دراسة نموذج ARMA-GARCH عندما يتبع الخطأ توزيع Laplace ومقارنته مع التوزيع الطبيعي

أ.د. جواد كاظم الموسوي*   م. علي ياسين غني**

المستخلص:

تعد دراسة النموذج ARMA-GARCH من الدراسات الحديثة في مجال السلاسل الزمنية، وان اهم ما يميز هذه النماذج ان كلا من المتوسط المشروط والتباين المشروط يعتمد على الماضي اي غير ثابتين. وان اغلب هذه الدراسات استخدمت ثلاثة توزيعات مستمرة مشروطة للخطأ وهي (التوزيع الطبيعي وتوزيع t و توزيع الخطأ العام).

في بحثنا هذا تم اقتراح توزيع Laplace المشروط لحد الخطأ. ومن ثم دراسته نظريا وتجريبيا وعمليا. وبذلك يهدف البحث الى دراسة السلاسل الزمنية عندما تكون مشاهداتها قيماً حقيقية ويتبع الخطأ العشوائي لنموذج ARMA-GARCH هذا التوزيع المستمر المقترحة، وكذلك عندما تكون مشاهداتها قيما صحيحة وتتبع السلسلة الزمنية التوزيع.

لقد تبين في الجانب التجريبي ان النماذج التي يكون فيها الخطأ العشوائي يتبع توزيع لابلاس كانت افضل مقارنة بالتوزيع الطبيعي. وفي الجانب العملي اخذت عينة تمثل اسعار الاسهم اليومية في البورصة اليابانية التي كانت تتبع توزيع Laplace وتعاني ايضا من مشكلة عدم تجانس التباين للخطأ، وتم ازالة تأثير المشكلة بمطابقة النموذج AR(1)-ARCH(2).

Abstract

ARMA-GARCH model study on of the recent studies in the field of time series, and that the most important characteristic of these models to both conditional mean and conditional variance depends on the past. And most of these studies used three continuous distributions of conditional error is Normal ,Student – t and General Error distributions ,and discrete type are the Poisson and the negative binomial distributions.

In our research, one continuous conditional error distribution is suggested, include Laplace distribution. And then study the distribution proposed theoretically, empirically and practically. Thus the goal of the thesis is to study the time series when observations are real values and follows the random error of GARCH model in continuous distributions.

The results of the experimental side in case of continuous distributions had been reached that forms where the random error follows Laplace distribution was preferable compared with the normal distribution.

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
مقبول للنشر بتأريخ 2015/9/30
مستل من أطروحة دكتوراه

In practical side examined application took a representative sample of daily price in Japanese stock market that was distributed as Laplace distribution and also suffers from the problem of heteroscedasticity of the conditional variance of error, and remove the influence problem matching AR(1)-ARCH(2) model.

المقدمة:

ان التحليل التقليدي للسلاسل الزمنية يفترض ثبات التباين المشروط لخطأ النموذج (Homoscedasticity)، ولكن ليس كل السلاسل الزمنية تحقق هذا الافتراض، وبالاخص السلاسل الزمنية المالية. لذا وضع الباحثون منذ عام 1982 تحليلاً مختلفاً عن التحليل التقليدي السابق الذي يكون فيه تباين الخطأ المشروط بالمعلومات الماضية متغيراً مع الزمن.

وقد ظهرت بهذا الاتجاه نماذج عديدة تحت مسمى نماذج الانحدار الذاتي بوجود عدم تجانس التباين المشروط (AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) وتكتب اختصاراً (ARCH) [4]. وتم تعميمها عام 1986 الى نماذج (Generalized ARCH) وتكتب اختصاراً (GARCH) [2] التي تمثل حد الخطأ العشوائي. ان مصطلح الانحدار الذاتي يعني ان العملية تعتمد على الماضي، وعدم تجانس التباين المشروط يعني ان التباين المشروط بالمعلومات المتوافرة يعتمد على القيم السابقة للعملية.

اما متوسط السلسلة الزمنية فانه يمثل متوسطا مشروطا بالمعلومات الماضية في كلا التحليلين التقليدي والحديث، وتكتب السلسلة بشكل عام بمجموع متوسطها المشروط مضافا اليه حد الخطأ العشوائي (error or innovation or shock term).

ويمكن تقسيم نماذج عدم تجانس التباين المشروط على نوعين رئيسين، الاول نموذج يستخدم دالة مضبوطة لتحكم نمو التباين المشروط مثل نموذج GARCH المستخدم في هذا البحث، والثاني نموذج يستخدم معادلة تصادفية لوصف التباين المشروط ومنها نموذج التذبذب التصادفي (stochastic volatility model) وهذا النموذج خارج اطار هذا البحث.

ان اي عملية تكون غير مرتبطة اذا كان التوقع الشرطي للمشاهدة الحالية عن المشاهدات السابقة ثابت، ومثال ذلك عملية GARCH رغم ان التباين المشروط فيها غير ثابت، اي ان عملية GARCH تكون غير مرتبطة ومعتمدة ايضا. ويمكن وصف الاعتماد بدالة بسيطة لقيم مربع الاخطاء السابقة وقيم مربع التباين المشروط السابقة.[4]

نموذج ARMA(p,q) [3]

يعرف نموذج السلسلة الزمنية ARMA(p,q) بالمعادلة الاتية:

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \qquad (1)$$

ان المتوسط المشروط μ_t للسلسلة الزمنية يعتمد على المعلومات السابقة لحد الزمن $(t-1)$ والتي تسمى F_{t-1} (وهي المشاهدات السابقة Y_{t-i} والاخطاء السابقة a_{t-j}) حيث يكون:

$$\mu_t = E(Y_t \backslash F_{t-1}) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i Y_{t-i} - \sum_{j=1}^{q} \theta_j a_{t-j} \qquad (2)$$

واهم افتراضات انموذج ARMA ان الخطأ a_t يخضع لنموذج عشوائي نقي (Pure Random Error) او ما يعرف بمصطلح التشويش الابيض (White Noise) اي يكون $a_t \sim iid(0, \sigma_a^2)$، والتباين الشرطي يكون ثابتا بغض النظر عن رتبة النموذج (p,q) اي $Var(Y_t \backslash F_{t-1}) = \sigma_a^2$ وان $Y_t \backslash F_{t-1} \sim (\mu_t, \sigma_a^2)$.

نموذج GARCH(m,s) [8]

يعرف نموذج GARCH(m,s) بالمعادلتين الاتيتين:

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad (3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (4)$$

حيث ان ε_t هو خطأ مستقل ومتماثل التوزيع ومتوسطه المشروط يساوي صفراً وتباينه المشروط يساوي واحداً. اي $\varepsilon_t \backslash F_{t-1} \sim iid(0,1)$ وعليه فان $a_t \backslash F_{t-1} \sim iid(0, \sigma_t^2)$ وان التباين المشروط لـ Y_t هو σ_t^2 اي $Var(Y_t \backslash F_{t-1}) = \sigma_t^2$ وشروط استقرارية النموذج هي: $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_j \geq 0,$ $\sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i) < 1$ وان r يمثل القيمة الكبرى من المقدارين (m,s).

خصائص نموذج GARCH(m,s) [8]

على فرض

$$\eta_t = a_t^2 - \sigma_t^2 \qquad (5)$$

فان $E(\eta_t \backslash F_{t-1}) = 0$ و $E(\eta_t \eta_{t-j}) = 0$ و η_t هي عملية غير مرتبطة وهي خطأ ضعيف (اي ليس خطأ مستقل ومتماثل التوزيع). وبذلك فان خصائص النموذج تكون كالاتي:

1- ان a_t^2 يمكن تحويلها الى نموذج ARMA(r,s) وفق الصيغة الاتية:

$$a_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i)\, a_{t-i}^2 + \eta_t - \sum_{j=1}^{s}\beta_j \eta_{t-j}^2 \qquad (6)$$

حيث تكون قيم المعاملات α_i او β_i اصفاراً للفرق (p-q) .

2- ان σ_t^2 تكون AR(r) بمعاملات عشوائية

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i a_{t-i}^2 + \beta_i)\sigma_{t-i}^2 \qquad (7)$$

3- التباين غير الشرطي للخطأ

$$Var(a_t) = \alpha_0 / \{1 - \sum_{i=1}^{r}(\alpha_i + \beta_i)\} \qquad (8)$$

4- التوزيع غير الشرطي لـ a_t يكون مدبب ذو قمة عالية (Leptokurtic) اي ان معامل التفرطح (Kurtosis) اكبر من معامل تفرطح التوزيع الطبيعي.

نموذج ARMA(p,q)-GARCH(m,s) [7]

مما سبق يتضح ان نماذج ARMA(p,q) يكون فيها المتوسط المشروط غير ثابت والتباين المشروط للخطأ ثابت. في حين ان نماذج GARCH(m,s) يكون فيها المتوسط المشروط ثابت والتباين المشروط للخطأ غير ثابت. فاذا كان المتوسط المشروط والتباين المشروط كلاهما يعتمدان على الماضي (غير ثابتين) فيمكن في هذه الحالة دمج النموذجين في نموذج واحد يعرف بنموذج ARMA(p,q)-GARCH(m,s) حيث يصبح كالاتي:

$$Y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p}\phi_i Y_{t-i} + a_t - \sum_{j=1}^{q}\theta_j a_{t-j} \qquad (9)$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \backslash F_{t-1} \sim iid(0,1) \qquad (10)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (11)$$

ان المعادلة (9) تعرف بمعادلة المتوسط، والمعادلة (11) تعرف بمعادلة التذبذب (Volatility)، وان Y_t يمثل نموذج ARMA(p,q) باستثناء ان حد الخطأ (white noise) a_t ليس مستقلاً ومتماثلاً ويعرف باسم الخطأ الضعيف، وهو عملية غير مرتبطة لذا فله نفس خصائص دالة الارتباط الذاتي (ACF) لعملية الخطأ المستقلة، لذلك فان Y_t لها نفس دالة الارتباط الذاتي لنموذج ARMA(p,q) بخطأ ليس ضعيف. كما ان سلسلة a_t^2 سوف تخضع لنموذج ARMA(r,s).

تقدير معلمات النموذج[8]

يتم تقدير معلمات النموذج بطريقة الامكان الاعظم المشروطة (Conditional Maximum Likelihood) وعدد المعلمات التي تقدر هو مجموع معلمات النموذجين (p+q+1+m+s+1). وحيث ان المعادلات الناتجة من مشتقة لوغارتم دالة الامكان بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها لاتكون خطية، لذا يتم اللجوء الى الطرق العددية المشتقة من طريقة Newton-Raphson التكرارية، واحدى هذه الطرق هي طريقة الباحثين (Berndt, Hall, Hall and Hausman) المعروفة اختصاراً BHHH التي يقدر بها متجه المعلمات ($\psi = [\phi_0\ \phi_1 \ldots \phi_p \theta_1 \ldots \theta_q \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_m \beta_1 \ldots \beta_s]'$) وفق الصيغة الاتية :

$$\psi_{k+1} = \psi_k + B_k^{-1} V_k \qquad (12)$$

اذ ان: ψ_k متجه المعلمات في الدورة k .

ψ_{k+1} متجه المعلمات في الدورة k+1 .

V_k متجه المشتقة الاولى في الدورة k وبالصيغة:

$$V_k = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial l_t}{\partial\phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial\phi_1}\ldots\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_1}\ldots\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\beta_s}\right)' \qquad (13)$$

B_k مصفوفة المشتقة الثانية في الدورة k وبالصيغة:

$$B_k = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{\partial l_t}{\partial\phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial\phi_1}\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_1}\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\beta_s}\right)'\left(\frac{\partial l_t}{\partial\phi_0}\frac{\partial l_t}{\partial\phi_1}\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\theta_q}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_0}\frac{\partial l_t}{\partial\alpha_1}\ldots\frac{\partial l_t}{\partial\beta_s}\right) \qquad (14)$$

ويعاد تكرار تقدير المعلمات حتى تتقارب المقدرات بين دورتين متتاليتين بفرق صغير يحدده الباحث مثل 0.0001.

توزيع Laplace (Laplace Distribution) [5]

اذا كان Y_t يخضع لنموذج ARMA(p,q) حسب معادلة (1) ، واذا افترضنا ان متجه المعلمات هو ψ وان الخطأ المشروط بالمعلومات الماضية $a_t \backslash F_{t-1}$ يتبع توزيع Laplace بمتوسط يساوي صفراً وتباين يساوي σ^2، فان دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة لـ $a_t \backslash F_{t-1}$ هي :

$$f(a_t \backslash F_{t-1}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left[-\sqrt{2}\left|\frac{a_t}{\sigma}\right|\right] \quad , \quad -\infty < a_t < \infty \qquad (15)$$

وهي نفس دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة لـ Y_t. وباخذ اللوغارتم الطبيعي لها تصبح:

$$l_t = \ln f(y_t \backslash F_{t-1}) = -\frac{\ln(2)}{2} - \ln(\sigma) - \sqrt{2}\left|\frac{a_t}{\sigma}\right| \qquad (16)$$

ولتقدير المعلمات نجد المشتقات الاتية:

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى ϕ_0

$$\frac{\partial l_t}{\partial \phi_0} = \frac{a_t\sqrt{2}}{|a_t|\sigma}\left[1 + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \phi_0}\right] \qquad (17)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \phi_0} = \left[1 + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \phi_0}\right] \qquad (18)$$

$t = 1, 2, \dots, n$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى ϕ_i

$$\frac{\partial l_t}{\partial \phi_i} = \frac{a_t\sqrt{2}}{|a_t|\sigma}\left[Y_{t-i} + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \phi_i}\right] \qquad (19)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \phi_i} = \left[Y_{t-i} + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \phi_i}\right] \qquad (20)$$

$t = 1, 2, \dots, n \,, i = 1, 2, \dots, p$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى θ_j

$$\frac{\partial l_t}{\partial \theta_j} = \frac{a_t\sqrt{2}}{|a_t|\sigma}\left[-a_{t-j} + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \theta_j}\right] \qquad (21)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \theta_j} = \left[-a_{t-j} + \sum_{k=1}^{p} \phi_k \frac{\partial Y_{t-k}}{\partial \theta_j}\right] \qquad (22)$$

$t = 1, 2, \dots, n \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$

اما اذا كان الخطأ يتبع نموذج GARCH(m.s) فان $\varepsilon_t \backslash F_{t-1}$ يتبع توزيع Laplace بمتوسط يساوي صفرا وتباين يساوي واحدا، وان $a_t \backslash F_{t-1}$ يتبع توزيع Laplace بمتوسط يساوي صفرا وتباين يساوي σ_t^2 و σ_t^2 معرفة بالمعادلة (11). ولتقدير نمـــــــــوذج ARMA(p,q)-GARCH(m,s) فيكون باعتبار ان كل σ^2 هي σ_t^2 ودمج معلمات معادلـــة (9) مع معلمات المعادلة (7).

ولتقدير الجزء GARCH(m,s) يتم حساب المشتقات الاتية

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى α_0

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} = \left[\frac{|a_t|}{\sqrt{2}\sigma_t^3} - \frac{1}{2\sigma_t^2}\right]\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_0} \qquad (23)$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \sigma_{t-k}^2}{\partial \alpha_0} \qquad (24)$$

$t = 1, 2, \dots, n$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى α_i

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} = \left[\frac{|a_t|}{\sqrt{2}\sigma_t^3} - \frac{1}{2\sigma_t^2}\right]\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_i} \qquad (25)$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_i} = a_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \sigma_{t-k}^2}{\partial \alpha_i} \qquad (26)$$

$t = 1, 2, \dots, n \,, \; i = 1, 2, \dots, m$

- مشتقة لوغارتم دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة للمتغير Y_t بالنسبة الى β_j

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} = \left[\frac{|a_t|}{\sqrt{2}\sigma_t^3} - \frac{1}{2\sigma_t^2}\right]\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_j} \qquad (27)$$

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_j} = \sigma_{t-j}^2 + \sum_{k=1}^{s} \beta_k \frac{\partial \sigma_{t-k}^2}{\partial \beta_j} \qquad (28)$$

$t = 1, 2, \dots, n \quad , \quad j = 1, 2, \dots, s$

ويتم التقدير بطريقة BHHH التكرارية.

النماذج المستخدمة مع القيم الافتراضية للمعلمات

فيما يلي النماذج المدروسة من قبل الباحث في تجارب المحاكاة مع القيم الافتراضية لكل نموذج ولثلاث مجاميع مختلفة.

جدول (1)

يبين القيم الافتراضية المستخدمة في تجارب المحاكاة لتوليد معلمات النماذج المقترحة

Model	Parameters														
	Case 1					Case 2					Case 3				
	ϕ1	Θ1	α0	α1	β1	ϕ1	Θ1	α0	α1	β1	ϕ1	Θ1	α0	α1	β1
ARMA(0,1)-GARCH(1,0)	-	.31	0.1	.22	-	-	.7	.3	.5	-	-	-.5	.7	.1	-
ARMA(1,0)-GARCH(1,0)	.35	-	.4	.25	-	.7	-	.2	.5	-	-.5	-	.5	.1	-
ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	.5	.1	.2	.4	-	-.5	.8	.45	.15	-	.8	.5	.35	.45	-
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	.25	.31	.1	.22	.17	-.1	.2	.8	.35	.4	-.2	-.4	.25	.1	.3

المقارنة بين مقدرات التوزيع الطبيعي ومقدرات توزيع Laplace .

تم تصميم تجربة باستخدام المحاكاة للمقارنة بين مقدرات التوزيع الطبيعي ومقدرات توزيع Laplace عندما تتبع السلسلة الزمنية توزيع Laplace بالمعلمات المذكورة في الجدول (1). حيث تم توليد الخطأ المعياري للسلسلة الزمنية باستخدام مولد الاعداد العشوائية في توليد المتغيرات التي تتبع توزيع Laplace طبقاً للمعادلة الاتية[5]:

$$\ln(2R)\sqrt{0.5} \quad \text{if } R \le 0.5 \quad , \quad \ln(2-2R)\sqrt{0.5} \quad \text{if } R > 0.5$$

ومن ثم تم حساب الاخطاء الناتجة عن مطابقة النماذج المذكورة وتطبيق الخطوات اللازمة في تجارب المحاكاة للتوزيعات المستمرة، والنتائج التي تم الحصول عليها كانت كما في الجداول المرقمة من (2) الى (5) الموضحه في الملحق ومن خلال تلك الجداول يلاحظ ما يأتي:

1- في تجربة النموذج ARMA(0,1)-GARCH(1,0) ومن خلال الجدول رقم (2) يتبين ان مقدر التوزيع الطبيعي للمعلمة الافتراضية Θ_1 لايبتعد كثيراً عن القيم الافتراضية المقترحة وبالاخص عندما يكون حجم العينة كبيراً وهذا يشير الى عدم تأثر قيم المقدر عندما تتبع السلسلة الزمنية توزيع Laplace وفي بعض الحالات يكون المقدر باستخدام توزيع Laplace افضل من مقدر التوزيع الطبيعي وذلك بالمقارنة لقيم MSE.
اما فيما يخص مقدرات المركبة GARCH للمعلمتين α_0 و α_1 فان قيم MSE لمقدر Laplace كان اقل من مقدر التوزيع الطبيعي على الاغلب وبالاخص في حالة العينات الكبيرة وعندما تكون القيم الافتراضية مساوية الى α_0=0.3 و α_1=0.5.

2- في تجربة النموذج ARMA(1,0)-GARCH(1,0) ومن خلال الجدول رقم (3) يتبين ان معدل المعلمة ϕ_1 في حالة توزيع Laplace كانت اقرب للقيم الافتراضية من معدلها في حالة التوزيع الطبيعي. كما ان قيم MSE هي الاخرى كانت الاقل في حالة توزيع Laplace وللقيم الافتراضية ولاحجام العينات كافة عدا حالة α_1=0.35.
اما فيما يخص مقدرات المركبة GARCH فان قيم MSE لمقدر المعلمة α_0 في حالة توزيع Laplace تكون اقل من قيم MSE في حالة التوزيع الطبيعي عندما α_0=0.2 وعدا ذلك يكون العكس، بينما تكون قيم MSE لمقدر المعلمة α_1 في حالة توزيع Laplace اقل من قيم MSE في حالة التوزيع الطبيعي عندما تكون α_1=0.5، وينطبق التحليل نفسه لمقياس الكفاءة النسبية.

3- في تجربة النموذج ARMA(1,0)-GARCH(1,1) ومن خلال الجدول رقم (4) يتضح ان كل المقدرات الخاصة بالنموذج والتي تتبع توزيع Laplace تتفوق على مقدرات التوزيع الطبيعي بالاعتماد على مقياس MSE عدا مقدر المعلمة α_0 عند حجم العينة 50.

4- في تجربة النموذج ARMA(1,1)-GARCH(1,1) ومن خلال الجدول رقم (5) كانت الافضلية لمقدرات Laplace عموما لانها تمتلك اقل قيمة لـ MSE وتمتاز بكفاءة نسبية جيدة وذلك عند الحالات الافتراضية واحجام العينات كافة.

خلاصة نتائج التجربة الثانية:

يتبين من الجدول (6) ولمجمل هذه التجربة ان النماذج المدروسة ولجميع احجام العينات اقتربت من توزيع Laplace بنسبة 87%، في حين اقتربت من التوزيع الطبيعي بنسبة 13%. ويلاحظ ان زيادة حجم العينة يبعد البيانات عن التوزيع الطبيعي مخالفاً بذلك نظرية الغاية المركزية.

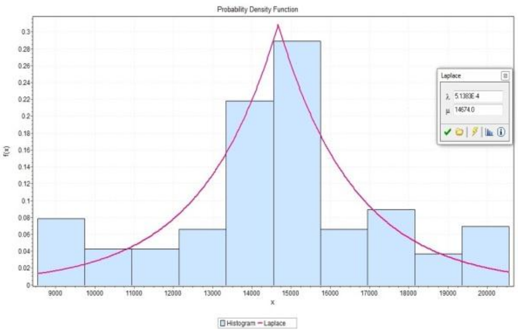
ويتضح من الجدول ان مجمل النماذج المدروسة تقترب من توزيع Laplace عند حجم عينة 500 و 750 بنسبة 100%، وتقترب من التوزيع الطبيعي عند حجم عينة 50 بنسبة 33%.

ولمجمل احجام العينات فان النموذجين ARMA(1,0)-GARCH(1,1) و ARMA(1,1)-GARCH(1,1) تقترب من توزيع Laplace بنسبة 100% لكل منهم. وكان النموذجين ARMA(0,1)-GARCH(1,0) و ARMA(1,0)-GARCH(1,0) الاقرب للتوزيع الطبيعي بنسبة 27% لكل منهما .

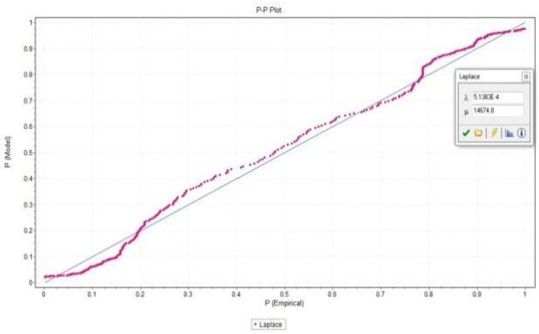
التطبيق

ان مؤشر Nikkie225 يمثل 225 شركة يابانية كبيرة، ويحسب هذا المؤشر بشكل يومي منذ عام 1950. واخذت عينة بحجم 650 مشاهدة من بيانات تمثل متوسط سعر السهم الواحد في بورصة طوكيو محسوبة بالدولار الامريكي، للمدة من 1-10-2012 ولغاية 29-5-2015.

تم تبويب البيانات ورسم المدرج التكراري مع منحنى توزيع Laplace(14674,5.1383E-04) كما موضح بالشكل (1)، وكذلك تم ادراج الرسم البياني الاحتمالي (Probability Plot) كما في الشكل رقم (2)، ومن الشكلين يظهر ان البيانات تتبع توزيع Laplace، ويؤكد ذلك اختبار Kolmogorov-Smirnov حيث بلغت احصاءة الاختبار 0.05624 التي تقابل مستوى معنوية (p-value) 0.0353 وقبلت فرضية العدم (التي تنص على ان البيانات تتبع توزيع Laplace) بمستوى معنوية 0.035 و0.01.

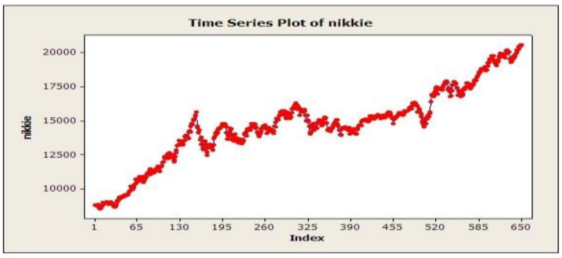


الشكل (1)
يمثل رسم المدرج التكراري مع منحنى توزيع Laplace للسلسلة الزمنية لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية.

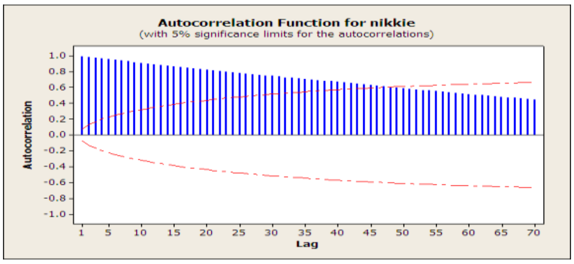


الشكل (2)
يمثل الرسم البياني الاحتمالي لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية التي تتبع توزيع Laplace.

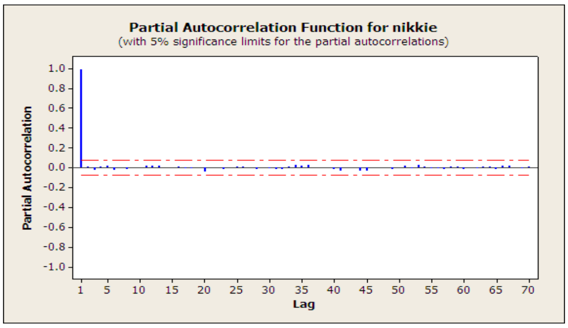
تم رسم السلسلة كما في الشكل (3) حيث يوضح اتجاها متزايداً فضلاً عن وجود التذبذب في شكل السلسلة. ثم رسمت دالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي للسلسلة كما في الشكلين (4) و(5) على التوالي. حيث ان دالة الارتباط الذاتي تتناقص تدريجيا، ودالة الاتباط الذاتي الجزئي تنقطع بعد الفترة الزمنية الاولى مما يرجح ان تكون البيانات خاضعة لنموذج AR(1).



الشكل (3)
يمثل رسم السلسلة الزمنية لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية



الشكل (4)
يمثل رسم دالة الاتباط الذاتي لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية



الشكل (5)
يمثل رسم دالة الاتباط الذاتي الجزئي لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية

ومن ثم تم تقدير معلمات النموذج باعتبار الخطأ يتبع توزيع Laplace ببرنامج مكتوب من قبل الباحثين وكانت النتائج كالأتي:

$\hat{\phi}_0 = 2.342279$, $\hat{\phi}_1 = 0.9998$

Ln (Likelihood) = -4414.768 , $\hat{\sigma}_a^2 = 93072.88$

ولمعرفة وجود الارتباط المتسلسل (تأثير ARCH) في النموذج، تم اخذ مربعات البواقي $(\hat{a}_t^2)$ واجري اختبار Lagrange Multiplier كما في الصيغة الاتية:

$$LM = nR^2 \sim \chi^2_{(u)} \quad (29)$$

حيث n تمثل حجم العينة و R^2 يمثل معامل التحديد. والاختبار يعادل احصاءة F لاختبار الفرضية:

$$H_0: \omega_1 = \omega_2 = \cdots . = \omega_u$$

لمعادلة الانحدار الاتية:

$$a_t^2 = \omega_0 + \omega_1 a_{t-1}^2 + \cdots . + \omega_u a_{t-u}^2 + e_t \quad , \quad t = u+1, \ldots , n \quad (30)$$

وترفض فرضية العدم عند مستوى معنوية معين (α) عندما يكون $LM > \chi^2_{(u)}$.

حيث تم مطابقة عدة نماذج نتائجها في الجدول رقم (7)، ويبين الجدول رفض فرضية العدم باستثناء حالة P=1 مما يدل على وجود مشكلة عدم تجانس التباين المشروط في النموذج.

وعليه تم استخدام مربعات البواقي لمطابقة نموذج ARCH(1) التي تتبع توزيع Laplace، وبالتالي فان قيم المقدرات تكون كالاتي:

$\hat{\alpha}_0 = 93446.91$, $\hat{\alpha}_1 = -0.02459806$

ولان $\hat{\alpha}_1 < 0$ فان النموذج غير مستقر ويهمل، وعليه تم مطابقة نموذج ARCH(2)، وكانت نتائجه كالاتي:

$\hat{\alpha}_0 = 4560.174$, $\hat{\alpha}_1 = 0.438$, $\hat{\alpha}_2 = 0.513$

وحيث ان $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = 0.951$ اقل من الواحد، فان النموذج يحقق شرط الاستقرارية.

وللتحقق من كون النموذج ARCH(2) ملائم للبيانات يعاد اختبار Lagrange Multiplier لمربعات البواقي القياسية $\left(\frac{a_t}{\sigma_t}\right)^2$، والنتائج في الجدول (8).

الجدول (7)
يمثل اختبار Lagrange Multiplier لمربعات البواقي الناتجة من مطابقة النموذج AR(1) لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية

p	LM	chi(0.05,p)	Decision
6	296.240	12.592	Reject H0
5	18.060	11.070	Reject H0
4	18.088	9.488	Reject H0
3	7.117	7.815	Reject H0
2	6.480	5.991	Reject H0
1	0.179	3.841	Accept H0

الجدول (8)
يمثل اختبار Lagrange Multiplier لمربعات البواقي القياسية الناتجة من مطابقة النموذج AR(1)-ARCH(2)لبيانات اسعار الاسهم اليابانية اليومية

p	LM	chi(0.05,p)	Decision
6	1.932	12.592	Accept H0
5	1.290	11.070	Accept H0
4	1.292	9.488	Accept H0
3	0.647	7.815	Accept H0
2	0.648	5.991	Accept H0
1	0.299	3.841	Accept H0

ان قبول فرضية العدم لكل النماذج اعلاه يشير الى ازالة تأثير عدم تجانس التباين المشروط عند مطابقة النموذج ARCH(2) من البيانات. وبذلك يصبح النموذج النهائي الملائم للبيانات الذي يمثل سلسلة اسعار الاسهم اليابانية اليومية لبورصة طوكيو هو AR(1)-ARCH(2) بالتفاصيل الاتية:

$$Y_t = 2.342279 + 0.9993Y_{t-1} + a_t$$

$$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = 04560.174 + 0.438a_{t-1}^2 + 0.513a_{t-2}^2$$

وفي الختام نورد النقاط الاتية:

1- ان دراسة السلاسل الزمنية المالية اظهر ان بعض السلاسل تتبع توزيعات مختلفة غير مدروسة سابقا مثل توزيع Laplace.
2- من خلال دراسة المحاكاة تبين ان النماذج التي يتبع فيها حد الخطأ توزيع Laplace كان يطابق البيانات المولدة بدرجة كبيرة
3- اما بخصوص الجانب التطبيقي كان النموذج AR(1)-ARCH(2) يطابق بيانات اسعار اسهم البورصة اليابانية عندما يتبع الخطأ توزيع Laplace.
4- نوصي باستخدام نماذج ARMA-GARCH في حالة توزيع Laplace في حالة توفر بيانات لسلاسل زمنية تتبع هذا التوزيع.
5- نوصي بفحص البيانات لاختيار التوزيع الانسب لها قبل مطابقة اي نموذج، وعدم الاعتماد فقط على نظرية الغاية المركزية، وبالاخص عند دراسة السلاسل الزمنية المالية.

المصادر:

1- Bábel j. (2008), "Modern Forecasting Methods in High Frequency Data Modeling" Journal of Information, Control and Management Systems, Vol. 6, No. 2, pp 3-14.
2- Bollerslev T. (1986), "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity" Journal of Econometrics, Vol. 31, pp 307–327.
3- Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (1994), Time Series Analysis, Forecasting and Control, 2nd edition, New York, Prentice-Hall.
4- Engle R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation" Econometrica, Vol. 50, No.4, pp 987-1007.
5- Forbes C., Evans M., Hastings N., & Peacock B. (2011), Statistical Distributions, Fourth Edition , John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.
6- Hurn S. (2009), "Likelihood Methods in Financial Econometrics" Three-Day Course, Economic Research Southern Africa, University of Stellenbosch, http://www.ncer.edu.au/events/documents/LikelihoodMethods.pdf.
7- Ruppert D. (2011), Statistics and Data Analysis for Financial Engineering, Springer Texts in Statistics, Springer Science + Business Media, LLC.
8- Tsay R.S. (2005), Analysis of Financial Time Series, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey.

الملحــــــــــق:

جدول (2)

يمثل نتائج تجارب المحاكاة للنموذج ARMA(0,1)-GARCH(1,0) في حالة توزيع Laplace

n	P	Case 1						Case 2						Case 3					
		APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE
			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE	
50	Ɵ1	0.31	0.313	0.036	0.307	0.025	0.678	0.7	0.694	0.03	0.695	0.019	0.633	-0.5	-0.5	0.025	-0.51	0.017	0.704
	α0	0.1	0.112	0.002	0.105	0.002	1.186	0.3	0.443	0.131	0.403	0.236	1.805	0.7	0.727	0.065	0.694	0.077	1.182
	α1	0.22	0.075	0.048	0.133	0.059	1.218	0.5	0.163	0.147	0.24	0.136	0.923	0.1	0.033	0.027	0.08	0.039	1.452
100	Ɵ1	0.31	0.313	0.016	0.303	0.01	0.642	0.7	0.699	0.012	0.695	0.007	0.608	-0.5	-0.5	0.01	-0.51	0.006	0.545
	α0	0.1	0.108	0.001	0.102	0.001	0.918	0.3	0.404	0.043	0.368	0.031	0.705	0.7	0.712	0.034	0.691	0.035	1.008
	α1	0.22	0.104	0.031	0.161	0.036	1.165	0.5	0.209	0.11	0.29	0.089	0.805	0.1	0.047	0.016	0.089	0.024	1.548
250	Ɵ1	0.31	0.308	0.007	0.314	0.003	0.52	0.7	0.695	0.007	0.702	0.002	0.322	-0.5	-0.5	0.004	-0.5	0.002	0.634
	α0	0.1	0.107	0.000	0.103	0.001	1.081	0.3	0.433	0.193	0.375	0.028	0.147	0.7	0.713	0.013	0.697	0.016	1.271
	α1	0.22	0.143	0.021	0.179	0.02	0.98	0.5	0.262	0.078	0.329	0.056	0.716	0.1	0.069	0.01	0.091	0.011	1.082
500	Ɵ1	0.31	0.308	0.004	0.314	0.002	0.446	0.7	0.696	0.005	0.702	0.001	0.278	-0.5	-0.5	0.002	-0.5	0.001	0.554
	α0	0.1	0.107	0.000	0.104	0.000	0.792	0.3	0.417	0.056	0.384	0.023	0.404	0.7	0.713	0.009	0.708	0.008	0.915
	α1	0.22	0.163	0.013	0.193	0.013	0.979	0.5	0.292	0.059	0.349	0.04	0.683	0.1	0.082	0.006	0.096	0.007	1.129
750	Ɵ1	0.31	0.311	0.002	0.309	0.001	0.388	0.7	0.701	0.002	0.699	0.000	0.22	-0.5	-0.5	0.001	-0.5	0.001	0.548
	α0	0.1	0.105	0.000	0.102	0.000	0.84	0.3	0.394	0.016	0.374	0.016	0.96	0.7	0.709	0.004	0.7	0.004	0.934
	α1	0.22	0.175	0.008	0.198	0.007	0.88	0.5	0.317	0.047	0.357	0.033	0.688	0.1	0.086	0.003	0.098	0.004	1.185

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV :القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ، MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

جدول (3)

يمثل نتائج تجارب المحاكاة للنموذج ARMA(1,0)-GARCH(1,0) في حالة توزيع Laplace

n	P	Case 1						Case 2						Case 3					
		APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE
			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE	
50	Φ1	0.35	0.329	0.016	0.287	0.017	1.108	0.7	0.662	0.021	0.674	0.015	0.705	-0.5	-0.483	0.02	-0.483	0.016	0.803
	α0	0.4	0.443	0.019	0.475	0.024	1.288	0.2	0.286	0.042	0.266	0.104	2.471	0.5	0.523	0.034	0.497	0.039	1.148
	α1	0.25	0.132	0.034	0.078	0.036	1.075	0.5	0.172	0.144	0.255	0.123	0.854	0.1	0.029	0.027	0.081	0.038	1.423
100	Φ1	0.35	0.344	0.006	0.345	0.005	0.789	0.7	0.665	0.015	0.684	0.006	0.389	-0.5	-0.493	0.009	-0.488	0.006	0.65
	α0	0.4	0.428	0.006	0.446	0.007	1.109	0.2	0.281	0.034	0.25	0.026	0.748	0.5	0.509	0.018	0.494	0.017	0.995
	α1	0.25	0.182	0.019	0.144	0.02	1.056	0.5	0.222	0.107	0.291	0.086	0.806	0.1	0.047	0.016	0.089	0.024	1.53
250	Φ1	0.35	0.345	0.008	0.344	0.003	0.427	0.7	0.687	0.007	0.692	0.002	0.306	-0.5	-0.496	0.004	-0.498	0.002	0.614
	α0	0.4	0.433	0.008	0.413	0.008	1.018	0.2	0.272	0.013	0.247	0.011	0.879	0.5	0.51	0.006	0.498	0.008	1.268
	α1	0.25	0.165	0.022	0.205	0.021	0.973	0.5	0.267	0.073	0.335	0.054	0.74	0.1	0.069	0.01	0.09	0.011	1.078
500	Φ1	0.35	0.34	0.006	0.265	0.016	2.507	0.7	0.691	0.004	0.696	0.001	0.276	-0.5	-0.497	0.002	-0.5	0.001	0.519
	α0	0.4	0.435	0.008	0.489	0.02	2.394	0.2	0.266	0.014	0.243	0.006	0.447	0.5	0.509	0.004	0.506	0.004	0.906
	α1	0.25	0.167	0.02	0.096	0.028	1.416	0.5	0.299	0.056	0.356	0.039	0.69	0.1	0.082	0.006	0.096	0.007	1.122
750	Φ1	0.35	0.347	0.003	0.348	0.003	0.838	0.7	0.695	0.002	0.699	0.000	0.233	-0.5	-0.499	0.001	-0.5	0.001	0.551
	α0	0.4	0.423	0.004	0.446	0.005	1.33	0.2	0.268	0.014	0.244	0.005	0.39	0.5	0.507	0.002	0.5	0.002	0.93
	α1	0.25	0.201	0.011	0.155	0.015	1.401	0.5	0.321	0.047	0.37	0.03	0.653	0.1	0.086	0.003	0.098	0.004	1.179

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV :القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ، MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

جدول رقم (4) يمثل نتائج تجارب المحاكاة للنموذج ARMA(1,0)-GARCH(1,1) في حالة توزيع Laplace

جدول رقم (4)

يمثل نتائج تجارب المحاكاة للنموذج ARMA(1,0)-GARCH(1,1) في حالة توزيع Laplace

n	P	Case 1						Case 2						Case 3					
		APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE
			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE	
50	Φ1	0.5	0.476	0.022	0.48	0.017	0.772	-0.5	-0.468	0.028	-0.473	0.023	0.814	0.8	0.759	0.015	0.767	0.012	0.806
	α0	0.1	0.151	0.012	0.116	0.009	0.805	0.8	1.13	1.202	0.932	0.899	0.748	0.5	1.276	8.607	0.937	1.517	0.176
	α1	0.2	0.102	0.025	0.167	0.037	1.512	0.45	0.172	0.104	0.241	0.096	0.923	0.35	0.151	0.059	0.223	0.06	1.01
	β1	0.4	0.23	0.238	0.337	0.269	1.131	0.15	0.152	0.079	0.221	0.104	1.31	0.45	0.218	0.28	0.298	0.301	1.074
100	Φ1	0.5	0.487	0.014	0.5	0.008	0.575	-0.5	-0.474	0.019	-0.474	0.011	0.551	0.8	0.771	0.01	0.789	0.005	0.475
	α0	0.1	0.145	0.009	0.121	0.006	0.727	0.8	1.086	0.553	0.94	0.398	0.719	0.5	1.054	1.222	0.819	0.468	0.383
	α1	0.2	0.114	0.023	0.179	0.029	1.284	0.45	0.192	0.089	0.275	0.071	0.801	0.35	0.169	0.052	0.259	0.044	0.854
	β1	0.4	0.273	0.25	0.324	0.26	1.038	0.15	0.187	0.082	0.208	0.095	1.151	0.45	0.32	0.291	0.34	0.292	1.006
250	Φ1	0.5	0.496	0.006	0.493	0.003	0.461	-0.5	-0.486	0.01	-0.498	0.004	0.376	0.8	0.788	0.004	0.792	0.002	0.379
	α0	0.1	0.132	0.005	0.115	0.005	0.881	0.8	1.059	0.43	0.933	0.263	0.612	0.5	0.912	0.638	0.719	0.294	0.461
	α1	0.2	0.14	0.014	0.184	0.017	1.262	0.45	0.246	0.059	0.312	0.046	0.773	0.35	0.208	0.033	0.268	0.029	0.875
	β1	0.4	0.317	0.238	0.34	0.243	1.018	0.15	0.193	0.077	0.184	0.07	0.912	0.45	0.39	0.274	0.397	0.271	0.989
500	Φ1	0.5	0.496	0.003	0.501	0.001	0.397	-0.5	-0.497	0.006	-0.498	0.002	0.275	0.8	0.789	0.003	0.798	0.001	0.223
	α0	0.1	0.121	0.004	0.112	0.003	0.776	0.8	0.991	0.198	0.917	0.133	0.673	0.5	0.768	0.298	0.663	0.145	0.485
	α1	0.2	0.152	0.01	0.18	0.009	0.876	0.45	0.263	0.048	0.322	0.032	0.673	0.35	0.224	0.027	0.271	0.02	0.724
	β1	0.4	0.351	0.224	0.359	0.219	0.979	0.15	0.21	0.066	0.19	0.058	0.878	0.45	0.443	0.256	0.433	0.247	0.966
750	Φ1	0.5	0.497	0.002	0.498	0.001	0.416	-0.5	-0.493	0.004	-0.497	0.001	0.315	0.8	0.793	0.002	0.797	0.001	0.335
	α0	0.1	0.118	0.003	0.108	0.002	0.783	0.8	1.007	0.173	0.883	0.106	0.612	0.5	0.77	0.262	0.654	0.149	0.567
	α1	0.2	0.164	0.009	0.185	0.007	0.792	0.45	0.283	0.042	0.339	0.026	0.619	0.35	0.24	0.024	0.28	0.015	0.633
	β1	0.4	0.36	0.213	0.372	0.208	0.979	0.15	0.195	0.058	0.195	0.052	0.901	0.45	0.436	0.254	0.437	0.239	0.942

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV: القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة المقدرة ، MSE : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

جدول (5)

يمثل نتائج تجارب المحاكاة للنموذج ARMA(1.1)-GARCH(1,1) في حالة توزيع Laplace

		Case 1						Case 2						Case 3					
n	P	APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE	APV	Normal		Laplace		RE
			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE			E(P)	MSE	E(P)	MSE	
50	Φ1	0.25	-0.101	0.587	-0.022	0.504	0.859	-0.1	-0.125	0.267	-0.114	0.205	0.768	-0.2	-0.123	0.371	-0.102	0.274	0.738
	Θ1	0.31	-0.069	0.728	0.033	0.59	0.811	0.2	0.16	0.362	0.181	0.247	0.682	-0.4	-0.319	0.435	-0.308	0.315	0.726
	α0	0.1	0.14	0.015	0.131	0.015	0.957	0.8	2.43	8.772	1.916	6.659	0.759	0.25	0.372	0.105	0.365	0.13	1.238
	α1	0.22	0.066	0.068	0.113	0.064	0.932	0.35	0.121	0.102	0.172	0.088	0.865	0.1	0.03	0.044	0.065	0.048	1.092
	β1	0.17	-0.015	0.612	0.03	0.518	0.847	0.4	-0.091	0.673	0.052	0.606	0.9	0.3	-0.001	0.688	0.014	0.663	0.964
100	Φ1	0.25	-0.058	0.529	-0.072	0.513	0.97	-0.1	-0.107	0.196	-0.1	0.136	0.692	-0.2	-0.115	0.265	-0.145	0.18	0.678
	Θ1	0.31	-0.002	0.593	-0.027	0.57	0.962	0.2	0.195	0.219	0.194	0.155	0.71	-0.4	-0.315	0.288	-0.351	0.182	0.633
	α0	0.1	0.154	0.013	0.138	0.012	0.879	0.8	2.286	8.314	1.673	2.918	0.351	0.25	0.429	0.118	0.395	0.106	0.899
	α1	0.22	0.107	0.042	0.173	0.037	0.877	0.35	0.174	0.06	0.23	0.05	0.834	0.1	0.046	0.022	0.085	0.022	1.024
	β1	0.17	-0.101	0.448	-0.036	0.374	0.834	0.4	-0.011	0.533	0.082	0.471	0.884	0.3	-0.124	0.578	-0.069	0.544	0.941
250	Φ1	0.25	-0.022	0.472	-0.006	0.411	0.872	-0.1	-0.091	0.099	-0.085	0.052	0.53	-0.2	-0.188	0.12	-0.166	0.08	0.667
	Θ1	0.31	0.038	0.504	0.058	0.437	0.868	0.2	0.211	0.097	0.218	0.05	0.52	-0.4	-0.389	0.114	-0.366	0.075	0.659
	α0	0.1	0.147	0.009	0.123	0.006	0.675	0.8	1.613	2.654	1.27	1.358	0.512	0.25	0.482	0.124	0.409	0.09	0.728
	α1	0.22	0.153	0.018	0.188	0.018	0.972	0.35	0.212	0.039	0.25	0.029	0.76	0.1	0.07	0.01	0.098	0.009	0.904
	β1	0.17	-0.074	0.259	0.033	0.214	0.83	0.4	0.211	0.383	0.289	0.304	0.794	0.3	-0.256	0.466	-0.103	0.42	0.9
500	Φ1	0.25	-0.054	0.484	-0.007	0.396	0.819	-0.1	-0.075	0.057	-0.104	0.027	0.466	-0.2	-0.189	0.062	-0.192	0.029	0.464
	Θ1	0.31	0.001	0.513	0.051	0.419	0.817	0.2	0.223	0.056	0.202	0.025	0.451	-0.4	-0.395	0.057	-0.397	0.024	0.425
	α0	0.1	0.13	0.005	0.112	0.003	0.613	0.8	1.36	1.352	1.067	0.545	0.403	0.25	0.46	0.104	0.373	0.069	0.662
	α1	0.22	0.162	0.013	0.189	0.013	0.979	0.35	0.245	0.027	0.265	0.021	0.762	0.1	0.085	0.006	0.096	0.006	0.898
	β1	0.17	0.015	0.193	0.109	0.141	0.729	0.4	0.311	0.269	0.396	0.214	0.794	0.3	-0.201	0.411	-0.012	0.376	0.915
750	Φ1	0.25	-0.032	0.455	-0.042	0.414	0.91	-0.1	-0.102	0.056	-0.105	0.016	0.292	-0.2	-0.19	0.039	-0.198	0.018	0.465
	Θ1	0.31	0.024	0.481	0.013	0.438	0.911	0.2	0.199	0.054	0.194	0.017	0.311	-0.4	-0.391	0.035	-0.399	0.016	0.469
	α0	0.1	0.122	0.004	0.106	0.002	0.511	0.8	1.256	0.95	0.99	0.307	0.323	0.25	0.443	0.096	0.36	0.056	0.576
	α1	0.22	0.175	0.013	0.197	0.01	0.77	0.35	0.244	0.025	0.271	0.018	0.705	0.1	0.082	0.005	0.098	0.005	0.896
	β1	0.17	0.067	0.152	0.145	0.102	0.668	0.4	0.347	0.259	0.399	0.202	0.78	0.3	-0.161	0.404	0.021	0.337	0.834

n: حجم العينة ، P : المعلمات ، APV: القيمة الافتراضية للمعلمة ، E(P): متوسط قيم المعلمة القدرة ، MES : متوسط مربعات الخطأ ، RE : الكفاءة النسبية

جدول (6)

مقارنة توزيع Laplace مع التوزيع الطبيعي

Model \ Case \ n	50			100			250			500			750			Laplace		Normal	
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	Total	Percent	Total	Percent
ARMA(0,1)-GARCH(1,0)	N	D	N	D	D	N	D	D	N	D	D	D	D	D	D	11	73%	4	27%
ARMA(1,0)-GARCH(1,0)	N	D	N	N	D	D	D	D	N	D	D	D	D	D	D	11	73%	4	27%
ARMA(1,0)-GARCH(1,1)	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	15	100 %	0	0%
ARMA(1,1)-GARCH(1,1)	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	15	100 %	0	0%
Laplace Total	8			10			10			12			12			52			
Laplace Percent	67%			83%			83%			100%			100%			87%			
Normal Total	4			2			2			0			0					8	
Normal Percent	33%			17%			17%			0%			0%					13%	

D : Laplace (Double Exponential) , N : Normal

....

....

....