المجموعات المفتوحة من النمط N والمجموعات المفتوحة من النمط S في الفضاءات التبولوجية الثلاثية

رياض خضر الحميدو

قسم الرياضيات– كلية العلوم– جامعة الفرات– سوريا

Riad-hamido1983@hotmail.com

قيس حاتم عمران

قسم الرياضيات– كلية التربية للعلوم الصرفة– جامعة المثنى– العراق

qays.imran@mu.edu.iq

الخلاصة

في هذا البحث، قدمنا أربعة أنواع جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثلاثية، حيث أدخلنا تعريف المجموعات المفتوحة من النمط N والمجموعات المغلقة من النمط N في الفضاءات التبولوجية الثلاثية، و عرفنا المجموعات المفتوحة من النمط S، والمجموعات المغلقة من النمط S في هذه الفضاءات, ودرسنا الخصائص الأساسية لهذه الأنواع الجديدة من المجموعات، و أوجدنا العلاقة بينها وبين المجموعات المفتوحة، المغلقة في هذه الفضاءات التبولوجية الثلاثية. ثم استخدمنا هذا المفهوم الجديد للمجموعات المفتوحة والمغلقة في تعريف انغلاق وداخلية مجموعة، حيث عرفنا انغلاق و داخلية مجموعة من النمط N وذلك بالاعتماد على هذه الأصناف الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة، و أوجدنا الخصائص الأساسية للانغلاق والداخلية من النمط N.

الكلمات المفتاحية: فضاء تبولوجي ثلاثي، مجموعة مفتوحة من النمط N، مجموعة مغلقة من النمط N، مجموعة مفتوحة من النمط S، مجموعة مغلقة من النمط S.

Abstract

In this paper we introduced four new types of open and closed sets in tri-topological spaces, where we have introduced the definition of open sets of the pattern N and closed sets of the pattern N in tri-topological spaces, as the we know from the open sets of the pattern S and closed sets of the pattern S in these spaces, and we studied the basic properties of these new types of sets, as the we have created the relationship between them and open and closed sets in these tri-topological spaces. Then use this new concept of open and closed sets in the definition of closure and interior set, where we know the closure and interior set of the pattern N by relying on these new varieties of open and closed sets, we also found the basic properties of closure and the interior of the pattern N.

Key Word: Tri-Topological space, N-Open set, N-Closed set, S-Open set and S-Closed set.

1. مقدمة

عمم Kelly عام 1963 مفهوم الفضاء التبولوجي، حيث أدخل مفهوم الفضاء التبولوجي الثنائي، كمجموعة غير خالية مزودة باثنين من التبولوجيات عليها، ورمز له بـ (X,τ_1,τ_2)، حيث إن $(X,\tau_1), (X,\tau_2)$ هو فضاء تبولوجي، و عرف المجموعات المفتوحة والمغلقة في هذا الفضاء.

عرفا Mrsevic. Reilly عام 1996 المجموعات المفتوحة من النمط S، والمجموعات المغلقة من النمط S (S-open sets ,S-closed sets) في الفضاء التبولوجي الثنائي، حيث عرفا المجموعة المفتوحة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثنائي (X,τ_1,τ_2)، على أنها τ_1- مفتوحة أو τ_2- مفتوحة.

عرفا أيضا Jabbar و Nasir عام 2010 المجموعات المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثنائي.

عمم Kovar عام 2000 مفهوم الفضاءات التبولوجية الثنائية إلى الفضاءات التبولوجية الثلاثية، كمجموعة غير خالية مزودة بثلاثة من التبولوجيات عليها، و رمز له بـ (X,τ_1,τ_2,τ_3) حيث إن $(X,\tau_1),(X,\tau_2),(X,\tau_3)$ هو فضاء تبولوجي، وظهرت بعده الكثير من الدراسات و الأبحاث حول هذه الفضاءات الثلاثية، وحول المجموعات المفتوحة و المغلقة فيها.

أما نحن فقد عرفنا ودرسنا أربعة أنواع جديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثلاثية وهي: المجموعات المفتوحة من النمط N، المجموعات المغلقة من النمط N، المجموعات المفتوحة من النمط S، والمجموعات المغلقة من النمط S, و درسنا خصائصها الأساسية، و أدخلنا بعض المفاهيم الجديدة المتعلقة بهذه المجموعات مثل الانغلاق و الداخلية من النمط N، ودرسنا العلاقة بين هذه الأنواع الجديدة من المجموعات المفتوحة والمغلقة.

تعريف (1.1):[Martin Kovar, (2000)] لتكن $X\neq\emptyset$ مجموعة ما, وليكن كلاً من: τ_1,τ_2,τ_3 تبولوجيا على X عندئذ: المجموعة الجزئية A من X تدعى مفتوحة إذا كانت تنتمي إلى $\tau_1\cup\tau_2\cup\tau_3$

- مكملتها تدعى مغلقة.
- الفضاء (X,τ_1,τ_2,τ_3) يدعى فضاء تبولوجي ثلاثي.

نتيجة (1.2): كل فضاء تبولوجي هو فضاء تبولوجي ثلاثي.

مثلا ليكن (X,τ) فضاء تبولوجي فإن (X,τ,τ,τ) فضاء تبولوجي ثلاثي.

نتيجة (1.3): كل فضاء ثلاثي التبولوجيا ليس فضاء تبولوجيا, لكن يمكن استحداث فضاء تبولوجي منه، بأكثر من طريقة: لو كان (X,τ_1,τ_2,τ_3) فضاء ثلاثي التبولوجيا فان:

- $(X,\tau_1\vee\tau_2\vee\tau_3)$ فضاء تبولوجي.

$\tau_1\vee\tau_2\vee\tau_3$: is the supremum topology on X contains τ_1,τ_2,τ_3

- (X,τ_i) فضاء تبولوجي، $\forall\, i=1,2,3$.
- $(X,\tau_1\cap\tau_2\cap\tau_3)$ فضاء تبولوجي.

2. المجموعات المفتوحة من النمط N:

في هذا المقطع عرفنا المجموعات المفتوحة من النمط N، ومتمماتها المجموعات المغلقة من النمط N، ودرسنا الخصائص الأساسية لها، و أوجدنا علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثلاثية.

تعريف (2.1): ليكن (X,τ_1,τ_2,τ_3) فضاء تبولوجيا ثلاثيا على X عندئذ:

المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي إذا كانت مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي $(X,\tau_1\vee\tau_2\vee\tau_3)$ حيث:

$\tau_1\vee\tau_2\vee\tau_3$: is the supremum topology on X contains τ_1,τ_2,τ_3

متممة المجموعة المفتوحة من النمط N، هي مجموعة مغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي.

مثال (2.2):

$$X=\{1,2,3\},\tau_1=\{X,\emptyset,\{1\}\},\tau_2=\tau_3=\{X,\emptyset,\{2\}\}\Rightarrow$$
$$\tau_1\vee\tau_2\vee\tau_3=\{X,\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

واضح أن كلاً من: (X,τ_1) , (X,τ_2), (X,τ_3) فضاءات تبولوجية لذلك فان (X,τ_1,τ_2,τ_3) فضاء تبولوجي ثلاثي, المجموعات المفتوحة من النمط N فيه هي:

$$\emptyset\,,\{1\}\,,\{2\},\{1,2\},X$$

المجموعات المغلقة من النمط N في هذا الفضاء التبولوجي الثلاثي هي:

$$\emptyset\,,\{2,3\}\,,\{1,3\},\{3\},X$$

ملاحظة (2.3):

1) المجموعة المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة في ايا من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2\,,3$.
2) المجموعة المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة في ايا من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2\,,3$.

مثال (2.4):

$$X = \{1,2,3\}\,,\tau_1 = \big\{X\,,\emptyset\,,\{1\},\{1,2\},\{1,3\}\big\},\tau_2 = \{X\,,\emptyset\,\},\tau_3 = \big\{X\,,\emptyset\,,\{2,3\}\big\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3 = \big\{X\,,\emptyset\,,\{1\},\{2\},\{3\}\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\big\}$$

واضح أن كلاً من: (X,τ_1) , (X,τ_2), (X,τ_3) فضاءات تبولوجية لذلك فان (X,τ_1,τ_2,τ_3) فضاء تبولوجي ثلاثي, المجموعات المفتوحة من النمط N هي:

$$X\,,\emptyset\,,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$$

المجموعات المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي هي:

$$\emptyset\,,\{2,3\}\,,\{1,3\},\{1,2\},\{1\},\{2\},\{3\},X$$

$\{3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط N لكنها ليست مفتوحة في أيا من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2\,,3$.

$\{1,2\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط N لكنها ليست مغلقة في أيا من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2\,,3$.

نتيجة (2.5):

1) المجموعة المفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3) ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة فيه.
2) المجموعة المغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3) ليس بالضرورة مجموعة مغلقة فيه.

البرهان: ينتج مباشرة من الملاحظة (2.3).

مثال (2.6): في المثال (2.2):

$\{1,2\}$ مجموعة مفتوحة من النمط N لكنها ليست مفتوحة في أيا من الفضاءات $(X\,,\tau_i)$ حيث $i = 1\,,2\,,3$، وبالتالي $\{1,2\}$ ليست مجموعة مفتوحة.

المجموعة $\{3\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط N لكنها ليست مغلقة في أيا من الفضاءات (X,τ_i) حيث $i = 1\,,2\,,3$، وبالتالي المجموعة $\{3\}$ ليست مجموعة مغلقة.

ملاحظة (2.7):

1) كل مجموعة مفتوحة في أيا من الفضاءات $(X\,,\tau_i)$ حيث $i = 1\,,2\,,3$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3).
2) كل مجموعة مغلقة في أيا من الفضاءات $(X\,,\tau_i)$ حيث $i = 1\,,2\,,3$ هي مجموعة مغلقة من النمط N في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3).

مبرهنة (2.8): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا على X عندئذ:

كل مجموعة مفتوحة في الفضاء التبولوجي الثلاثي هي مجموعة مفتوحة من النمط N فيه.

البرهان: لتكن A مجموعة مفتوحة ولنبرهن أنها مجموعة مفتوحة من النمط N, بما إن A مجموعة مفتوحة فان $A \in \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3$ اي مجموعة مفتوحة في احد التبولوجيات τ_1, τ_2, τ_3, لكن

$\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \subset \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$ ومنه $A \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$ وبالتالي:

A هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

ملاحظة (2.9): عكس المبرهنة (2.8)، ليس صحيحا بشكل عام كما يوضح في المثال التالي.

مثال (2.10): في المثال (2.4):

كلا من $\{2\},\{3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط N، لكنها ليست مفتوحة في أيا من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1, 2, 3$ وبالتالي كلا من $\{2\},\{3\}$ ليست مجموعة مفتوحة.

$\{1,2\}$ هي مجموعة مغلقة من النمط N، لكنها ليست مغلقة في أيا من الفضاءات (X, τ_i) حيث $i = 1, 2, 3$، وبالتالي $\{1,2\}$ ليست مجموعة مفتوحة.

مبرهنة (2.11): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا على X عندئذ:

كل مجموعة مفتوحة في كلا من التبولوجيات τ_1, τ_2, τ_3 هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

البرهان: لتكن A مجموعة مفتوحة في كلا من التبولوجيات τ_1, τ_2, τ_3، ولنبرهن أنها مجموعة مفتوحة من النمط N, بما إن A مجموعة مفتوحة في كلا من التبولوجيات τ_1, τ_2, τ_3, فإن $A \in \tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_3$, لكن

$\tau_1 \cap \tau_2 \cap \tau_3 \subset \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$ ومنه $A \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$ وبالتالي:

A هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

العكس ليس صحيحا بشكل عام كما يوضح في المثال التالي.

مثال (2.12):

$$X = \{1,2,3\}, \tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}, \tau_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}\}, \tau_3 = \{X, \emptyset, \{1\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$$

واضح أن كلاً من: $(X, \tau_1), (X, \tau_2), (X, \tau_3)$ فضاءات تبولوجية لذلك فان $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء ثلاثي التبولوجيا، المجموعات المفتوحة من النمط N هي:

$$X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3\}$$

إن $\{1,3\}$ مجموعة مفتوحة من النمط N لكنها ليست مفتوحة في كل الفضاءات (X, τ_i) لأجل كل $i = 1, 2, 3$.

ملاحظة (2.13):

1) عائلة كل المجموعات المفتوحة من النمط N, تحوي مجموعة كل المجموعات مفتوحة في الفضاء الثلاثي أي:

$$\tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3 \subset \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3.$$

2) عائلة كل المجموعات المغلقة من النمط N تحوي مجموعة كل المجموعات المغلقة في الفضاء الثلاثي.

مبرهنة (2.14): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا على X عندئذ:

اتحاد عدد منته أو غير منته ,من المجموعات المفتوحة من النمط N هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

البرهان: لتكن $\{A_\alpha / \alpha \in I\}$ أسره مجموعات مفتوحة من النمط N, فيكون لأجل كل $\alpha \in I$,

$$A_\alpha \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$$

لكن بما إن $(X, \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3)$ فضاء تبولوجي فان اتحاد عدد منته أو غير منته, من مجموعاته هي مجموعة تنتمي إليه, ومنه:

$$\cup A_{\alpha} \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3 , \forall \alpha \in I$$

$\Leftarrow \cup A_{\alpha}$ هو مجموعة مفتوحة من النمط N.

مبرهنة (2.15): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا على X عندئذ:

تقاطع عدد منته من المجموعات المغلقة من النمط N هي مجموعة مغلقة من النمط N.

البرهان: لتكن $\{A_{\alpha} / \alpha \in I\}$ أسره مجموعات منتهية من المجموعات المغلقة من النمط N, فيكون لأجل كل $\alpha \in I$, $(A_{\alpha})^c$ مجموعة مفتوحة من النمط N, ومنه:

$$(A_{\alpha})^c \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3$$

لكن بما إن $(X, \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3)$ فضاء تبولوجي فان اتحاد عدد منته أو غير منته, من مجموعاته هي مجموعة تنتمي إليه, ومنه:

$$\cup (A_{\alpha})^c \in \tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3 , \forall \alpha \in I$$

$\Leftarrow \cup [(A_{\alpha})^c]$ هو مجموعة مفتوحة من النمط N

$\Leftarrow [\cup (A_{\alpha})^c]^c$ هو مجموعة مغلقة من النمط N

$\Leftarrow \cap A_{\alpha} = \cap [(A_{\alpha})^c]^c$ هو مجموعة مغلقة من النمط N.

3. داخلية و انغلاق مجموعة من النمط N:

في هذا المقطع سنستخدم المفهوم الجديد للمجموعات المفتوحة، المغلقة من النمط N في تعريف داخلية و انغلاق مجموعة ما من النمط N، في الفضاءات التبولوجية الثلاثية، و أوجدنا الخصائص الأساسية لهما.

تعريف (3.1): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء ثلاثي التبولوجيا, $A \subset X$, اي عنصر $x \in X$ يدعى نقطة داخلية من النمط N للمجموعة A, اذا وجدت مجموعة مفتوحة من النمط N, تحقق $x \in V \subset A$.

مثال (3.2): ليكن

$$X = \{1,2,3\} , \tau_1 = \{X , \emptyset , \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \tau_2 = \{X , \emptyset\}, \tau_3 = \{X , \emptyset , \{2,3\}\} \Rightarrow$$
$$\tau_1 \vee \tau_2 \vee \tau_3 = \{X , \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{3\}\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$$

واضح أن كلاً من: (X, τ_1) , (X, τ_2), (X, τ_3) فضاءات تبولوجية لذلك فان $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجي ثلاثي, المجموعات المفتوحة من النمط N هي: $X , \emptyset , \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$

إن كلا من 3, 2 , 1 هو نقطة داخلية من النمط N للمجموعة $A = \{1,2,3\}$.

تعريف (3.3): مجموعة كل النقاط الداخلية من النمط N للمجموعة A, تدعى داخلية A من النمط N ويرمز لها بالرمز: $N - int(A)$

مثال (3.4): في المثال (3.2) : بفرض $A = \{1,2\}$ فان: $N - int(A) = A$.

مبرهنة (3.5): $N - int(A)$, تساوي اتحاد كل المجموعات المفتوحة من النمط N, المحتواة في A.

البرهان: لنبرهن ان $N - int(A) = \cup \{ B : B \subset A ,$ مفتوحة $- N$ هي $B \}$.

بفرض $x \in N - int(A)$ ومنه يوجد B مجموعة مفتوحة من النمط N, تحقق $x \in B \subset A$ ومنه:

$x \in \cup \{ B : B \subset A ,$ مفتوحة $- N$ هي $B \}$ ومنه:

$N - int(A) \subset \cup \{ B : B \subset A ,$ مفتوحة $- N$ هي $B \}$.

لبرهان العكس: لنفرض الان أن $x\in \cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$ ومنه:
$B_0,\ x\in B_0$ مجموعة مفتوحة من النمط N, محتواة في A ومنه:
يوجد B_0 مجموعة مفتوحة من النمط N, تحقق $x\in B_0\subset A$ ومنه: $x\in N-\text{int}(A)$ ومنه:
$$\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}\subset N-\text{int}(A)$$
ومنه: $N-\text{int}(A)\ =\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$.

مبرهنة (3.6): لتكن A مجموعة في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3), فان الخواص التالية متحققة:

1) $N-\text{int}(A)\subset A$.
2) $N-\text{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

البرهان:

1) واضح من التعريف.
2) ينتج من كون $N-\text{int}(A)=\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$, ومن كون اتحاد عدد منته أو غير منته, من المجموعات المفتوحة من النمط N هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

مبرهنة (3.7): $N-\text{int}(A)$, هي اكبر مجموعة مفتوحة من النمط N, المحتواة في A.

البرهان: ينتج من كون $N-\text{int}(A)=\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$.

مبرهنة (3.8): $N-\text{int}(A)=A\ \Leftrightarrow\ A$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

البرهان: A هي مجموعة $N-$ مفتوحة و $A\subset A$ لذلك $A\in\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$
أيضا: كل عنصر من الاتحاد هو مجموعة جزئية من A لذلك
$$N-\text{int}(A)=\cup\left\{B\ :\ B\subset A\ ,\ \text{مفتوحة}-N\ \text{هي}\ B\right\}$$
العكس: بما إن $N-\text{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N, وبما إن $N-\text{int}(A)=A$ فإن: A هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

مبرهنة (3.9): لتكن كل من A,B مجموعة في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3), فان الخواص التالية متحققة:

1) $A\subset B\Longrightarrow N-\text{int}(A)\subset N-\text{int}(B)$.
2) $N-\text{int}(A)\cup N-\text{int}(B)\subset N-\text{int}(A\cup B)$.
3) $N-\text{int}(A\cap B)=N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)$.
4) $N-\text{int}(N-\text{int}(A))=N-\text{int}(A)$.

البرهان:

1) واضح.
2) $N-\text{int}(A)\subset A$ و A هي مجموعة مفتوحة من النمط N,
$N-\text{int}(B)\subset B$ و B هي مجموعة مفتوحة من النمط N,
وبما إن: اتحاد إي مجموعات مفتوحة من النمط N, هو مجموعة مفتوحة من النمط N فان:
$N-\text{int}(A)\cup N-\text{int}(B)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N.
أيضا $N-\text{int}(A)\cup N-\text{int}(B)\subset A\cup B$ ومنه:
$N-\text{int}(A)\cup N-\text{int}(B)$ هي إحدى المجموعة المفتوحة من النمط N الجزئية من $A\cup B$

لكن $N-\text{int}(A\cup B)$ هو اكبر مجموعة مفتوحة من النمط N جزئية من $A\cup B$ ومنه:

$N-\text{int}(A)\cup N-\text{int}(B)\subset N-\text{int}(A\cup B)$.

3) بما أن $A\cap B\subset A$ و $A\cap B\subset B$ و من البند (1) نحصل على ان

$N-\text{int}(A\cap B)\subset N-\text{int}(A)$ و $N-\text{int}(A\cap B)\subset N-\text{int}(B)$.

وبالتالي $N-\text{int}(A\cap B)\subset N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)$ .... (1)

بما أن $N-\text{int}(A)$ و $N-\text{int}(B)$ مجموعات مفتوحة من النمط N,

وبما إن: تقاطع إي مجموعات مفتوحة من النمط N, هو مجموعة مفتوحة من النمط N فان:

$N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N.

أيضا من مبرهنة (3.6) البند (1), $N-\text{int}(A)\subset A$ و $N-\text{int}(B)\subset B$ و يؤدي إلى أن

$N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)\subset A\cap B$ ومنه:

$N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)$ هي إحدى المجموعة المفتوحة من النمط N الجزئية من $A\cap B$

لكن $N-\text{int}(A\cap B)$ هو اكبر مجموعة مفتوحة من النمط N جزئية من $A\cap B$ ومنه:

$N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)\subset N-\text{int}(A\cap B)$ .... (2)

ومن (1) و (2) نحصل على أن: $N-\text{int}(A\cap B)=N-\text{int}(A)\cap N-\text{int}(B)$.

4) بما أن $N-\text{int}(A)$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N، ومن مبرهنة (3.8) نحصل على ان

$N-\text{int}(N-\text{int}(A))=N-\text{int}(A)$.

تعريف ($\mathbf{3.10}$): تقاطع كل المجموعات المغلقة من النمط N التي تحوي المجموعة A, تسمى انغلاق المجموعة A من النمط N و يرمز لها بالرمز: $N-\text{cl}(A)$, أي إن:

$N-\text{cl}(A)=\cap\{B:\ B\supset A,\ $ هي N – مغلقة $B\}$.

نتيجة ($\mathbf{3.11}$): بما إن تقاطع المجموعات المغلقة من النمط N, هي مجموعة مغلقة من النمط N فان $N-\text{cl}(A)$, هي مجموعة مغلقة من النمط N.

مبرهنة ($\mathbf{3.12}$): لتكن A مجموعة في الفضاء التبولوجي الثلاثي (X,τ_1,τ_2,τ_3), فان الخواص التالية متحققة:

1) $A\subset N-\text{cl}(A)$.

2) $N-\text{cl}(A)$ هي مجموعة مغلقة من النمط N.

البرهان:

1) واضح من التعريف.

2) ينتج من كون $N-\text{cl}(A)=\cap\{B:\ B\supset A,B\ \text{is}\ N-\text{closed}\}$, ومن كون تقاطع عدد منته أو غير منته, من المجموعات المغلقة من النمط N هي مجموعة مغلقة من النمط N.

مبرهنة ($\mathbf{3.13}$): $N-\text{cl}(A)$, هي اصغر مجموعة مغلقة من النمط N, تحوي A.

البرهان: ينتج من كون $N-\text{cl}(A)=\cap\{B:\ B\supset A,B\ \text{is}\ N-\text{closed}\}$.

مبرهنة ($\mathbf{3.14}$): $A=N-\text{cl}(A)\Leftrightarrow A$ هي مجموعة مغلقة من النمط N.

البرهان: نعلم ان $N-\text{cl}(A)=\cap\{B:\ B\supset A,B\ \text{is}\ N-\text{closed}\}$

إذا كانت A هي مجموعة N – مغلقة، فأنها احد المجموعات أعلاه

$\cap\{B : B \supset A , B \text{ is } N-\text{closed}\}$, وكل عنصر منها يحوي A لذلك: تقاطع المجموعات السابقة هو A ومنه $N-cl(A) = A$.

العكس: بما أن $N-cl(A) = A$ و $N-cl(A)$ هي مجموعة N – مغلقة, فان A هي مجموعة N – مغلقة.

مبرهنة $(\mathbf{3.15})$: لتكن كل من A, B مجموعة في الفضاء التبولوجي الثلاثي $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$, فان الخواص التالية متحققة:

1) $A \subset B \Rightarrow N-cl(A) \subset N-cl(B)$.

2) $N-cl(A \cap B) \subset N-cl(A) \cap N-cl(B)$.

3) $N-cl(A \cup B) = N-cl(A) \cup N-cl(B)$.

4) $N-cl(N-cl(A)) = N-cl(A)$.

البرهان:

1) واضح من التعريف.

2) بما أن $A \cap B \subset A$ و $A \cap B \subset B$ و من البند (1) نحصل على ان $N-cl(A \cap B) \subset N-cl(A)$ و $N-cl(A \cap B) \subset N-cl(B)$.

وبالتالي $N-cl(A \cap B) \subset N-cl(A) \cap N-cl(B)$.

3) بما أن $A \subset A \cup B$ و $B \subset A \cup B$ و من البند (1) نحصل على ان $N-cl(A) \subset N-cl(A \cup B)$ و $N-cl(B) \subset N-cl(A \cup B)$.

وبالتالي $N-cl(A) \cup N-cl(B) \subset N-cl(A \cup B)$ .... (1)

بما أن $N-cl(A)$ و $N-cl(B)$ مجموعات مغلقة من النمط N,

وبما إن: اتحاد إي مجموعات مغلقة من النمط N, هو مجموعة مغلقة من النمط N فان:

$N-cl(A) \cup N-cl(B)$ هي مجموعة مغلقة من النمط N.

أيضا من مبرهنة (3.12) البند (1), $A \subset N-cl(A)$ و $B \subset N-cl(B)$ و يؤدي إلى أن $A \cup B \subset N-cl(A) \cup N-cl(B)$ ومنه:

$N-cl(A) \cup N-cl(B)$ هي إحدى المجموعة المغلقة من النمط N و تحوي $A \cup B$

لكن $N-cl(A \cup B)$ هو اصغر مجموعة مغلقة من النمط N تحوي $A \cup B$ ومنه:

$N-cl(A \cup B) \subset N-cl(A) \cup N-cl(B)$ .... (2)

ومن (1) و (2) نحصل على أن: $N-cl(A \cup B) = N-cl(A) \cup N-cl(B)$.

4) بما أن $N-cl(A)$ هي مجموعة مغلقة من النمط N، ومن مبرهنة (3.14) نحصل على ان $N-cl(N-cl(A)) = N-cl(A)$.

4. المجموعات المفتوحة من النمط S

في هذا المقطع عرفنا المجموعات المفتوحة من النمط S، ومتمماتها المجموعات المغلقة من النمط S، ودرسنا الخصائص الأساسية لها، و أوجدنا علاقتها مع المجموعات المفتوحة والمغلقة في الفضاءات التبولوجية الثلاثية. أيضا أوجدنا العلاقة بين هذه المجموعات والمجموعات المفتوحة والمغلقة من النمط N.

تعريف (4.1): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا عندئذ:
المجموعة الجزئية A من X تدعى مجموعة مفتوحة من النمط S، إذا كانت A مجموعة مفتوحة، فقط في احد الفضاءات (X, τ_i) لأجل $i = 1 , 2 , 3$. مكملتها تدعى مجموعة مغلقة من النمط S.

مثال (4.2):

$$X = \{1,2,3\} , \tau_1 = \{X , \emptyset , \{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}, \tau_2 = \{X , \emptyset, \{1\}\}, \tau_3 = \{X , \emptyset , \{2,3\}\} \Rightarrow$$

المجموعات المفتوحة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثلاثي هي: $\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$
المجموعات المغلقة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثلاثي هي: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$

مبرهنة (4.3): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا عندئذ:

1) كل مجموعة مفتوحة من النمط S، هي مجموعة مفتوحة.
2) كل مجموعة مغلقة من النمط S، هي مجموعة مغلقة.

البرهان:

1) لتكن A مجموعة مفتوحة من النمط S، ولنبرهن أنها مجموعة مفتوحة.

بما إن A مجموعة مفتوحة من النمط S، فأنها مجموعة مفتوحة في احد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i = 1 , 2 , 3$، ومنه A مجموعة مفتوحة.

2) لتكن A مجموعة مغلقة من النمط S، ولنبرهن أنها مجموعة مغلقة.

بما إن A مجموعة مغلقة من النمط S، فأنها مجموعة مغلقة في احد الفضاءات (X, τ_i) فقط لأجل $i = 1 , 2 , 3$، ومنه A مجموعة مغلقة.

ملاحظة (4.4): إن عكس مبرهنة (4.3) البند $(2) , (1)$ غير صحيح بشكل عام كما يوضح المثال التالي.

مثال (4.5): في المثال (4.2) إن:

كلا من $\{1\} , X , \emptyset$ هي مجموعة مفتوحة لكنها ليست مجموعة مفتوحة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثلاثي.

كلا من $\{2,3\} , X , \emptyset$ هي مجموعة مغلقة، لكنها ليس مجموعة مغلقة من النمط S.

مبرهنة (4.6): ليكن $(X, \tau_1, \tau_2, \tau_3)$ فضاء تبولوجيا ثلاثيا عندئذ:

1) كل مجموعة مفتوحة من النمط S، هي مجموعة مفتوحة من النمط N.
2) كل مجموعة مغلقة من النمط S، هي مجموعة مغلقة من النمط N.

البرهان: ينتج مباشرة من مبرهنة (4.3) و مبرهنة (2.8).

ملاحظة (4.7): إن عكس مبرهنة (4.6) البند $(2) , (1)$ غير صحيح بشكل عام كما يوضح في المثال التالي.

مثال (4.8): في المثال (4.2) إن:

- كلا من $\{1\} , X , \emptyset$ هي مجموعة مفتوحة من النمط N، لكنها ليست مجموعة مفتوحة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثلاثي.
- كلا من $\{2,3\} , X , \emptyset$ هي مجموعة مغلقة من النمط N، لكنها ليست مجموعة مغلقة من النمط S في الفضاء التبولوجي الثلاثي.

5. توصيات

أن هذه الأنواع الجديدة من المجموعات المفتوحة و المغلقة تفتح الآفاق للباحثين في الفضاءات التبولوجية الثلاثية، حيث يمكن استخدامها في دراسة:

1) الاستمرارية في الفضاءات التبولوجية الثلاثية.
2) بديهيات الفصل في الفضاءات التبولوجية الثلاثية.
3) الترابط في الفضاءات التبولوجية الثلاثية.
4) التراص في الفضاءات التبولوجية الثلاثية.

References

Kelly, J. C. (1963), "Bitopological spaces", *Proc. London Math. Soc.*,13, 71-89.

Martin M. Kovar, (2000), "On 3-Topological Version Of q-Regularity", *Internat. J. Math. & Math. Sci.*, Vol.23, No.6, 393-398.

Mrsevic and I. L. Reilly, (1996), "Covering and Connectedness Properties of a Topological Space and it is Associated Topology of α-subsets", *Indian J. Pure Appl. Math.*, 27(10), 995-1004.

Jabbar N. A. and Nasir, A. I. (2010), "Some Types of Compactness in Bitopological Spaces", *Ibn AL-Haitham J. For Pure & Appl. Sci.*, Vol.23, (1), 321-327.