التجريبية المبينة بالعلاقة (57) سيتم تعظيمها بعد استبدال القيدين الثاني والثالث العلاقتين (59) و (60) بالقيدين الحصينين الآتيين:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\varphi\,(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i)X_i=0 \tag{69}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i\,\varphi[(Y_i-\beta_0-\beta_1 X_i)^2-\sigma^2]=0 \qquad 70)$$

اذ ان φ هي دالة في الأخطاء العشوائية وهي دالة غير متزايدة في حالة دالة Huber ، ومتناقصة في حالة دالة Tukey. التقدير الحصين لكل من معاملات الانموذج والتباين نحصل عليه من خلال حل مشكلة التعظيم الاتية وباستعمال دالة لاكرانج:

$$L\left(\underline{p},\underline{\beta},\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2\right)= \sum_{i=1}^{n} Log\,(p_i)-\lambda_0\left(\sum_{i=1}^{n} p_i-1\right)-n\lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,\varphi(Y_i-X_i^T\,\underline{\beta}\right)X_i- n\lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\,[\varphi(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2]\right) \tag{71}$$

وبنفس الخطوات السابقة التي تم اتباعها في طريقة الإمكان التجريبية فان عملية التقدير تتطلب أولا تقدير متجه الاوزان الاحتمالية من خلال اخذ المشتقة لدالة لاكرانج (64) بالنسبة لكل p_i ومساواتها بالصفر لنحصل على تقدير تلك الاوزان وفق الصيغة الآتية:

$$p_i=\frac{1}{\lambda_0+n\lambda_1\,\varphi\left(Y_i-X_i^T\,\underline{\beta}\right)X_i+n\lambda_2[\varphi\left(Y_i-X_i^T\underline{\beta}\right)^2-\sigma^2]} \qquad for\ i=1,2,\dots,n \tag{72}$$

بأخذ المجموع لطرفي المعادلة (72) لكل قيم i ، نحصل على أن $\lambda_0=n$ ، لذا يمكن إعادة كتابة تلك المعادلة بعد التعويض عن λ_0 وكالآتي:

$$p_i=\frac{1}{n(1+\lambda_1\varphi\left(Y_i-X_i^T\,\underline{\beta}\right)X_i+\lambda_2[\varphi\left(Y_i-X_i^T\underline{\beta}\right)^2-\sigma^2]} \qquad for\ i=1,2,\dots,n \tag{73}$$

بالتعويض عن p_i بموجب الصيغة (69) في دالة الإمكان التجريبية (66) لنحصل على دالة الهدف التالية بدلالة $\underline{\beta},\lambda_1,\lambda_2,\sigma^2$ فقط:

$$L\left(\underline{\beta},\lambda_1,\lambda_2\,,\sigma^2\right)=-\sum_{i=1}^{n} Log\,\left(1+\lambda_1\,\varphi\left(Y_i-X_i^T\,\underline{\beta}\right)X_i+\lambda_2\left[\varphi(Y_i-X_i^T\underline{\beta})^2-\sigma^2\right]-nLogn\right. \tag{74}$$

قيم مضاعفات لاكرانج λ_1 و λ_2 بالنسبة لكل من متجه معاملات انموذج الانحدار $\underline{\beta}$ و σ^2 يمكن ان نحصل عليها من خلال مشكلة التصغير الآتية:

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$$\underline{\hat{\lambda}}(\beta,\sigma^2) = arg\min_{\lambda}[-\sum_{i=1}^{n} Log\ (\lambda_0 + \lambda_1(\varphi(Y_i - X_i^T\ \beta)X_i) + \lambda_2\left[\varphi(Y_i - X_i^T\beta)^2 - \sigma^2\right] - nLogn] \quad (75)$$

مع ملاحظة ان مشكلة التصغير (68) ليس لها حلول صريحة مما نحتاج الى الطرائق العددية لإيجاد الحلول لتلك المشكلة، وبتعويض تلك الحلول في $L\left(\underline{\beta},\lambda_1,\lambda_2\,,\sigma^2\right)$ نحصل على لوغاريتم دالة الإمكان التجريبية $L\left(\underline{\hat{\lambda}}\left(\underline{\beta},\sigma^2\right)\,,\underline{\beta}\,,\sigma^2\right)$ ، هذه الدالة بدلالة متجه معاملات الانموذج $\underline{\beta}$ والتباين σ^2 ، وتقدير الإمكان الأعظم التجريبية الحصينة لتلك المعاملات نحصل عليها بحل مشكلة التعظيم الآتية:

$$\left(\underline{\hat{\beta}},\hat{\sigma}^2\right) = arg\max_{(\underline{\beta},\sigma^2)} L\left(\underline{\hat{\lambda}}\left(\underline{\beta},\sigma^2\right)\,,\underline{\beta}\,,\sigma^2\right) \quad (76)$$

مشكلة التعظيم الأخيرة تحل باستعمال الطرائق العددية لعدم وجود حلول صريحة لها.

4- التطبيق العملي: البيانات التي تم اعتمادها في الجانب التطبيقي تتعلق بالمصابين بأمراض القلب اذ تم اختيار عينة عشوائية بحجم (30) مريضاً من الراقدين في مستشفى غازي الحريري للجراحات التخصصية ولكل مريض تم تسجيل قراءات كل من حجم كريات الدم الحمراء (PCV) وسكر الدم (RBS) وكما مبين بالجدول (4 -1) والتي استعملت في تقدير العلاقة الخطية البسيطة بين (PCV) كمتغير استجابة و (RBS) كمتغير تفسيري اذ تم بناء انموذج انحدار خطي بسيط بمتغير تفسيري عشوائي وكما مبين في الصيغة (1) في الجانب النظري اذ وصفت علاقة الانحدار بالأنموذج الاتي:

$$\mathrm{PCV}_i = \beta_0 + \beta_1\mathrm{RBS}_i + u_i \quad (77)$$

جدول (1) حجم كريات الدم الحمراء (PCV) وسكر الدم (RBS)

No.	PCV	RBS	No.	PCV	RBS	No.	PCV	RBC
1	36	170	11	26	149	21	31	191
2	23	136	12	27	348	22	30	182
3	39	233	13	46	387	23	30	184
4	22	96	14	32	202	24	27	124
5	21	145	15	31	200	25	29	218
6	25	188	16	29	199	26	27	143
7	21	136	17	26	115	27	34	150
8	25	141	18	33	158	28	29	153
9	22	147	19	31	152	29	34	161
10	41	310	20	29	193	30	32	209

انموذج الانحدار العشوائي وفق العلاقة (77) تم بناءه على افتراض ان متغير الاستجابة PCV يتوزع وفق التوزيع الطبيعي وان المتغير التفسيري RBS يتوزع وفق توزيع القيمة المتطرفة اما حدود الخطأ العشوائي فأنها تتبع التوزيع الطبيعي وبشكل مستقل بمتوسط يساوي الصفر وتباين ثابت يساوي $\sigma^2(1-\rho^2)$. للتحقق من هذه الافتراضات تم اجراء اختبار حسن المطابقة لكل من المتغيرين الاستجابة والتفسيري، اذ تم استعمال اختبار مربع كاي لحسن المطابقة Chi-Squared Goodness of Fit. فبالنسبة لبيانات متغير الاستجابة (PCV) تم اختبار هل أنها تخضع للتوزيع الطبيعي مقابل عدم خضوعها لهذا التوزيع أي اختبار الفرضية الآتية:

$H_0: PCV \sim Normal\ dist.$

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

$H_1: PCV \nsim Normal\ dist.$

نتائج الاختبار مبينة في الجدول (2) أذ تشير تلك النتائج الى ان القيمة الاحتمالية P-Value المرافقة لهذا الاختبار هي أكبر من مستوى المعنوية 0.05، وبذلك لا ترفض فرضية العدم بمعنى أن بيانات المتغير PCV تتوزع توزيعاً طبيعياً، والشكل (1) يوضح المدرج التكراري ومنحنى التوزيع الطبيعي لبيانات هذا المتغير.

أما بالنسبة لبيانات المتغير التفسيري RBS فقد تم اختبار فيما إذا كانت تتبع توزيع القيمة المتطرفة وحسب الفرضية الآتية:

$H_0: RBS \sim Extreme\ Value\ dist.$

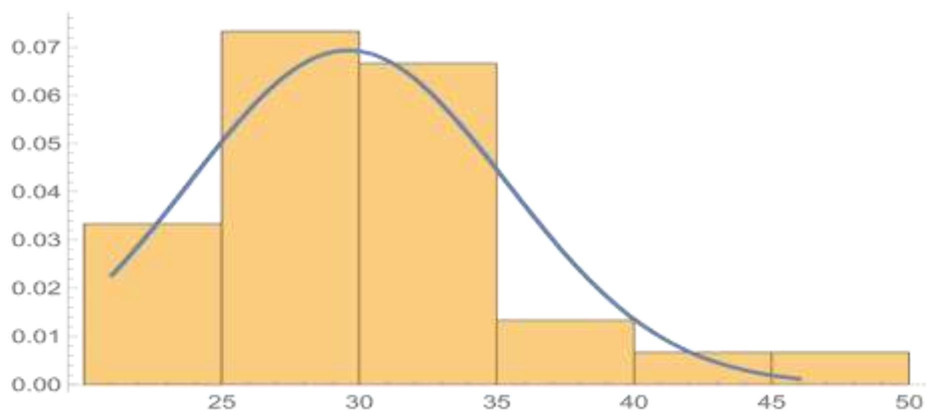
$H_1: RBS \nsim Extreme\ Valuedist.$

نتائج هذا الاختبار مبينة في الجدول (2) اذ تشير القيمة الاحتمالية لهذا الاختبار والتي هي أكبر من مستوى المعنوية 0.05 الى قبول فرضية العدم بمعنى ان بيانات هذا المتغير تتبع توزيع القيمة المتطرفة والشكل (2) يوضح المدرج التكراري ومنحنى التوزيع لبيانات هذا المتغير.

جدول (2): اختبار مربع كاي لحسن المطابقة لمتغير الاستجابة PCV وللمتغير التفسيري RBS

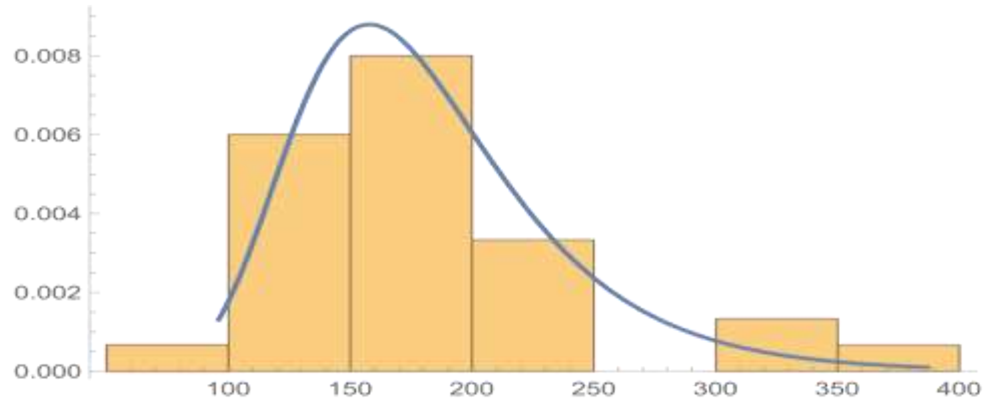
	PCV	RBS
Statistic	**1.46667**	**6.26667**
P-Value	**0.916884**	**0.281129**
Parameters	$\boldsymbol{\mu = 29.6;\ \sigma = 5.75384}$	$\boldsymbol{\alpha = 157.785;\ \theta = 41.8356}$

شكل (1): المدرج التكراري ومنحنى التوزيع الطبيعي لمتغير الاستجابة PCV



Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

شكل (2): المدرج التكراري ومنحنى توزيع القيمة المتطرفة للمتغير التفسيري RBS



لتقدير معاملي انموذج الانحدار العشوائي المبين بالعلاقة (77) سيتم الاعتماد على طرائق التقدير الثلاث موضوع البحث. الجدول (2) يلخص نتائج التقدير، من تلك النتائج نجد ان الطرائق الثلاث افرزت نماذج مقدرة معنوية وذلك بالاعتماد على المؤشر الاحصائي F ولمستوى معنوية 0.05، كما انها اتفقت على ان هناك تأثيراً طردياً للمتغير التفسيري العشوائي RBS على متغير الاستجابة PCV وان قيمة هذا التأثير متقاربة بين النماذج الثلاث المقدرة، أما معياري حسن المطابقة ودقة التقدير R^2 و RMSE فقد اشارت الى افضلية طريقة الإمكان الأعظم المعدلة تليها في الأفضلية طريقة الإمكان التجريبية الحصينة. من الجدير بالملاحظة أن القيمة المنخفضة لمعامل التحديد R^2 كانت نتيجة لاعتماد متغير تفسيري واحد والمتمثل بالمتغير العشوائي سكر الدم (RBS) اذ هناك عوامل أخرى لم يتم تضمينها في انموذج الانحدار والتي لها تأثير على تحديد حجم كريات الدم الحمراء، لذا يمكن اعتمار قيمة هذا المعيار مقبولة بالنسبة لنموذج الانحدار المقدر موضوع البحث. بناءا على ما تقدم وبالاعتماد على تقديرات طريقة الإمكان الأعظم فان انموذج الانحدار العشوائي المقدر يكون كالآتي:

$$\mathrm{PCV}_i = \beta_0 + \beta_1 \mathrm{RBS}_i + u_i \qquad (78)$$

جدول (3) : نتائج تقدير طرائق التقدير لأنموذج الانحدار العشوائي MMLE ، MME ، RELE

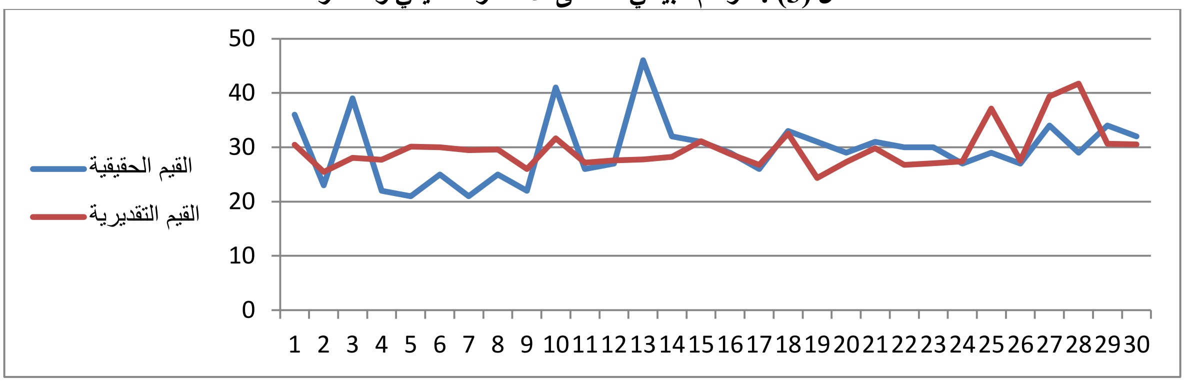
طريقة التقدير	Estimated parameters		F statistic	R^2	RMSE
MMLE	β_0 β_1	28.0954 0.05963	21.71965*	43.68%	4.469
MME	β_0 β_1	16.049 0.074627	16.562*	37.17%	4.721
RELE	β_0 β_1	16.09 0.07443	19.369*	40.89%	4.578

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

جدول (4): القيم الحقيقية والتقديرية بطريقة الإمكان الأعظم المعدلة لمتغير الاستجابةPCV

No.	Real value	Estimated value	No.	Real value	Estimated value	No.	Real value	Estimated value
1	36	30.494	11	26	27.155	21	31	29.839
2	23	25.485	12	27	27.573	22	30	26.738
3	39	28.050	13	46	27.751	23	30	27.036
4	22	27.692	14	32	28.228	24	27	27.394
5	21	30.137	15	31	31.091	25	29	37.113
6	25	30.017	16	29	28.765	26	27	27.513
7	21	29.481	17	26	26.738	27	34	39.379
8	25	29.600	18	33	32.522	28	29	41.705
9	22	26.022	19	31	24.353	29	34	30.673
10	41	31.627	20	29	27.274	30	32	30.554

شكل (3) : الرسم البياني لمنحنى الانحدار الحقيقي والمقدر



مناقشة نتائج التطبيق العملي: تم مناقشة تقدير انموذج الانحدار الخطي البسيط بمتغير توضيحي عشوائي والذي يمثل العلاقة الخطية بين حجم كريات الدم الحمراء (PCV) كتغير استجابة و سكر الدم (RBS) كمتغير تفسيري عشوائي، ولكون هذا الانموذج يخالف الافتراضات الأساسية لأنموذج الانحدار تم استعمال ثلاث طرائق تقدير حصينة الأولى طريقة الإمكان الأعظم المعدلة والتي تم تطبيقها من قبل الباحثين في تقدير معاملات أنموذج الانحدار العشوائي، والطريقتين الثانية الثالثة هما طريقة التقدير MM وطريقة الإمكان التجريبية الحصينة واللتان تم توظيفهما من قبلنا في تقدير معاملات انموذج الانحدار موضوع البحث، اذ حسب علمنا لم يتم استعمالهما سابقا في عملية تقدير هذا الانموذج وانما استعملتا في تقدير نماذج الانحدار التي تعاني من بعض المشاكل القياسية وفي حالة احتواء مشاهدات العينة على قيم شاذة او متطرفة.

تبين من خلال التطبيق العملي وفيما يتعلق بعينة البحث تفوق طريقة الإمكان الأعظم المعدلة بالاعتماد على معياري حسن المطابقة ودقة التقدير R^2 و RMSE، وبالرغم من هذا التفوق نجد ان هناك تقارب كبير بين طرائق التقدير الثلاث بالنسبة لقيمة معياري المفاضلة وكذلك بالنسبة للقيمة التقديرية لتأثير سكر الدم على حجم كريات الدم الحمراء وطبيعة العلاقة الطردية بين هذين المتغيرين، هذا التقارب يقودنا الى استنتاج بفاعلية الطريقتين MM والإمكان التجريبية الحصينة.

استنادا على ما تقدم، يمكن استعمال طريقتي التقدير الحصينتين MM او الإمكان التجريبية الحصينة في تقدير انموذج الانحدار العشوائي كونهما أسهل من حيث التطبيق من طريقة الإمكان الأعظم المعدلة، كما انهما لا يستندان على افتراضات خاصة بالتوزيع الاحتمالي لكل من حدود الخطأ العشوائي والمتغير التوضيحي العشوائي.

Iraq Journal For Economic Sciences / ISSN:1812-8742 / ISSN ONLIN:2791-092X
https://doi.org/10.31272/IJES2024.80.S.S2

References :المصادر

1. Anderson, C., & Schumacker, R. E. (2003). A comparison of five robust regression methods with ordinary least squares regression: Relative efficiency, bias, and test of the null hypothesis. *Understanding Statistics: Statistical Issues in Psychology, Education, and the Social Sciences*, *2*(2), 79-103.
2. Islam, M.Q.,&Tiku,M.L.(2005).Multiple linear regression model under nonnormality. Communications in Statistics-Theory and Methods,33(10), 2443-2467.
3. Islam, M. Q., & Tiku, M. L. (2010). Multiple linear regression model with stochastic design variables. Journal of Applied Statistics, 37(6), 923-943.
4. Kerridge, D. (1967). Errors of prediction in multiple regression with stochastic regressor variables. Technometrics, 9(2), 309-311.
5. Kmenta, J., & Klein, L. R. (1971). Elements of econometrics (Vol. 655). New York: Macmillan.
6. Lai, T. L., & Wei, C. Z. (1982). Least squares estimates in stochastic regression models with applications to identification and control of dynamic systems. The Annals of Statistics, 10(1), 154-166.
7. Owen, A. B. (1988). Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional. Biometrika, 75(2), 237-249.
8. Özdemir, Ş., & Arslan, O. (2020). Combining empirical likelihood and robust estimation methods for linear regression models. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 51(3), 941-954
9. Sazak, H. S., Tiku, M. L., & Islam, M. Q. (2006). Regression analysis with a stochastic design variable. International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique, 77-88.
10. Susanti, Y., Pratiwi, H., Sulistijowati, S., & Liana, T. (2014). M estimation, S estimation, and MM estimation in robust regression. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 91(3),
11. Tiku, M. L., & Vaughan, D. C. (1997). Logistic and nonlogistic density functions in binary regression with nonstochastic covariates. Biometrical Journal, 39(8), 883-898.
12. Vaughan, D. C., & Tiku, M. L. (2000). Estimation and hypothesis testing for a nonnormal bivariate distribution with applications. Mathematical and Computer Modelling, 32(1-2), 53-67.
13. Yohai, V. J. (1987). High breakdown-point and high efficiency robust estimates for regression. *The Annals of statistics*, 642-656.