وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
الجامعة المستنصرية
كلية الآداب

مجلة الفلسفة

مجلة علمية محكمة نصف سنوية تصدر
عن قسم الفلسفة/كلية الآداب
Biannual Journal
الترقيم الدولي ISSN : 1136-1992

العدد العشرون
أيلول ٢٠١٩

مجلة الفلسفة
العدد ٢٠

الفلسفة

مجلة علمية محكمة نصف سنوية يصدرها قسم الفلسفة

المجلة حاصلة على المعرف الدولي Doi
تحت رقم prefix :10.35284

العدد العشرون

٢٠١٩

رئيس التحرير

أ.د.حسن مجيد العبيدي

الهيأة العلمية الاستشارية

١- أ.د. أدونيس عكرة/رئيس المركز الدولي لعلوم الانسان/اليونسكو/لبنان.

٢- أ.د. الطاهر بن قيزة /جامعة تونس الاولى /تونس.

٣- أ.د. عمر بوساحة / جامعة الجزائر /الجزائر.

٤-أ.د.محمد الشيخ/جامعة محمد الخامس/المغرب.

٥- أ.د.اشرف منصور / جامعة الاسكندرية /مصر

٦-أ.د.عماد الدين عبد الرزاق/جامعة بني سويف/مصر.

٧- أ.د. حسون عليوي السراي/الجامعة المستنصرية /العراق

٨-أ.د.عبد الكريم سلمان الشمري/جامعة بغداد/العراق.

٩- أ.د. جميل خليل المعلة /جامعة الكوفة /العراق.

١٠-أ.د. عبدالله محمد علي الفلاحي/جامعة إب/اليمن.

البريد الالكتروني

art.phi_magazine@uomustansiriyah.edu.iq

مدير التحرير

أ.د.عارف عبد فهد

كلية الآداب -المستنصرية

سكرتير التحرير

م.م. أسماء جعفر فرج

كلية الآداب -المستنصرية

الاشراف اللغوي

م.د.منار صاحب

كلية الآداب/المستنصرية

تنضيد

م.م.أثير محمد مجيد

المحاسب المالي

رنا حسين عباس

المسؤول على موقع DOI

المهندسة

ريهام ماجد عبد الكريم

الترقيم الدولي:Issn (١٩٩٢-١١٣٦)

فهرست بدار الكتب والوثائق وإيداعها تحت رقم (٧٤٢)لسنة (٢٠٠٢)

تصميم وطباعة

مكتب الإثير

للنشر والطباعة

الفلسفة

مجلة علمية محكمة يصدرها قسم الفلسفة

العدد
العشرون
أيلول
٢٠١٩

المحتويات

كلمة رئيس التحرير

محور الفلسفة الحديثة والمعاصرة

١-فلسفة الدين في الفكر الغربي المعاصر وليم جيمس إنموذجا)*	أ.د. حسن مجيد العبيدي	٣-٢٠
٢-فلسفة الرياضيات برؤية تكاملية الاتصال والانفصال	أ.م.د. كريم موسى حسين	٢١-٥٠
٣-جدلية التنبؤ عند كارل بوبر وإثرها على الفلسفة المعاصرة	م. د. علاء كاظم مسعود	٥١-٧٢

محور الفلسفة الإسلامية

٤-السِّيرةُ الذاتيَّةُ الْفَلسفيَّة وأبرزُ سماتِ الفيلسُوف	د. محمود سعيد حميدة عطية	٧٥-١١٢
٥- Muhammad On Ego,Experience and Life Conception Iqbal Religious	Dr. Rawaa Mahmoud Hussain	١١٣-١٣٤
٦-أثر الدراسات الاستشراقية في الخطاب الأركوني حول التراث	د.فريدة أولمو	١٣٥-١٤٨

محور الدراسات الأخلاقية والجمالية

٨-الأخلاق القانوني أم القانون الاخلاقي؟ (دراسة تحليلية في ضوء فلسفة القانون)	م. رقوا كاكة رقش سيد مينة م. سةردار مةلا عزيز	١٥١-١٧٠
٧-حوار الدلالة والمعنى في الفكر السيميائي بين البنيوية ومابعدها	م.م. زينة عواد عبد الله	١٧١-١٨٤

محور الدراسات النفسية والاجتماعية

٩-الكفاح الروحي الديني لدى طلبة الجامعة (الكفاح الإلهي ، الصراع الديني ، المخاطر الروحية)	أ.د. سعد عبد الزهرة الحصناوي م.م. فراس محمود عطية	١٨٧-٢١٢
١٠-التحرر من الالتزام الخلقي وعلاقته بالشعور بالخزي	أماني صالح زناد اشراف أ.م.د.ابتسام لعيبي شريجي اللامي	٢١٣-٢٣٨
١١- أثر التنوع الاجتماعي على فكرة الدولة العربية الحديثة دراسة سيسيولوجية في فلسفة الدين والقبيلة	أ.م.د. مشحن زيد محمد التميمي	٢٣٩-٢٥٢
١٢- تطور اتخاذ القرار لدى المراهقين والراشدين	أ.م .د أسيل مهدي نجم	٢٥٣-٢٧٨

قبس العدد

١٢-التفكير الإبداعي وفق فرضعة الخضراء للمنظر ديبونو (De BONE) لدى طلبة المدارس المهنية	ا.م .د.أحلام لطيف علي الموسوي	٢٧٩-٣٠٨

نص مترجم

١٣- نظريات الروح مقابل المعرفة الطبية: ابن رشد بوصفه مؤثرا في فرنسا في القرن الثالث عشر	هيذر ثورنتون ماكراي - جامعة ميسوري ترجمة: أ.م.د رحيم الشياع الساعدي	٣٠٩-٣١٨

عنوان المراسلة
العراق-بغداد-الجامعة المستنصرية
كلية الاداب/قسم الفلسفة
ص.ب:١٤٠٢٢
تلفون:٤١٦٨١١٩٨
Email:
art.phi_magazine@uomustansiriyah.edu.iq

فلسفة الرياضيات برؤية تكاملية الاتصال والانفصال

أ.م.د. كريم موسى حسين*

ملخص البحث:

يرمي البحث إلى تقصي مفهومي الاتصال والانفصال اللذين تعاقبا على وضع أسس فلسفة الرياضيات، وصولا إلى رؤية فلسفية جديدة لعلم الرياضيات تنسجم مع التحولات الكبرى لبناء نسق الأعداد، ولاسيما الاعداد الصماء والتخيلية، حيث يتكامل فيها الاتصال والانفصال، فبعد التمهيد ووضع خاتمة استنتاجات للبحث، جاءت فقرات البحث كالاتي :

الفقرة الأولى: "جدلية الهندسة والحساب"، بالتطابق مع الجدل الفلسفي بين الاتصال والانفصال، النواة المركزية لتأسيس فلسفة الرياضيات.

الفقرة الثانية: "مملكة الأعداد"، لمتابعة تشيد نسق الأعداد الحسابية والوقوف على المشاكل الفلسفية التي واجهته وصولا إلى خط الأعداد الحقيقية الممهد لإشكاليتي الأعداد غير النسبية والأعداد التخيّليّة.

الفقرة الثالثة: "إشكالية الأعداد غير النسبية "، تلك الإشكالية التي بحلها وصل الجدل الدائر عن التداخل بين الاتصال والانفصال إلى نهايته، ومهد الطريق لحل لغز الأعداد التخيلية.

الفقرة الرابعة: "مفارقة العدد التخيّلي"، للتعرف عما نعني بالعدد التخيّلي وعمق إشكاليته.

الفقرة الخامسة: "حل لغز الأعداد التخيلية"، الذي رافقته رؤية فلسفية جديدة لتكاملية الحساب والهندسة.

الفقرة السادسة: " محاكاة الطبيعة للأعداد التخيلية " للوصول إلى أن الوجود الطبيعي من الممكن كتابته وفق رمزية الأعداد المركبة المنبثقة من الأعداد التخيلية.

Abstract:-

The research aims to investigate the continuity and discontinuityconcepts which accompanied the science and philosophy of mathematic. Then the research focused on the new philosophical view for mathematics which appropriate with the great transformations for establishment the discipline of numbers, especially irrational and imaginary numbers . After the preface to the research, the research's sections came as follow:

Section (1): "Dialectics of geometry and arithmetic", in line with the philosophical debate between continuity and discontinuity, the central theme to explain this problem.

* قسم الفلسفة / كلية الآداب / جامعة بغداد

Section(2): “Kingdom of numbers”, to follow up the construction of the discipline of arithmetical numbers, to analysis the philosophical problem faced it, and to reach the line of real numbers which caused the problems of irrational and imaginary numbers.
Section(3) : “Problem of irrational numbers”, which by its solution, the debate of interference between continuity and discontinuity reached to its end, and paved the way for solving the puzzle of imaginary numbers.
Section (4): “Paradox of the imaginary number”, to know what we mean by the imaginary number and the depth of its problematic .
Section(5): “Solving the puzzle of imaginary numbers”, which was accompanied by a new philosophical vision of the complementary between arithmetic and geometry.
Section(6) : “Simulation of the nature to the imaginary numbers” to reach that the natural existence is possibly written according to a symbolization of the compound numbers which emerge from the imaginary numbers.

تمهيد :

لقد كان النظر بفلسفة الرياضيات يمتد إلى بواكير الفكر الفلسفي المنظم، ولعل الابرز في تينك الفترة ما قامت به الفيثاغورية بتفسير كل الوجود المادي والروحي بأنه عدد ونغم[2] ؛ إذ أن العدد يمثل الدقة في قياس الكم وبالتالي يعني حساب الوجود، والنغم يمثل الدقة في توافقات الكيف، كالانسجام والتناسق في الموسيقى، الذي إذا ما اسقطناه على الوجود يعني هندسة الوجود بركنيه المادي والروحي، وبالمجمل من محصلة دقة الكم، ودقة الكيف، ستكون الرياضيات بفرعيها الحساب والهندسة ــ هي اصل الوجود وفق ما يبدو ما كانت ترمي له الفيثاغورية، بأن العالم عدد ونغم.

ومن المواقف الفلسفية المهمة التي تضع اتساق تام بين الرياضيات وضرورة العقل، ذلك الموقف الذي سجله فيلسوف المعرفة والعقل ايمانويل كانط (1724 – 1804)، إذ يسقط أولا، مفهومي المكان والزمان على فلسفة الرياضيات بشقيها، الحساب والهندسة، بقوله: " الأزمنة المختلفة ليست معا بل تتتالى، في حين الأمكنة المختلفة لا تتتالى بل تكون معا"[3].

واضعا تطابق تام ما بين تعاقب آنات الزمان مع تعاقب الأعداد من جهة، وبين التجاور المكاني مع اتصالية الهندسة من جهة أخرى. وثانيا، يرجع ما تستمده الهندسة من ضرورة عقلية قبلية إلى الشرط الصوري القبلي للمكان، باعتبارها العلم الذي يهتم

بالتناسق التام الصوري للمكان، في حين يرجع الضرورة العقلية القبلية للحساب، الذي يقوم على فكرة تتالي الاعداد، إلى الشرط الصوري القبلي للزمان المبني على فكرة التتالي للآنات الزمنية على خط الزمان الكلي المتجه إلى اللانهاية، بالتطابق مع خط الاعداد اللانهائي؛ باستثناء أن الخط الاخير تكون أجزائه متتالية ومتجاورة، في حين أجزاء خط الزمان متتالية وغير متجاورة[4].

هذا الامر ليس مستغربا بأن تتبوأ الرياضيات هذه المنزلة الفلسفية، بأنها العنوان الابرز لعقل الإنسان، فالإنسان ليس حيوانا ناطقا فحسب، وإنما الاصل هو حيوان رياضي؛ لأن إذا ما تمعنا النطق اللغوي، نجده جاء بمقاييس وتوافقات رياضية في عدد الحروف التي تكوّن ابجدية وكلمات اي لغة، وبالتوافق مع الكيفية التي تتناسق هندسيا بها عضلات الفم واللسان والحنجرة لابتكار اصوات كل حرف وكلمة على شكل نغمات يجري التعارف عليها، وتميزهما عن نسق باقي الاصوات المكونة للغة، علاوة على القدرة على إعادتها وتكرارها وفق هذا النسق الرياضي المشترك بين عدد من الناس، ناهيك عن الاشكال الهندسية التي تتخذها الحروف في الكتابة والاختلافات فيما بينها. وكل هذه الامور جرى تطويرها ببراعة رياضية جمعية شارك بها عموم المجتمع الانساني مع الاحتفاظ بخصوصية كل مجتمع بطريقة التعامل مع التنوع البيئي والاجتماعي الذي اثمر تنوعا كبيرا في لغات البشر؛ لكن أصل الاجراء الرياضي واحد.

لذلك وكما أن اللغة مبتكر لا تُسجل عائديتها لأحد أو مجتمع بعينه، فأن الرياضيات بصوريّتها التلقائية لم تكتشف أو تبتكر من أحد او من مجتمع بعينه، إذ هي منجز تلقائي لمجمل المجتمع الانساني تتجسد على شكل فاعلية صورية ملتصقة اشد الالتصاق بعقل الانسان الذي تتماهى صوريته مع صورية الرياضيات. أما المنجزات الرياضية المنظمة على صعيد علماء الرياضيات، تعبر عن براعة فائقة الوصف للعقل الرياضي، الذي يتمكن من سبك تراكم الفاعلية الرياضية للمجتمع الإنساني، التي فرضتها في احيان كثيرة متطلبات الانسان العملية، في قالب تجريدي يلخص كل هذا المجهود البشري لمرحلة ما؛ في لغة رمزية مختصرة وبإجراءات محددة تتصف بحذاقة مركزة ، توصلنا إلى نتائج بغاية الدقة وبسرعة مذهلة عما متداول في السياق العام السائد في التعامل الرياضي في زمن ما.

وغالبا ما تكون هذه المنجزات هي الحاصل الجمعي لما احرزه نخبة من الرياضيين في عصر ما وليس لفرد بعينه، معبرا عن مفصل ثوري علمي يتطلع التجديد في بنية هيكل العقل الرياضي الجمعي، وهذا ما يؤكد مرة أخرى البعد الاجتماعي للثورات العلمية ولعلم الرياضيات بالخصوص، وكما يراه فيلسوف العلم توماس كُون (Thomas Kuhn 1922 – 1994) بأن العملية الثورية الأصيلة للمنجزات العلمية الكبرى نادراً ما يتكفلها رجل واحد، ولا تنجز في زمن قصير[5]، أي هي تجسد وصلة متلاحمة من فاعلية الفكر الاجتماعي في مجال علمي ما لحقبة من التاريخ، معبرا عن ذلك بوضوح في مجال

الثورة الرياضية عالم الفيزياء ستيفن هوكنغ 2018 –1942) Steven Hawking) في وصفه رياضيات اقليدس بأنها كانت منجزا رياضيا ثوريا سبكت مجمل منجزات علماء الرياضيات السائدة في ذلك العصر بواسطة نسق رياضي منظم، وما إقليدس إلا من جمع هذه المنجزات ونظّم هذا النسق، وليس هو من انجز لوحده هذه الثورة الرياضية[6] .

لقد توالت الثورات الرياضية المتميزة ذات البعد الفلسفي لتشييد نسق الاعداد، ورافقها جدل فلسفي لبناء أسس لفلسفة الرياضيات، بعد أن بُذل جهد علمي جبار لفك لغز الاعداد غير النسبية والتخيّلية التي تظهر باستمرار في المعادلات الرياضية كحلول لها، والتي ارّقت علماء الرياضيات منذ عصر الاغريق؛ إذ شكلت تحدي للعقل الرياضي بانتهاكها عقلانية مبادئ الحس الرياضي المشترك، وبإحجامها عن الدخول في إطار فلسفة الرياضيات كي يمكن فهمها والتعامل معها؛ علاوة على اشكالية العثور على تطبيقاتها في ظواهر الطبيعة، ولسبر غور هذه الابعاد الفلسفية وتداعياتها على هذه الثورات الرياضية؛ علينا اولا ان نتعرف على النواة المركزية للإشكالية أسس فلسفة الرياضيات .

جدلية الهندسة والحساب : جدلية الاتصال والانفصال– كان حضور الاتصال الهندسي قويا في مخيلة العقل الرياضي منذ أن كان خاما ، إذ كان متواشجا مع الحدس التلقائي لمتصل هندسة المكان أكثر من صعوبة تجريد الكثرة العددية على شكل انفصالات ، ذات مقادير عددية متمايزة التي تشكل بذرة الحساب ؛ وحتى الأخيرة كانت تدرك على أنها انفصالات عددية لمتصلات هندسية أكثر رسوخا في وعي المكان من تجريد كثرتها العددية ؛ لذلك ليس بدعا أن نجد علم الرياضيات منذ انطلاقته المنظمة الأولى مع كتاب إقليدس < الاصول >Elements ، أن يقيم علم الرياضيات على أسس الهندسة ويجعل من الحساب امرا ثانويا مشتقا منها[7] . فمنذ مسلمته الأولى التي تفترض وجود خط مستقيم واحد بين نقطتين ، وحتى وصوله إلى مبرهناته الهندسية الأكثر تعقيدا ، قد كرس مركزية حضور بداهة الحدس التلقائي للمتصل الهندسي للمكان كأساس متين لبناء علم الرياضيات ، تاركا تجريد الانفصال الحسابي للعدد هامشا ثانويا لهذه المركزية. ولتكشف الرياضيات عن الجانب الإبداعي للعقل الرياضي وعن أسسه الفلسفية ؛ سعت بأن تتجاوز محاكاة التناسق المكاني للطبيعة في الأنساق المعلومة المقادير بصورية هندسية دقيقة ، والاتجاه إلى كشف المقدار المجهول الذي يفتقر له نسق مقاديره المعلومة غير متكاملة ؛ بواسطة تحليل ما يفترضه هذا النسق من علاقات تناسبية بين مقاديره . ورغم جديّة هذه المحاولة ، نجد أن هذا التحليل ظل منغمسا بصورية حدس الاتصال الهندسي ، ولم يستطع الإفلات منه ؛ ولعل المحاولة الأولى الجادة بهذا المجال التي تصدى لها ديوفانتس الاسكندري[8]خير مثال على ذلك، إذ انبرى بوضع نصوص تحليلية تكشف المقدار المجهول بواسطة سلسلة من المقاربات الهندسية في لغة ؛ علاماتها تؤسس على بداهة النقطة الهندسية والخط والسطح وباقي الاشكال المعروفة في ذلك الحين[9] .

ان الحضور الراسخ للمتصل الهندسي حتى في نصوص التحليل الرياضي الرامي إلى التحرر من الوصف ، والولوج إلى الكشف ، شكّل عبأ كبيرا على دينامية العقل الرياضي ؛ لأن لغة الاتصال الهندسي هيمن عليها المقدار الكبير لأشكال الاتصال للموجودات الطبيعية الخام أولا ، والتعايش الطويل لأشكال التناسق فيما بينها ثانيا ؛ لذا نرى رمزيتها مستندة على مركزيتين : كبر حضور مقادير الاتصال الهندسي في دالات الرموز أولا ، وبداهة الحدس الطبيعي لأشكال التناسق فيما بين دلالات تلك الرموز ثانيا ؛ ما يجعل تلك الرمزية تعاني من معوقين : ابتعاد دال الرمز عن خاصيته الأصيلة التجريدية ، بوصفه كائنا صوريا بسيط المقدار والشكل ، يكتسب هويته من داخل مكونات النسق الذي ينتمي له وليس من محاكاة الطبيعة ؛ والمعوق الثاني انغلاق اشكال العلاقات بين دلالات الرموز على محدودية بداهة الحدس الطبيعي لأشكال التناسق في الخارج .

وما ينتج عن ذلك أن تكون عقلانية الاتصال ولغة التحليل المنبثقة منها، تشكل مصدا أمام سبر غور المكنون الباطن الذي يريد أن يبوح به العقل الرياضي الناضج، والذي ينزع نحو بناء الانساق الرياضية التي تعيد إنتاج مكونات الخارج الطبيعي، وبدون أن تحاكيه استنساخا؛ بصورية رمزية دقيقة، وإكمال ما يفتقر له من مقادير مجهولة حسابيا، بواسطة نسق من العلاقات الرمزية التي تتجاوز الافق الضيق لعلاقات الحدس الطبيعي في الخارج، إلى تأسيس علاقات جديدة مستندة على فرضيات أسس النسق الرمزي ذاته .

لقد كان النسق الرمزي للحساب الذي أزاحته مركزية حضور الحدس الهندسي منذ القدم إلى الهامش، يستوعب كل خيوط نسيج بنية العقل الرياضي، ويلبي كل ما ذكرناه أعلاه من طموح نحو كتابة الرياضيات بلغة، رمزيتها مستندة على دال عقلي صرف، ودلالة يمتزجان فيها بداهة الحدس الطبيعي مع خيال العقل الرياضي؛ لذلك وكما ذهب فيلسوف العلم غاستون باشلار (1884 – 1962) بالقول : " إن الاتصال بالنسبة للرياضي هو صورة الممكن الصرف أكثر مما هو خاصية للواقع "[10]

نجد أن المقادير العددية للحساب تبّضع هذا الإمكان الصرف لاتصال الواقع الطبيعي إلى شرائح من الانفصالات العددية، على شكل رموز بسيطة مبتكرة من العقل؛ للتمكن من تمثله بدقة، والامساك به، وضبطه وفق نسق من العمليات الحسابية المستلهمة من الحدس الطبيعي للواقع؛ ولكن ضمن إطار منظومة من الاستدلالات الرياضية، التي تنساق طوعا وفق أسس النسق العقلي للحساب، وليس لضرورة التوافق مع متطلبات بداهة الحدس الطبيعي حصرا؛ لأن هذه المنظومة من العلاقات الحسابية ستنجب بعض الأحيان نسق من المقادير العددية، لا تتوائم مع ما يقتضيه الحدس الطبيعي: كالأعداد السالبة والاعداد التخيلية مثلا؛ ولكنها تمضي على وتيرة سلسلة الاستدلال العقلي للحساب، التي أحيانا أرست بالرياضيات على موانئ، رغم إنها ليست موجودة على خارطة الطبيعة؛ إلا أنها تشكل نماذج رياضية صورية دقيقة تستطيع احتواء ظواهر

وموجودات طبيعية غير مكتشفة، كما حصل مع النموذج الصوري للأعداد التخيلية، الذي عد رياضيا سلفا قبل تطبيقاته على الطبيعة كما سنرى لاحقا .

وبهذا الوصف تكون لغة وأسس الحساب، هو كتابة الطبيعة الرياضية للوجود بمنظور العقل الرياضي، الذي يتجاوز الوجود أحيانا، ويعبر عن جمال اتساق العقل الذي ابتكره حصرا. فهو نسق فرضي استنباطي تستند فلسفته على إنه ينطلق من كيانات مفترضة غير مستنسخة من مكونات الوجود الطبيعي ، ولا تتناقض معها في نفس الوقت؛ ويمضي قدما ببناء استنتاجات تقوم على أن: لا تتناقض فيما بينها أولا، ولا تفتقر لمن يفسرها خارج نسق كياناته الافتراضية ثانيا[11]، وبذلك تكون جميع مبادئ الرياضيات مغروزة في نسق الحساب، وتغدو الهندسة التي همشته هي نوع من أنواع الحساب .

ومن الملفت للنظر أن من بين التقابلات في تفكيكية جاك دريدا (1930–2004) المتمثلة بثنائية المركز – الهامش، تصلح بأن تضيء جدلية العلاقة بين الهندسة والحساب، فقد عالج دريدا هذه الثنائية بمفهوم استورده من جان جاك روسو أطلق عليه (منطق التكملة)، رغم أنه وظفه بشكل مختلف، والذي بموجبه يرى روسو في خضم معالجته لثنائية الطبيعة – التربية، بأن التربية تكمل الطبيعة، و" أن الطبيعة لا يُنـاب عنها : ومكملها لا يعمل انطلاقا منها ، فهو ليس ادنى منها فقط بل هو مغاير "[12]، من ناحية أن دور التربية في تنشئة الأولاد هي لنمو واستكمال الطبيعة البشرية[13] ؛ فهي بهذا المعنى تشغل موقعا ثانويا لمركزية الطبيعة البشرية كما يرى روسو. في حين مع دريدا بدا له مفهوم الطبيعة بمنظور منطق التكملة مفهوما معقدا، إذ وفق هذا المنطق تبدو الطبيعة رغم كونها الموضوع المركزي في هذه الثنائية، إلا أنها تعاني من نقص أصيل، لا يتم سده إلا بهذه التكملة الآتية من ذلك الهامش، عندئذ" المكمل هنا يكون بمثابة فرصة للبشرية وأصل انحرافها في آن"[14] ، ويمسي الشرط الأساسلوجودها. وقد كشف دريدا أن بواسطة منطق التكملة نستطيع أن نعكس الكثير من تراتبية ثنائية المركز – الهامش في مجالات النشاط الفكري للإنسان؛ ففي مجال اللغة كان فلاسفة اللغة يولون أهمية مركزية للكلام، ويزيحوا الكتابة إلى الهامش؛ على أساس أن الكلام هو النموذج اللغوي المثالي في التعبير عن الحضور ، وتزامن الدال مع الدلالة، في حين الكتابة تعبر عن الحضور الناقص وانفصال الدال عن دلالته، بمنحها فرصة تأويل المعنى للقارئ لغياب الكاتب؛ بيد أن هذه التراتبية عُكست في تحليل اللغة عند دريدا، من زاوية إننا لا نستطيع فهم تركيب الوحدات اللغوية والتمييز بينها بمجرد الحضور الخالص للصوت، ذلك الحضور الذي يسكنه الكثير من الغيابات، أي أنه حضور زائف ومضلل يخفي خلفه غيابات لا يمكن الإمساك بها لحظة الكلام ــ وبالتالي فأن الكتابة هي النموذج الأساس الذي يقوم عليه التحليل اللغوي، الذي يحبس بداخلة جميع الغيابات الفاعلة غير القادرة على الفرار من النص المكتوب، وتغدو المقارنات والتمايزات بين الوحدات اللغوية ممكنة التحليل؛ فالكلام برأي دريدا يعبر عن نمط من الخطاب البلاغي، وليس عن بنية

متماسكة كتلك التي تعتريها الكتابة، وتمسي الكتابة منضوية على مجمل مبادئ اللغة، ويمسي الكلام نوع من أنواع الكتابة، أي المركز نوع من أنواع الهامش[15].

هذا التحليل من الممكن اسقاطه على جدلية العلاقة بين الهندسة والحساب، وبواسطته نستطيع أن نفهم بقاء الحساب أمرا مكملا وهامشا نسبة إلى مركزية حضور الحدس الهندسي، وهو الذي يتضمن كل مبادئ الرياضيات ــ شكّل مصدا قويا في مسيرة تطور علم الرياضيات؛ لأن هناك تعارض قوي بين القوى والآلات المنتجة المحدودة للهندسة، والعلاقات الرياضية المتضخمة في العقل الرياضي التي يفرضها خيال الحساب، الأمر الذي سيؤدي بالضرورة إلى قيام ثورة في علم الرياضيات تعكس تراتبية المركز – الهامش .

لقد كانت صورية الهندسة ورمزيتها الاتصالية حتى عهد ديكارت، هي المهيمنة على كل بحوث الرياضيات بضمنها مبحث التحليل الرياضي، الذي كانت تصبو له آمال جل الرياضيين بالوثوب إلى مرحلة الكشف الرياضي كما اسلفنا سابقا؛ وكانت حتى الرموز في المعادلات الرياضية تصور على أنها اشكال هندسية، إذ كان يمثل الرمز (X) بأنه خط مستقيم، ويرمز لـ (X^2) بأنه مربع، ولـ (X^3) بأنه مكعب؛ ومن ثم لحل المعادلة الرياضية كانت تجمع وتطرح هذه المتصلات الهندسية وبحسب العمليات الرياضية التي تتضمنها الصيغة الرياضية، بعد أن ترسم هندسيا للوصول إلى إيجاد القيمة المجهولة.

فمن هنا نستطيع أن نخمن حجم المعوقات التي تواجه الانخراط في التحليل الرياضي، ناهيك عن المحددات التي تفرضها بداهة الحدس الهندسي، ولا سيما إذا ما ظهر رمز رياضي لا يستطيع ذلك الحدس من إدراكه؛ فعلى سبيل المثال إذا تضمنت الصيغة الرياضية الرمز (X^4)، كيف سينضم هذا الرمز الرباعي الابعاد إلى مظلة حدس الاتصال الهندسي، وكيف سيمثل هندسيا، والوجود الخارجي لا يمكن تحميله بأكثر من ابعاد مكانية ثلاثة [16].

على هذا الأساس لا نستغرب أن بوادر الثورة الرياضية في العصر الحديث بدأت حينما استلهم ديكارت الفرضية التي تجعل من المركز نوع من انواع الهامش وأدركها جليا، فكان بمثابة دريدا القرن السابع عشر بمحاولته الرياضية التي كان عنوانها الرئيس، أن تصبح الهندسة نوع من أنواع الحساب. ففي مستهل كتابه " الهندسة " ، لخص مشروعه الجديد بأنه عازم على حل جميع المشاكل الرياضية الناجمة من استحواذ البناء الهندسي على مجمل الفكر الرياضي، باستبداله بالنموذج الحسابي للأعداد والعمليات الحسابية المصاحبة لها؛ وبذلك يصبح عموم التحليل الرياضي والهندسي من ضمنه خاضعا للرمزية العددية والعمليات الحسابية المنظمة لها[17] . وعلى هذا الأساس الديكارتي لم يعد الرمز (X^2) يمثل شكل هندسي مربع، بل عدد مضروب في نفسه، ولم يعد الرمز (X^4) غير مألوفا؛ لأنه رباعي الابعاد، ولا ينسجم مع بداهة الحدس الهندسي، بل أمسى ببساطة وفق النموذج الديكارتي يعبر عن عدد مضروب بنفسه أربع مرات. وعلى هذا

المنوال توالت الفتوحات الرياضية التحليلية الكبرى في مجال التفاضل والتكامل وغيرها، على أساس التبادلية المرنة ما بين الاتصال والانفصال؛ وحتى الفتوحات الهندسية الجديدة المبنية على فكرة الاتصال حصرا، أسست نماذج هندسية غير إقليدية مستوحاة من أسس البنية الفكرية للحساب، بوصفه نسق فرضي استنباطي رمزيته لا تُستنسخ من العالم الخارجي، فجاءت هذه النماذج الهندسية علما بالممكنات الهندسية العقلية، ولا تطابق بداهة الحدس الهندسي للوجود الخارجي المؤسس على بديهيات اقليدس[18] .

ورغم هذا الجنوح نحو تحسّيب الرياضيات، وجعل انفصالية الصورية العددية للحساب مركزا للتحليل والجبر الرياضي، إلا أن هامش الاتصال الهندسي لا يلبث وان يبدأ بالظهور حتى في اصغر ما بينيّات الانفصالات العددية، دليلا على الارتباط الوثيق بين الحساب والهندسة، ما دفع البحث في فلسفة الرياضيات في النظر إلى هذا التداخل بين الانفصال والاتصال، برؤية جديدة تبدد بها ألغازا وقفت متحديا بارزا في تشيد نسق انفصالية مملكة الأعداد، فكان فك لغز الأعداد الصماء والأعداد التخيلية تتويجا لهذا الجهد الفلسفي؛ ولا يمكن فهم تدرج المشكلة الفلسفية والانهماك في حلها، إلا بالولوج إلى داخل مملكة الأعداد وتتبع خطوات تشييدها والمشاكل المرافقة لها .

مملكة الاعداد– عبرت الاعداد الطبيعية عن المواجهة الاولى للعقل الرياضي للإنسان في التعبير عن تجريد تعدد وكثرة الموجودات الطبيعية التي يواجهها في حياته، على شاكلة مثلا، يسكن رجل واحد مع امرأة واحدة، وله ثلاثة ابناء، ويرى شجرتين امام منزله؛ وكذلك يعبر نهرا واحدا كل يوم، ويصيد ثلاثة طيور بواسطة يديه الاثنين، التي تشتمل كل واحدة على خمسة اصابع، إذ كل هذه الموجودات التي يصادفها والتي يتعامل معها في خضم حياته اليومية، كان يرافقها ضمنا كثرة عددية تشكل اصلا طبيعيا لها ــ ومن هنا جاءت تسمية الاعداد الطبيعية[19]. ومع ذلك علينا أن لا نبالغ كثيرا بأن التعامل البدائي مع الكثرة العددية الطبيعية للعقل الرياضي الخام، كانت بهذه الدقة والوضوح في تميز ومعرفة الاعداد الطبيعية، كما هو عليه الامر بعد ان انتظمت رياضيا من زمن ليس بالبعيد على يد المتخصصين في الرياضة، فقد عبر عن ذلك برتراند رسل (1872–1970) بوضوح بقوله :

" ومع أن الاعداد الطبيعية مألوفة، إلا أنها غير مفهومة، فقليل منا من يستطيع أن يعرف المقصود بـ ' العدد ' أو ' الواحد ' ...وليست هذه الأمور سهلة بحال من الأحوال، فلقد كان المعتقد إلى وقت قريب أن هذه المفاهيم في الحساب أو بعضها على الأقل يجب أن يقبل على أنه أولي "[20]

على أية حال ، اكتسبت الاعداد الطبيعية إيجابيتها الوجودية من الخاصية الملموسة الصلبة للأشياء ذات العلاقة؛ فهي بهذا الحال أعداد موجبة، واكتسبت اكتمال الصورة من الخاصية الجمالية للمكان، الذي يعارض نقص وثلم الشكل التام؛ فهي بهذا الحال أعداد صحيحة، واكتسبت التتالي المنظم على ابسط ايقاعات التتالي بمقدار واحد فقط، مستمدة

ذلك من ابسط ايقاع لا يفارق الشعور الزماني للإنسان، بالتزايد المنظم للحظات الزمن ذات الايقاع الاحادي؛ فهي بهذا الوصف أعداد متتالية ذات الايقاع الاحادي ــ وبالتالي اصبحت الاعداد الطبيعية تعبر عن سلسلة متوالية من الاعداد الصحيحة الموجبة، التي تبدأ من العدد واحد وتتالى اطرادا منظما بزيادة مقدار واحد للعدد التالي؛ إذ شكلت هذه الاعداد النواة المركزية الطبيعية التي قام عليها علم الحساب، واعتلت عرش مملكة الأعداد بحيازتها على تلك المواصفات المثالية، فليس بدعا أن يصفها عالم الرياضيات الألماني ليبولد كرونيكير Leopold Kronecker (1823 – 1891) بأنها من خلق الله ، وباقي الأعداد من صنع الإنسان[21] ، ما جعلها المرجعية الوثقى التي باستطاعتها عدّ جميع الموجودات الصحيحة الموجبة؛ وعلى هذا الوصف سميت بـ (الاعداد العادّة) countable numbers .

أول مشكلة واجهت هذا النسق الجميل المناط بعدّ الاشياء، هي إذا ما طُلب منا عدّ الاشياء التي تحمل خاصية محددة في محل ما، ولم نعثر على أي شيء في هذا المكان يحمل هذه الخاصية، كيف إذن نعبر عن نتيجة العدّ بعدد حسابي مناسب؟ هنا كان أول ظهور اصطنعه العقل الرياضي بعيدا عن الرسوخ الطبيعي للأعداد لحل هذه المشكلة؛ لذا فرض مفهوم (الصفر) حاله، كضرورة لابد منها لحل هذه المشكلة؛ وبذا تصدر الصفر سلسلة الاعداد الطبيعية وتراجع العدد واحد إلى المرتبة الثانية؛ بالإضافة إلى هذه الضرورة الصفرية المعبرة عن (اللاشيء)، نجد أن العدد صفر أضاف نواحي جمالية في تدوين الاعداد، ولاسيما الكبيرة منها ؛ ذلك بتبسيط قواعد كتابتها اعتمادا على الموقع الذي يتخذه الصفر، فمثلا العدد (02) يعبر عن العدد (اثنان)، ولكن بتبديل موقع الصفر سنحصل على العدد(20) الذي يعبر عن العدد (عشرون) .

وفي خطوة لاحقة، إذا ما أراد العقل الرياضي أن يتجول بيسر وبسرعة في مملكة الاعداد الجميلة، عليه أن يبتكر العمليات الحسابية المرافقة لها؛ فجاءت عمليتي الجمع والطرح تتويجا وتلبية لهذه الحاجة، وكانت عملية الجمع وما نتج عنها مباشرة عملية الضرب لم تحدث أي مشكلة في نسق الاعداد الطبيعية، على أساس أن جمع أي عدد طبيعي مع أخر طبيعي سيكون الناتج عددا طبيعيا ايضا، وكذلك عملية الضرب التي هي شكل من أشكال الجمع المتكرر لنفس العدد لعدد من المرات (مضاهاته لعدد من المرات)، ستنتج عددا طبيعيا أخرا؛ فمثلا حاصل ضرب العددين الطبيعيين (3 X 4)، هو عملية الجمع المتكرر للعدد 3 لأربع مرات وسيكون الناتج (12)، الذي هو عدد طبيعي أخر .

بيد أن أس المشكلة والتي فتحت آفاق جديدة في نسق مملكة الاعداد، هي عملية الطرح وما نتج عنها مباشرة عملية القسمة، فعملية طرح العدد (3) من العدد (4) سيكون الناتج (1)، وهو عدد طبيعي وليس هناك مشكلة؛ ولكن حينما نطرح العدد (4) من العدد (3)، ستكون المشكلة حاضرة بقوة؛ لأننا لم نعثر على ناتج لهذا

الطرح في نسق الاعداد الطبيعية الموجبة. ومن هنا فُتح الطريق غير المعبد المغلق بالصفر، وانطلقت الرحلة إلى يسار الصفر، وولادة نسق جديد من الاعداد الصحيحة السالبة Negative Numbers، بعد ان كان الطريق معبدا إلى يمين الصفر حصرا؛ وبهذا الافق الجديد ابتعد مدلول العدد عن محاكاته الصلبة للموجودات الطبيعية، وأعلن انتمائه صراحة إلى اتساق وجمالية وضرورة العقل الرياضي. بيد أن ما هوّن أمر القبول بالأعداد السالبة من الناحية الشكلية هو الصفر ذاته ، من ناحية أن القبول بدلالة(اللاشيء)، الذي يتضمنه الصفر والذي ابتعد عن الاصل الطبيعي للعدد ، فلماذا لا نقبل بدلالة (أقل من اللاشيء)، الذي يتضمنه العدد السالب؛ ناهيك عن حقائق ومواقف تستدعي قبول فكرة العدد السالب من الناحية العملية، فمثلا إذا كان قياس الارتفاع نسبة إلى مستوى سطح الماء، أي مع أو فوق هذا المستوى يمثل القياس الموجب، فقياسه تحت هذا المستوى يستوجب القياس السالب، وكذلك يظهر هذا المفهوم جليا في تعامل الحساب المصرفي مع مفهوم الدين والقرض الذي يفرض الرصيد السالب للحساب، ولا ننسى هناك مفاهيم كهربائية تضمنت المضمون السالب، فهناك الشحنة الموجبة وإلى جانبها الشحنة السالبة[22] .

أما عملية القسمة فلم يكن حظها أقل مما أثارته عملية الطرح، فما هو معروف أن عملية القسمة هي نوع من أنواع الطرح المتكرر لعدة مرات لنفس العدد (المقسوم عليه – المقام –) من عدد آخر (المقسوم – البسط –)، بحيث يكون الباقي صفرا، وناتج القسمة سيمسي عدد المرات التي سيبلغ فيها ناتج الطرح صفرا، فمثلا ناتج قسمة العدد (6) على العدد 2)) آتي من :

$$6 - 2 = 4 \qquad 4 - 2 = 2 \qquad 2 - 2 = 0$$

إذن ناتج القسمة يساوي (3)، على أساس أن عدد المرات التي بلغت فيها عملية الطرح المتكرر لنفس العدد إلى قيمة الصفر، هو ثلاث مرات، وناتج القسمة هنا يمثل عدد طبيعي ويمر الحال بسلام؛ ولكن الوصول إلى قيمة الباقي المساوي للصفر لا تسير على هذا المنوال بيسر، فالكثير من عمليات الطرح المتكرر لنفس العدد تؤول إلى أن الباقي لا يساوي صفر؛ يعني ذلك أن ناتج القسمة ليس عددا صحيحا، وبالتالي ولوج أعداد جديدة لا نهائية تتوسط الاعداد الصحيحة صفتها الغالبة إنها أعداد غير صحيحة، ومن الممكن ان تكون موجبة أو سالبة سميت بـ (الاعداد الكسرية) Fractional Numbers ؛ فكما أطاحت عملية الطرح بالمفهوم الموجب للأعداد الطبيعية، جاءت عملية القسمة المنبثقة منها لتطيح بالمفهوم الصحيح لهذه الأعداد، معبرا برتراند رسل عن ذلك بقوله :" فقد احتجنا إلى الأعداد السالبة لكي تكون دائما عملية الطرح ممكنة ، وإلا كانت العبارة <A – B> خالية من المعنى عندما تكون <A> أصغر من <B> ، واحتجنا إلى الكسور حتى تكون عملية القسمة ممكنة دائما " [23]

التطور المهم الذي تبع ولوج الاعداد الكسرية، هو دمج الاعداد الصحيحة مع الاعداد

الكسرية في مفهوم حسابي واحد، وتوحيد مملكة الاعداد في نسق واحد، يصبح فيه كل عدد صفته الغالبة إنه مركب نسبي، على أساس أن كل عدد كسري مكون من مركب نسبي بين بسط ومقام، ومن الممكن احتواء الاعداد الصحيحة ضمن هذا النموذج النسبي، بتأويل كل عدد صحيح على أنه يمثل عدد كسري، بحيث بسطه يمثله العدد الصحيح ومقامه العدد واحد الذي لا يغير شيئا من قيمته العددية، وهنا التئمت جميع مفاهيم العدد، الصحيحة والكسرية، والسالبة والموجبة، تحت لواء مفهوم النسبية، وسمي هذا النسق الجديد بالأعداد النسبية Rational Numbers ، الذي دائما يترجم خطأ بالأعداد العقلانية أو المنطقية بسبب اللبس الحاصل في مصطلحRational المنحدر هنا من الاسم ratio وتعني النسبة وليس له علاقة بما هو عقلي أو منطقي .

وهنا أسجل اعتذاري عن الإطالة والإسهاب بهذه الفقرة ، بيد إنها ضرورية لمعرفة أن ما وصلنا إليه في هذه الرحلة في تطور مملكة الأعداد، والمشاكل التي برزت لم تمس جوهر فلسفة الرياضيات، بل على العكس أفادت في مد نسق الأعداد طولا وعرضا، وسعت إلى تضيق رسم هوية العدد بخاصية واحدة وهي إنه (مركب نسبي). وقد وقفت الحاجة العملية للإنسان إلى الرياضيات التي كانت ملاصقة له في جميع تفاصيل حياته في رفد الكثير من هذه التحولات، على خلاف علم المنطق الذي ظل يراوح في مكانه لأنه علم نخبوي يمتهنه قلة من الناس، ويفتقر إلى الحاجة العملية لعامة الناس، وينأى العلماء بنفسهم عنه لضيق الافق الاستدلالي فيه، إذ يكتب غاليليو بهذا الصدد :» نحن لا نتعلم الاستدلال من كتيبات المنطق, بل من الكتب الزاخرة بالبراهين, وهي كتب الرياضيات لا كتب المنطق « [٢٤]

ومع ذلك أن هذه الحاجة العملية للرياضيات أفرزت مشاكل لا يمكن حلها بواسطة توسيع مدى نسق الاعداد النسبية؛ لأنها كانت موجهة إلى صميم أسس فلسفة الرياضيات، عندئذ استدعى حلها إلى إعادة النظر في هيكلية هذه الأسس، ومن هذه المشاكل هي إشكالية الأعداد غير النسبية (الصماء) التي مهد حلها إلى حل اللغز الفلسفي للأعداد التخيلية .

إشكالية الأعداد الصماء– إذا ما ألقينا نظرة شاملة على خط الأعداد النسبية الذي وصلنا إليه، سنجده يتكون من أعداد لانهائية على يمين الصفر ويساره، وكل عدد خاصيته الأساسية إنه عدد كسري يتكون من بسط ومقام، وبكلام أدق إنه يمتلك موقعا محددا على هذا الخط الذي يؤمن عنوانا بغاية الدقة لكل عدد يتكون من بسط ومقام ؛ ولكن ماذا بشأن الأعداد التي لا نستطيع تمثيلها بنسبة بين بسط ومقام؟ هل تبقى بدون عنوان محدد على مرجعية خط الاعداد النسبية؟ ولاسيما هي أعداد كثيرة تعامل معها الإنسان منذ القدم؛ فمثلا كان الفيثاغوريون يولون أهمية كبيرة للأعداد ويرتفعون ببعضها إلى منزلة التقديس، ويسموها بأشكال هندسية، فتحدثوا عن أعداد مربعة ومستطيلة ومثلثة وغيرها[٢٥] . فإذا ما أخذنا أول مربع مقدس لهم الذي يمثل مربع طول ضلعه (1 متر)، وأردنا

حساب طول قطره، فبتطبيق نظرية فيثاغورس على أحد المثلثين القائمي الزاوية، اللذين ينشئهما القطر كوتر مشترك لهما، سيكون طول القطر يساوي ($\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2}$ = القطر)، وبالتالي سيساوي ($\sqrt{2}\sqrt{2}$ متر)؛ بيد اننا لا نستطيع تمثيل ($\sqrt{2}\sqrt{2}$) بأي نسبة ممكنة تحدده على شكل بسط ومقام ـــ ومن ثم لا يمتلك هذا العدد عنوانا دقيقا على خط الأعداد، رغم وجوده الحقيقي الهندسي على الأرض؛ أي أنه موجود هندسيا ولكنه غير موجود حسابيا، وهذه هي إشكالية الأعداد غير النسبية Irrational Numbers، والتي تترجم خطأ غير عقلانية أو غير منطقية كما نوهنا سابقا،وأطلق عليها الرياضيون العرب الأعداد الصماء لأنها لم تفصح بدقة عن مقدارها.لقد عبرت الأعداد غير النسبية عن تفكك في بنية فلسفة الرياضيات القائمة على البنية الموحدة بين الهندسة والحساب، التي بموجبها كل ما لديه وجود هندسي، له صياغة حسابية بالضرورة، والعكس صحيح؛ بيد أن هذا الأمر خرقته الأعداد غير النسبية الموجودة في الفضاء الهندسي للطبيعة وقد تعذر علينا صياغتها الحسابية، واصفا برتراند رسل إشكاليتها بأنها تحدي الطبيعة لدقة الرياضيات[25] . تلك الاشكالية التي نصبت نفسها بمثابة التحدي الأكبر للكوزمولوجيا التي تبناها الفيثاغوريون منذ القدم، وتعثرت مقدساتهم العددية عند أول مربع ملكي استعصى عليهم حساب قطره، مما سبب بمقتل أول ضحية لعلم الرياضيات باتهام أحد اتباعهم، أنه افشى سرهم، حينما نقل خارج حلقة الفيثاغوريين خبر استعصاء تمثيل $\sqrt{2}$ بأي عدد نسبي، فأغرقوه بماء البحر [26].

لقد أستلهم بعض فلاسفة العلم هذا التمرد المتأصل في الطبيعة عن أن ينضم إلى نسقية الحساب الرياضي، بطرحهم مفاهيم فلسفية تنسجم مع هذا العصيان، نذكر منهم مرة أخرى فيلسوف العلم توماس كُون ومفهومه الشهير (اللامقايسة) Incommensurability ، مفاده أنه من المستعصي أن نستطيع عقد مقارنة أو مقايسة بين أي نظريتين علميتين، تسيدتا البحث العلمي لحقبتين مختلفتين في تاريخ العلم ، ومن ثم لا نستطيع الحكم على أي منهما هي الأفضل؛ لأن كل واحدة تنتمي إلى نموذج إرشادي Paradigmمختلف، له معايره ومفاهيمه ومناهجه الخاصة به، والمغلف بوعيه التاريخي الخاص به، الذي أفرزته الظروف الاجتماعية والسياسية السائدة في زمانه[٢٧] ، فهو يقول مثلا بهذا الخصوص : « أن منشأ الاختلاف بين المدارس العلمية ، ليس فشل واحدة منها أو أخرى في المنهج المتبع – فجميعها علمية – بل منشأه الطرق اللاقياسية في رؤية العالم وفي ممارسة العلم فيه « [28].

ولقد أثار هذا المفهوم جدلا واسعا، واتهم توماس كُون بنزعة لاعقلانية بقدر تعلقها بانعدام المعايير والحقائق الثابتة، رغم عدم اعترافه بذلك[٢٩] ، ولدرء شبهة اللاعقلانية عنه استدعى تمرد الأعداد الصماء على الحساب والقياس ليكون سندا رياضيا له، ليبرهن أن اللامقايّسة لها جذور أصيلة حتى في أدق العلوم المضبوطة قياسياً، وأكد أنه استعار مفهوم اللامقايّسة في فلسفته من الرياضيات؛ ليسقطها على وصف العلاقة بين

النماذج والنظريات العلمية المتعاقبة[٣٠] . فهو يرى أن وتر المثلث القائم الزاوية المتساوي الساقيين هو في لامقايّسة تامة مع ساقي هذا المثلث (بسبب ظهور العدد الأصم $\sqrt{2}$ في هذه اللامقايسة) ، وان محيط الدائرة في لامقايّسة تامة مع طول قطر الدائرة (بسبب ظهور العدد الأصم □ □ في هذه اللامقايسة)، أي إذا قسنا أحد الطرفين في هذه اللامقايّسة بشكل مضبوط، لا نستطيع أبدا الحصول على قياس مضبوط للطرف الآخر لفقدان وجود وحدة قياس مشتركة بينهما[٣١] .

خط الأعداد الحقيقية: حل لغز الأعداد الصماء– رغم عدم القدرة على تحديد الأعداد غير النسبية على خط الأعداد النسبية بدقة، لكن وجودها الحقيقي حاضرا بقوة من الناحية الهندسية وكذلك من الناحية التقريبية حسابيا، أي أننا نستطيع أن نخمن، وليس أن نحدد، أين تقع هذه الأعداد حسابيا، فمثلا من الممكن تقريب العدد $\sqrt{2}\sqrt{2}$ إلى العدد النسبي $\frac{999}{707}$ وتقريب العدد □ □ إلى العدد النسبي $\frac{222}{77}$ ؛ لذلك أصبح من المناسب التفكير بصياغة جديدة تعبر مليا عن المرجعية الشاملة للأعداد الحسابية التي لم يعد خط الأعداد النسبية أن يستغرقها، ما يسّر الحال لضرورة استبدال خط الأعداد النسبية بخط جديد يعبر عن شمولية أعداد الحساب سمي بخط (الأعداد الحقيقية) Real Numbers، الذي يضم في كنفه جميع الأعداد النسبية وغير النسبية الموجبة منها والسالبة؛ معبرا في تسميته هذه عن ملمح فلسفي أكثر مما هو رياضي، إذ عني أولا بما هو حقيقي بوصفه خطا يرمز لحقائق الواقع، ومن دون أن يعني أولا بوصف حقائق الواقع بالدقة التي تميز الرياضيات، فلندع عالم الرياضيات وفيلسوف العلم الانكليزي روجر بنروز 1931) Roger Benrose –) يشرح لنا ذلك بوضوح :

« لقد سميت الأعداد الحقيقية ((حقيقية)) ، بصرف النظر عن مفهوم الحسوبية [المفهوم الحسابي] ، لأنها تزودنا كما نعرف بالمقادير التي نحتاجها لقياس المسافات والزوايا والطاقة ودرجات الحرارة والكثير من المقادير الهندسية والفيزيائية، على أن العلاقة بين الأعداد الحقيقية التي تعرف بطريقة مجردة والكميات الفيزيائية ليست واضحة المعالم كما قد يتخيل المرء، فالأعداد الحقيقية تصدر عن عمل رياضي مثالي وليس عن أي كمية واقعية ملموسة فيزيائيا»[٣٢]

إن خط الأعداد الحقيقية أثار قضيتين فلسفيتين بالغتي الأهمية؛ الأولى إنه خليط غير متجانس من مجموعتين من الأعداد : مجموعة أعداد لا متناهية محددة الهوية – الأعداد النسبية – تتوسطها مجموعة أعداد لا متناهية غير محددة الهوية – الأعداد غير النسبية –، وما يجمعهما أصولهما الواقعية وخضوعهما لمعايير العمليات الرياضية على خط الأعداد الحقيقية؛ والقضية الثانية إن خط الأعداد الحقيقية يلمح بأن أي عدد لا يخضع لمعايير العمليات الحسابية له، هو عدد غير حقيقي لا ينتمي إلى أفق عقلانيته ، ولا إلى امتداد خطه، وفي نفس الوقت لا ينكر وجوده .

التداعيات التي ترتبت عن القضية الأولى في مجال أسس فلسفة الرياضيات، أن خط

الأعداد الحقيقية – وعموم علم الحساب من ورائه – الذي ضم الأعداد غير النسبية في كنفه، فقد الخاصية الأصيلة التي كانت تميز خط الأعداد النسبية الذي سبقه – وعموم علم الحساب من ورائه – والمتمثلة بـ (خاصية الانفصال)؛ لأن مضمون خط الأعداد النسبية كان يؤسس إلى وجود سلسلة مما لانهاية من الانفصالات العددية المتمايزة في أي موقع من مواقعه، ومن الممكن تميز حدود الانفصالات بدقة كبيرة، وهو الأمر الذي يوائم لب فلسفة الحساب حينما عرّف منذ بداية التفلسف بالرياضة بأنه يعبر عن الكم المنفصل(٣٣) ؛ بيد أن خط الأعداد الحقيقية يبوح بضمه ما لانهاية من الأعداد الصماء غير المتمايزة، بأن هناك ما لانهاية من المواقع ترتكن فيه على شكل مقادير لا يمكن إدراك حدودها المتاخمة، أي لا يمكن تحديد العدد الذي يأتي مباشرة قبلها وبعدها، وبالتالي سيتلاشى مفهوم الانفصال عند هذه الحدود، ويتخلى الحساب العددي عن خاصيته الأصيلة، الأمر الذي يستدعي السماح للاتصال الهندسي بالدخول إلى معترك النقاش الفلسفي؛ لأنه خير من يفسر تلك المقادير العصية على التحلل إلى انفصالات .

لذلك حل اشكالية الاعداد الصماء جاء على خلفية الفهم العميق لهذا التداخل بين الاتصال والانفصال، وبرؤية فلسفية مفادها أن طبيعة خاصية الانفصال ستفرض ضرورة خاصية الاتصال في الوقت نفسه؛ من زاوية أن الانفصال سيبيح للخيال الرياضي أن يقطّع أي بيّني بين منفصلين إلى ما لانهاية من المقادير المنفصلة، الذي سيمثل طيفا لا يمكن الامساك بحدود متمايزة ينتهي إليها، وسيدخل الخيال الرياضي بإحالات وإحالات غير منتهية لا يمكن إجمالها، إلا بتصورها على شكل مقدار متصل. فكما أباح بداهة الاتصال الهندسي للعقل الرياضي أن يقطعه لمقادير منفصلة يمسي التعامل معها بيسر حسابيا، أراد العقل الرياضي هذه المرة أن يشذب خياله الانفصالي، الذي لا يقف عند حد، إذ سمح لبداهة الحدس أن تختزل الانفصالات غير المنتهية البالغة الصغر على شكل اتصالات ممكن الركون لها، واستراحة لفرط الانفصال اللانهائي. وعلى هذا الاساس واحد من الحلول البارعة التي قدمها عالم وفيلسوف الرياضيات الالماني ريجارد ديديكند1916 – 1833) R. Dedekind) لتفسير إشكالية الأعداد الصماء، بأنها ما هي إلا قطوعات من الاتصال من الممكن اختزالها على شكل نقطة هندسية بالغة الصغر تنتشر في سلسلة الانفصالات العددية وفي كل موقع من مواقعها، إذ تتوسط هذه النقطة التي تمثل العدد الأصم مجموعتين من انفصالات الأعداد الحقيقية، إحداهما أكبر من العدد الأصم والأخرى أصغر منه(34) ، فعلى سبيل المثال ينظر إلى العدد غير النسبي $\sqrt{2}\sqrt{2}$ بأنه نقطة قطع هندسي تتوسط المجموعتين : $X > \sqrt{2} X > \sqrt{2}$ ، $X < \sqrt{2} X < \sqrt{2}$.

إذن مثلما الانفصال يقوم بتشويه مستمر للاتصال بتقطيعه إلى عدد غير منتهي من الانفصالات العددية، يقوم الاتصال بتشويه مستمر للانفصال بدمج المقادير العددية التي لا تنتهي إلى حد بمتصل هندسي يتخذ موقعا على خط الاعداد الحقيقية، وهذا التشوية

المتبادل هو جوهر جدلية الاتصال والانفصال في الأعداد الحقيقية، وبواسطة هذا الفهم حلت إشكالية الأعداد غير النسبية .

أما القضية الثانية التي أثارها خط الأعداد الحقيقية بأنه في مقابلة مع أعداد غير حقيقية لا تخضع لمعايره الحسابية، ولا تجد لها مكانا على امتداد خطه، هي التي ستنقلنا إلى لب حل إشكالية فلسفة الرياضيات، وسنتعرف على أن جدلية الهندسة والحساب هل لا زالت فاعلة في هذا المضمار لفك طلاسم لغز الأعداد التخيلية، وسنتعرف على النموذج التكاملي المثالي بين الاتصال والانفصال.

مفارقة العدد التخيلي Imaginary Number – لو تمعنا المعادلة الرياضية الآتية :$X^2 + 1 = 0$ التي صادفت معظمنا بعد الدراسة الابتدائية ، وبعد تحويل الـ (1+) إلى الطرف الأيمن ستصبح المعادلة : $X^2 = -1$

المضمون الفكري للمعادلة الاخيرة يعني أن (X) عدد حينما نربعه (نضربه بنفسه) تكون النتيجة سالب 1(– 1) ، أي أن هذا المضمون الفكري الذي على يسار المعادلة ، أي الدلالة، يقابلها في يمين المعادلة العدد سالب واحد بمثابة ما يدل عليه هذا المفهوم ، أي أنه الرمز الدال، بيد أن دلالة مربع العدد لا بد وأن تكون موجبة القيمة ، انطلاقا من ان اقرب حل لهذه المعادلة هو (1) ، ولكن حينما نربع موجب الواحد (1+ x 1+ = 1+) تكون النتيجة موجب واحد ، وكذلك حينما نربع سالب الواحد (1– 1– x 1+ =) تكون النتيجة ايضا موجب واحد ، فلا وجود لعدد نربعه وتكون النتيجة سالبة ، وهذا هو جوهر المستحيل في حل هذه المعادلة التي سيكون حلها بعد اخذ الجذر التربيعي لطرفيها بالشكل : $X = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$ ، الذي يطلق عليه العدد التخيلي الملتصقة تسميته بجذر العدد السالب.

وكلما ظهر لنا هذا الشكل من الحل في المعادلات نبصم عليه (يهمل) ، تعبيرا عن استهجاننا لهذه المغالطة ، وهو ما فعله كبار الرياضيين القدماء مع شبح الجذر التربيعي للعدد السالب ، حينما ظهر اولا للرياضي ديوفانتوس الاسكندري في القرن الثالث الميلادي في حساب المثلثات ، إذ وصف الجذر التربيعي للعدد السالب بالـ (المستحيل)[35] ، لأنه يشكل مفارقة تحمل معها تزامن لنقيضين معا ، بل هو تناقض ما بين الدال والدلالة بتوصيفات فلسفة اللغة ، فالدال هو الجزء الشكلي المادي الظاهر على يمين المعادلة $X^2 = -1$ متمثلا بسالب واحد ، في حين دلالة العدد التي تصطف على يسار المعادلة ستكون موجبة نابعة من مفهوم مربع أي عدد ، وبالتالي فأن هذا العدد موجب وسالب في آن واحد ! معبرا عن انتهاك صريح لعقلانية الحس الرياضي المشترك ، وخروجا على مبدأ عدم التناقض ؛ لذلك استبعد من دائرة البحث الرياضي قرونا كثيرة إسوة باستبعاد الثالث المرفوع في المنطق الصوري الذي يحمل هو الآخر في كنفه خروجا على مبدأ عدم التناقض ؛ لأن مضمونه المنطقي يفيد بأنه قيمة منطقية ثالثة تحمل في جنبها الصدق والكذب معا وهذا الأمر كثير الشبه من موضوعنا العدد

التخيلي .

أما عن تسميته بالعدد التخيلي او الجذر التخيلي Imaginary root ؛ فجاءت أولا على شرف فيلسوف الاتجاه العقلي في الفلسفة الحديثة ومفتاح انطلاقتها رينيه ديكارت (Rene Descartes 1595–1650) ، الذي نحت باسمه الكثير من المصطلحات والمفاهيم التي ما انفك العقل البشري من تداولها ، فقد كتب في الاسطر الاخيرة من كتابه (الهندسة The Geometry) :" أستميح اللطف من الاجيال البشرية اللاحقة حينما تحكم عليّ ، ليس فقط بسبب الاشياء التي شرحتها بوضوح ، ولكن لتلك الاشياء التي تغافلتها عمدا ؛ كي اترك متعة اكتشافها للأخرين " [36]

وكانت تسميته لجذر العدد السالب بـ (الجذر المتخيل) ومن ثم إهماله ، واحدة من الاشياء التي تغافلها ديكارت متعمدا في هذا الكتاب وهو في غمرة شروحاته الهادفة إلى دمج الهندسة بالحساب ، إذ ظهرت هذه التسمية في عدة صفحات من الكتاب[37] ، وربما أراد ديكارت من وصف الخيال أن يخفف من وطأة التناقض المتضمن بهذا العدد ، ففي الخيال الذي يتوسط رصانة العقل وجموح المشاعر ؛ من الممكن أن يستوعب صدمة مفارقة العدد المتخيل ويتصالح فيه المفهوم والواقع المتناقضان . أما تبريره لهذا التغافل في فسح المجال للأخرين بالكشف عنها ينم عن بصيرة وأمل كبيرين في تخطي العقل البشري لهذه العقدة ، علاوة على الحذاقة الخلقية في تقديم الاعتذار.

ومع ذلك لو كان يعلم ديكارت أهمية هذا العدد الذي وصمه بالخيال ، لتراجع عن هذا التوصيف ، إذ كما سنعرف لاحقا أن العدد التخيلي تتقاطع فيه أهم اسس فلسفة الرياضيات ، ويعبر عن جوهر المشروع الرياضي الذي دافع ديكارت عنه بضراوة ، والمتمثل بدمج الحساب بالهندسة ولكن باتجاه معاكس للاتجاه الذي سار به ديكارت ــ إنه العدد الذي ذابت فيه إشكالية الاتصال والانفصال في فلسفة الرياضيات ، انفصالية الاعداد في الحساب واتصالية المكان في الهندسة ، وهو العدد الذي بدونه لما استطاع العقل الإنساني أن يتجول بثقة في دهاليز فيزياء الكوانتم ، التي تعد أغلى المنتوجات العلمية المعاصرة التي ابتدعها العقل البشري على مستوى الفهم العميق للعالم المادي ، وعلى مستوى توظيف التطبيقات العملية لها في خدمة الانسان ، بل إنه العدد الذي بواسطته نفسر كيف نرى الكون ونعرف عنواننا فيه ؛ لأنه ما يشرح كيف تسير موجة الضوء بوصفها ساعي البريد الكوني .

حل لغز الأعداد التخيلية – كما أسلفنا سابقا أن العدد التخيلي شكّل مفارقة بين دال سالب ودلالة موجبة، التي تبوح بها المعادلة: $X^2 = -1$ ، أو $X = \sqrt{-1}\sqrt{-1}$

فهنا الدال هو سالب واحد، والدلالة يتضمنها مفهوم مربع X الذي هو دائما موجب ، ولكن بعد أن قطعنا شوطا بالبحث ، ولأجل فهم لغز المفارقة ، علينا أن نحلل اللغز بشكل أخر ، وعليه يجب أن نضع مقدمتين مستخلصتين مما تقدم من البحث : الأولى إن العدد التخيلي لا يوجد على امتداد خط الأعداد الحقيقية الذي بحوزته جميع الأعداد

التي نعرفها ؛ لأنه عدد غير حقيقي لا يخضع لمعايير هذا الخط .

والمقدمة الثانية أن العدد التخيلي يظهر في التحليل الرياضي بعد أن يستنتج من انسيابية سلسلة الاستنتاجات الحسابية ، التي لا تتناقض مع المسلمات الافتراضية الأولية للنسق التي وجدت فيه ، وبما أن هذا النسق الافتراضي الاستنباطي واستنتاجاته الرياضية ، التي تُظهر أحيانا العدد التخيلي ، يمثلا جوهر عقلانية النسق الرياضي ؛ وبالتالي أن هذه المقدمة تذهب إلى أن العدد التخيلي لا يتناقض مع مبادئ عقلانية وأسس هذا النسق ، فهو ممكن الوجود على الصعيد العقلي على الأقل إن لم نقل على الصعيد الطبيعي .

المقدمتان صحيحتان ورفض أي منهما ، هو بمثابة نسف لأسس فلسفة الرياضيات وعقلانيتها، فالمقدمة الأولى تمتلك من الصلابة قوة ما يجعلها بمنأى عن أي تشكيك ؛ لأنها ببساطة تمثل الواقع الصلب الذي يقع خلف رمزية العقل الرياضي للحساب ؛ فالمطابقة بين خط الاعداد الحقيقية ومفردات الواقع الملموس ، هي كتطابق مبدأ الهوية بين دال ودلالة ، وحينما تستبعد هذه المقدمة وجود دال (عدد) على هذا الخط يشير إلى دلالة العدد التخيلي ، هو دفاع عن مبدأ الهوية الراسخ في ذهن عامة الناس وليس الرياضيون وحدهم ـــ وبالتالي رفضها يعني انتفاء الحاجة العملية للحساب وللرياضيات بشكل عام . أما المقدمة الثانية ، فهي تلتزم بالأسس العقلانية المبني عليها مفهوم الحساب ، بوصفه نسق فرضي استنباطي ، أي أنه إذا ما بدأنا بمقدمات على شكل فروض متواضع عليها داخل النسق ، وأجريت على هذه الفروض سلسلة من الاستدلالات الحسابية الصحيحة المتفق عليها داخل النسق ايضا ـــ فالأسس العقلانية لهذا النسق تلزم بأن تكون النتائج بالضرورة ، كياناتها صحيحة وموجودة داخل ذلك النسق ، وليس خارجه ولا يمكن إهمالها كما جرت العادة بإهمال العدد التخيلي ، إذا ما ظهر نتيجة لسلسلة استنتاجات كجذر لعدد سالب ؛ فمثلا لفهم العقلانية التي تتضمنها هذه المقدمة ، إذا ما فرضنا أبسط الفروض وليكن الفرض $x = 1\ x = 1$ ، نجده فرض مشروع ، وكل مكوناته الرمزية والعددية تنتمي إلى نسق الحساب ، ثم أجرينا الاستدلالات والعمليات الحسابية المتفق عليها داخل نسق الحساب ايضا ، مثل التربيع والجذر وتحليل الفرق بين مربعين وكالاتى:

$$x = 1 \rightarrow \text{بتربيع طرفي المعادلة } x^2 = 1 \rightarrow \text{بتربيع طرفي المعادلة } x^4 = 1$$

ننقل الواحد إلى الطرف الايسر ونقوم بتحليل المعادلة بطريقة الفرق بين مربعين :

$$x^4 - 1 = 0 \rightarrow (x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

وأخيرا وصلنا إلى نتيجتين وهما $(x^2 - 1) = 0\ ,\quad (x^2 + 1) = 0$

$$(x^2 - 1) = 0\ ,\quad (x^2 + 1) = 0$$

أحد نتيجتي هذه المعادلة هو المقدار $x^2\ x^2 = 1 + 0$، عندئذ سنكون مباشرة بمواجهة مع العدد التخيلي ، إذا ما نقلنا الواحد إلى الطرف الايمن يصبح الحال $= -1$

$x^2 x^2$، والاستجابة الجاهزة لهذه النتيجة كانت (تُهمل) ؛ لأنها مغالطة تساوي بين المربع الموجب وسالب واحد ، وكانت تهمل معها الاسس العقلانية للرياضيات ، وتعد انتهاك صريح للأسس الفلسفية التي ذكرناها ؛ بسبب أن الفرض صحيح وينتمي إلى نسق الحساب ، والاستدلالات صحيحة وتنتمي لنفس النسق ، وبالتالي يجب أن تكون جميع النتائج صحيحة وتنتمي لنسق الحساب ، بيد أن أحد النتائج استبعدت قسرا من هذا النسق ؛ لأنها تتعارض مع ما تقتضيه المقدمة الأولى ، بأن لا يوجد عدد على خط الاعداد الحقيقية يمثل مفهوم هذا العدد ، والتي هي الأخرى صائبة .

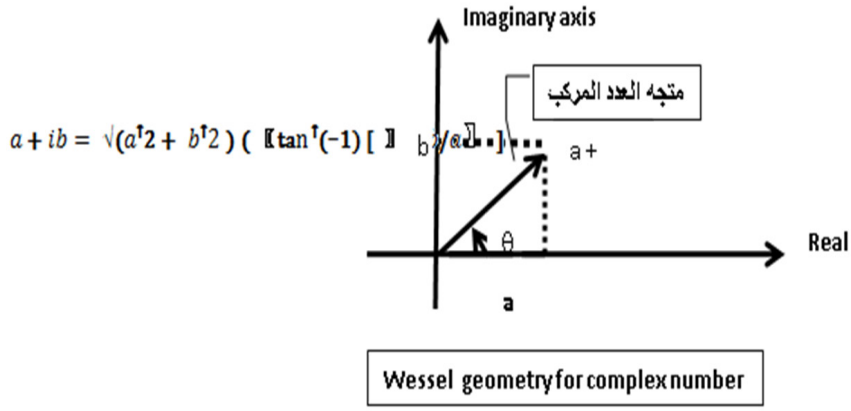
نحن هنا أمام مشهد تتعارض به الأسس العقلانية لفلسفة الرياضيات مع الحاجة العملية لها ، وكالعادة تهمل تلك الأسس لصالح الحاجة العملية ، وهذا هو ديدن الفلسفة ، أخر ما يعنى به من الناحية العملية ، وأول ما يسأل في حصول الأزمات ، وفي المقابل لا يمكن الافصاح عن هذا العوز في الرياضيات ؛ لأنها مسطرة قياس جميع العلوم ، والدحض بعقلانيتها يعني الاعلان عن تهافت المشروع العلمي وعموم فكر الانسان . وإهمال الاسس العقلانية لفلسفة الرياضيات في معضلة العدد التخيلي ، لا يعني استسلام تلك الاسس لواقع الحال ، ولكنها بقيت متقدة في عقول جميع الرياضيين وهاجس يشغلهم ويدفعهم للبحث والتقصي ، للوصول الى أن فكرة العدد الحسابي بوضعها الراهن غير مكتملة ، ويقع خلفها تصور فلسفي جديد يتجاوز المقدار الخالص للعدد ، وينحو إلى فهم أبعاد أخرى له .

ولبسط اشكالية العدد التخيلي من جديد بتصور فلسفي ثوري ، لم يبقى لدينا إلا حلا واحدا لفك هذا التعارض بين المقدمة الأولى التي تنفي وجود الأعداد التخيلية على خط الاعداد الوحيد الذي نعرفه ، والثانية التي تستند على عقلانية النسق الرياضي وتبيح وجود هذه الأعداد ؛ وهو أن المقدمة الأولى حينما تنفي وجود الأعداد التخيلية على خط الأعداد الحقيقية ، هي في ذات الوقت لا تجزم بعدم وجود هذه الأعداد بالمطلق في أي موقع ممكن غير الأعداد الحقيقية ، ومن ناحية أخرى أن المقدمة الثانية التي تبيح وجود الأعداد التخيلية ، هي في ذات الوقت لا تشترط أن هذه الأعداد موجودة على خط الأعداد الحقيقية حصرا ـــ وبالتالي لماذا لا تكون الأعداد التخيلية موجودة على خط أعداد غير مرئي بالنسبة لخط الأعداد الحقيقية يشكل نسقا لا نعرفه سابقا ؟ويبدو هذا الفرض وفق ما بين المقدمتين وابقاهما صحيحتين ، وهذا الجزء الأول من الحل ، أما الجزء الثاني الخاص بالكيفية التي يتلائم بها هذان الخطان الحقيقي والتخيلي ، فلأنهما يعملان بمعايير مختلفة ولا يوجد أي تأثير متبادل بينهما بحيث لا يستطيع أي منهما الاستشعار بالأخر ، بحيث أن خط الأعداد الحقيقية بقي نموذجا رياضيا صالحا للعمل به ، وبدون أن يؤثر فيه خط الأعداد التخيلية ، إذن لا توجد إلا كيفية واحدة ايضا لطريقة تلاؤمهما، وهي أن يكونا متعامدين ، لأن التعامد بزاوية 90 درجة هي الكيفية الوحيدة التي تحقق الاستقلال التام لكليهما وما عداها سينتج مركبات ثانوية في كلا الخطين

تتشابك فيما بينها وتنتج تأثيرا متبادلا وهذا لم يحصل .

هذا الوصف العبقري والخيال الرياضي الفذ الذي روض جبروت معضلة العدد التخيلي قدمه أولا المساح النرويجي كاسبر فيسيل (1745–1818) على شكل بحث مقدم إلى أكاديميةميمريز الدانماركية عام 1799 ، ولكن البحث لم يقرأ من قبل المعنيين به لأن كاتبه رجل مغمور آت من خارج أسوار الأكاديمية ، ولم يعد اعتبار شرف الاكتشاف له إلا في عام 1895[38] .

ظل الباحثون عن الأعداد التخيلية يمعنون النظر على امتداد خط الأعداد الحقيقية فلم يعثروا عليها ، لأنها ببساطة ليست تباينات في كم المقدار الخالص ويتوقع أن تكون حبيسة خط الأعداد الحقيقية دالة هذه التباينات ، إنها انقلاب في الطور الكيفي للاتجاه ، إي أنها تباينات في كم الاتجاه الخالص ؛ لذلك حينما غيّر كاسبر فيسيل بوصلة الاتجاه ، ونظر خارج خط الأعداد الحقيقية ، عثر عليها منتظمة في نسق خطي يمتد بفارق في الطور عن اتجاه الاعداد الحقيقية السابق بمقدار 90 درجة ، وبات واضحا لماذا يبدو العدد $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$مفارقة مستحيلة في معايير خط الأعداد الحقيقية ؛ لأنه يعامل هنا باعتباره كم من المقدار ومن المستحيل تجد هكذا مقدار ، في حين هو كم من الاتجاه ينتمي إلى معايير خط الأعداد التخيلية، ويعني الانحراف عن اتجاه امتداد خط الاعداد الحقيقية نحو اليسار بزاوية قدرها 90 درجة، وبرمز له رياضيا بالرمز $i\ i$ ، مأخوذا من الحرف الأول لكلمة imaginary ، أي أن $i = \sqrt{-1}i = \sqrt{-1}$؛ ومن ثم تنتظم مضاعفات $i\ i$وكسورها على خط الأعداد التخيلية لتنتج محور الأعداد التخيلية imaginary axis،كما تصوره كاسبر فيسيل متعامدا مع محور الأعداد الحقيقيةreal axisوكما موضح في الشكل[39] الاتي:



لن تنتهي الحكاية إلى هذا الحد ، فما هو مثير في اكتشاف فيسيل ، أن محور الأعداد الحقيقية لم يعد مناسبا لتمثيل مملكة الأعداد الجديدة ولا أي خط أخر ، لأن الأعداد بعد أن ضمت إلى كنفها خط الأعداد التخيلية المتعامد مع الخط السابق الحقيقي ، ستمثّل ليس على خط طولي أنما على مسطح يتألف من هذين المحورين ، وسيكون أي عدد نتعامل معه مركب من كميّن وعلى شاكلة $a+ib$ $a+ib$ كما مبين في الشكل أعلاه ؛ إحداهما كم حقيقي – يمثله الرمز a a – ، والأخر كم تخيلي – يمثله الرمز b b – ، وستكون حصيلة كم مقدار العدد يمثله طول سهم المتجه في الشكل ويساوي $\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$ حسب نظرية فيثاغورس ، في حين كم اتجاه العدد محدد بالزاوية q التي قيمتها مستنتجة من $<\tan^{-1}\frac{b}{a}\tan^{-1}\frac{b}{a}>$ ، أي الزاوية التي ظلها $\frac{b}{a}$ $\frac{b}{a}$ ، وكما مدون في الشكل أعلاه ، أما خط الأعداد الحقيقية الذي كنا نرى فيه الممثل الوحيد لمملكة الأعداد في الماضي سيمسي حالة خاصة جدا من هذه الأعداد المركبة الجديدة ، إذ أن الأعداد الحقيقية ستعبر عن كم خالص لمقدار من الامتداد وكمه الاتجاهي التخيلي يساوي صفر ، وهذا هو ديدن أصالة الثورات العلمية التي تحيل النماذج الماضية إلى حالات خاصة من النموذج الجديد .

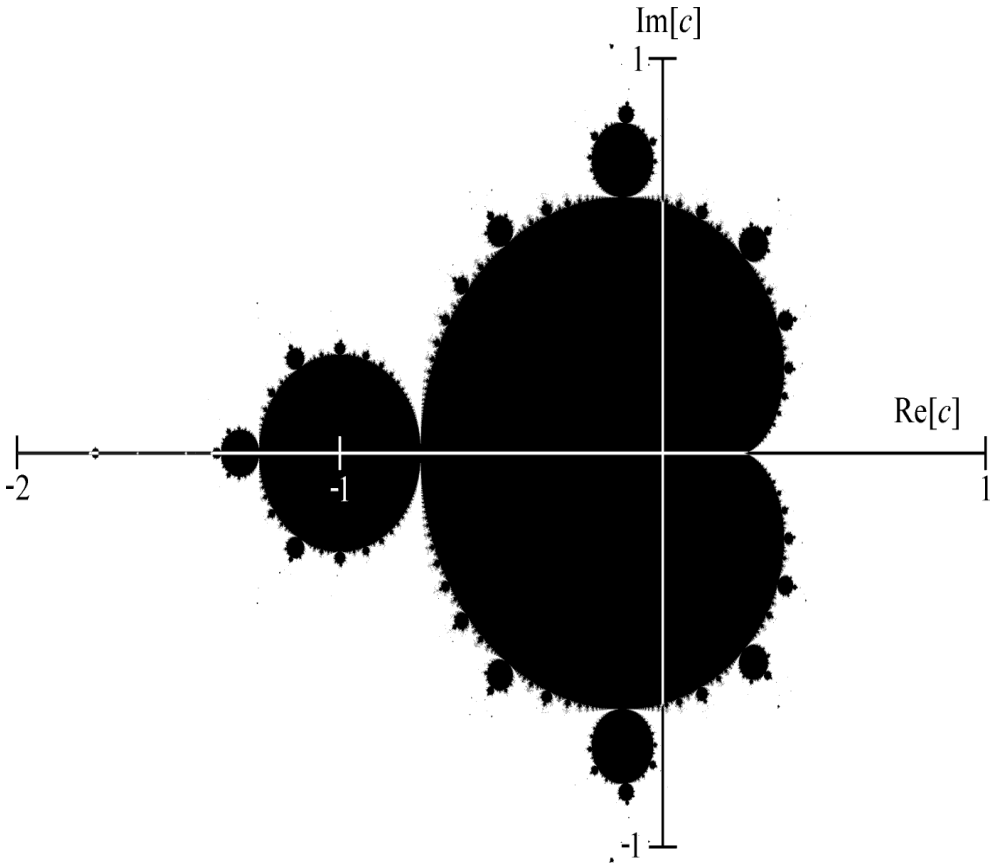
وبعيدا عن التفاصيل الرياضية البحتة بخصوص هذه الأعداد المركبة الجديدة ، ما نريد قوله من الناحية الفلسفية بالعودة إلى منظور الاتصال والانفصال ، أولا ؛ أن الأعداد التخيلية بموقعها العمودي على الأعداد الحقيقية أضافت بعدا هندسيا لنسق الاعداد ، من الممكن تفسيره على خلفية التداخل بين الاتصال والانفصال ؛ ولكن بنسق وبرؤية جديدة وشاملة ، وتفصح عن العلاقة الأصيلة بين الهندسة والحساب ، فالأعداد التخيلية بإفلاتها من النسق الاستاتيكي المنغلق على طول امتداد خط الأعداد الحقيقية الذي لا عرض له ، واتخاذها الزاوية الصحيحة بالملائمة معه – تسمى الزاوية 90right angle– صار الكشف عن لغزها ليس بواسطة الكشف عن التشويه المستمر بين الاتصال والانفصال على خط الأعداد الحقيقية ، كما هو الحال في فك عقدة الأعداد الصماء كما رأينا سابقا ، وإنما مع حل لغز الأعداد التخيلية ، أُفصح عن علاقة تكاملية ثورية بين الانفصال والاتصال ، أي بين الحساب والهندسة ، فلا كم المقدار الحقيقي يشوه كم الاتجاه التخيلي والعكس صحيح ، بل كل منهما ينتمي إلى نموذج مستقل من العقلانية بتكاملهما ينتج فهم جديد لفلسفة الرياضيات تبدو فيه الهندسة والحساب على درجة واحدة من الأهمية ، عندئذ لا يوجد هامش ولا مركز ، ولا الهندسة حقيقة مجردة بمفردها ولا الحساب حقيقة مجردة بمفرده ، بل الحقيقة تتجرد من استكمال الحساب بالهندسة واستكمال الهندسة بالحساب ، أي بهندسة الحساب وحساب الهندسة .

ثانيا ، ونتيجة لما سبق ، من تداعيات حل لغز الأعداد التخيلية بزغ لنا مفهوم جديد

عن العدد منغمسة فيه الهندسة والحساب في آن واحد ، فأصبح وفق نموذج الأعداد التخيلية عبارة عن خط متجه له مقدار واتجاه ، له بعد حسابي انفصالي وبعد هندسي اتصالي ، وما عادت الأعداد تتزاحم مقطورة على سكة الأعداد الحقيقية ذو البعد الواحد ، بل محلقة في فضاء واسع ذو بعدين ، وبالتالي ما عاد الحدس الهندسي للعدد منغلق على الاستنتاج البديهي الذي يحاكي بداهة هندسة الوجود الخارجي فحسب ، بل يخضع لدقة وثراء الاستنتاجات الحسابية المنبثقة من خيال العقل الرياضي ، الذي لا يلتزم حصرا بمحاكاة الموجودات الطبيعية ، وهذا ما نعنيه بحساب الهندسة ؛ وفي الوقت نفسه لم ينغلق حساب العدد على فكرة التتالي الخطي ، والشروط التي تفرضها العمليات الحسابية والتي لا تستطيع الإفلات من مضمون التتالي الخطي والانفصال ، بل هنا انفتح حساب العدد إلى مفهوم الانتشار الهندسي الحر على سطح ذو بعدين، وانفصالية وهوية مقدار العدد لم تأت من مقدار مضاعفات التتالي كما كان سابقا فحسب ، بل من موقعه الهندسي ذو الإمكانات غير المحدودة المنشرة على فضاء واسع ، وما التتالي إلا حالة خاصة جدا من هذا الانتشار الهندسي ، وهذا ما نعنيه بهندسة الحساب .

في الأول من أذار من عام 1980 قُدم لنا هذا العالم الساحر من الأعداد المركبة مرسوما بريشة إحدى الحاسبات العملاقة لشركة IBM التي عمل عليها عالم الرياضيات الأميريكي من أصول بولندية بنويت مندلبروت (Benoit Mendelbrot(1924–2010 [40]) ، فلقد اظهر هذا الاكتشاف ، أن هذه المملكة الموسعة من الأعداد المركبة لا تعبر عن الانسجام التام لهندسة وحساب العدد فحسب ، وإنما كشفت عن نوعين من التتالي للعدد ، النوع الأول الذي نعرفه المتمثل بالتتالي اللامتناهي للأعداد الذي يذهب بنا الخيال الرياضي إلى افق بلا حدود من الأعداد وبالتالي فهو تتالي لا متناهي ولا محدود ، بيد أن ما هو مثير أن هناك نوع أخر من التتالي في هذه المملكة الجديدة من الأعداد لا ندركه سابقا ، إذ يبوح بسلسلة من الأعداد اللامتناهية ولكنها لا تتمدد خارج حدود بعينها ، وتبقى منغلقة على نفسها ضمن قيم عددية لا تتجاوزها أبدا مهما استمر التتالي متجه إلى اللامتناهي ، وبالتالي فهو تتالي لا متناهي ولكنه محدود ، سميت هذه المجموعة من الاعداد التي تمثل هذا التتالي بمجموعة مندلبروت تيمنا بمكتشفها[41].

وكما يشير الشكل[42] أدناه ، أن التتالي الأول اللامحدود أبقته الحاسوب باللون الأبيض وفي جميع الاتجاهات ، ولكنها رسمت التتالي الثاني المحدود باللون الأسود ، ومنه نستطيع أن نخمن ما لانهاية من الأعداد التي تتتالى في تلك البقع السوداء من دون تتمدد خارج نطاق إطار قيم محددة – محصورة بين القيم (1 ، 1–) تخيلي ، (1 ، 2–) حقيقي –



وكذلك من الممكن الاستشعار بهذا التناسق الجميل لهندسة توزيع أعداد مجموعة مندلبروت والتناظر الساحر بين مكوناتها على جهتي المحاور الرئيسية ، إذ يذكر مندلبروت أنه أعتقد هناك عطلا حصل للحاسوب التي رسمت هذا الشكل حينما أدخل لها برنامجه الرياضي العبقري ، لشدة انبهاره مما بدا أمامه من نسق من الأعداد التي تنتظم ذاتيا بتجانس وتناظر بأدق تفاصيل المشهد الفاتن لهذا العالم الحسابي الهندسي[43] ، ما دعا بعض فلاسفة الرياضيات إلى الإمعان في الاعتقاد بالوجود الموضوعي لهذا العالم الرياضي وأن العقل اكتشفه ولم يبتكره ولم يصممه ، لندع الكلام إلى روجر بنروز في الدفاع عن هذا الموقف :

" كثيرا ما تلوح في هذه المفاهيم ملامح واقعية عميقة الجذور تمتد إلى ابعد من تبصّرات أي رياضي متميز ، فكأن تفكير الإنسان موجه نحو حقيقة خارجية أزلية ، حقيقة لها واقعية قائمة بذاتها ، ولا تتكشف إلا جزئيا لأي واحد منا ، إن مجموعة مندلبروت مثالا مدهشا لنا ، فبنيتها المتقنة اتقانا عجيبا لم تكن من ابتكار أي شخص بمفرده ، ولا هي من تصميم فريق من الرياضيين وحتى مندلبروت نفسه ...الذي كان أول من درس المجموعة لم يكن لديه تصور حقيقي مسبق عن هذا الاتقان الساحر الكامن

فيها ، على الرغم من أنه عرف أنه في الطريق إلى شيء مهم ....أضف إلى ذلك أن تفاصيل التعقيد في بنية مجموعة مندلبروت ، لا يمكن لأحد من أن يستوعبها بأجمعها استيعابا كاملا ، بل ولا يمكن حتى لأي حاسوب أن يكشف عنها كلها ، فيبدو أن هذه البنية ليست مجرد جزء من عقولنا ، وإنما هي حقيقة قائمة بذاتها "[44]

على أية حال هذا التباين في المواقف ما بين سياقيّ الكشف أم الابتكار هو جزء مهم من فلسفة الرياضيات ولا يسع الدخول فيه أضعاف صفحات هذا البحث ، ولكن من الممكن تجاوزه والوقوف أمام تساؤل مهم ، هل هذا النسق الساحر من الأعداد التخيلية والمركبة الذي ابتدعه أو اكتشفه العقل الرياضي ، مجرد رواية من خيال الأدب الرياضي كُتبت بمساهمة من الحاسوب ، أم أن هذا النسق المتقن له في ظواهر الطبيعة ما يحاكيه .

محاكاة الطبيعة للأعداد التخيلية – ذكر رسل أن الأعداد غير النسبية – الصماء – شكلت نوع من عصيان الطبيعة على دقة العقل الرياضي كما ذكرنا سابقا ، بيد اننا مع الأعداد التخيلية وما نتج عنها من أعداد مركبة عبرت عن الانخراط الطوعي للطبيعة بالاصطفاف مع ما افرزه العقل الرياضي من نسق متقن وجميل ، فرغم أن احراز حل لغز الأعداد التخيلية وتتويجه بتأسيس نظرية رياضية متسقة شاملة للحساب العددي ، جاء نتيجة المعاناة المضنية التي خاضها المجتمع الرياضي وهو يواجه لقرون طويلة شبح الجذر التربيعي للعدد السالب العصي عن الفهم ، إلا أن النموذج الرياضي لحل هذه المعضلة سُخّر في وضع ظواهر طبيعية عصية عن الفهم تحت عدسته لتفسيرها برؤية جديدة ومن ثم حسابها بدقة ، وهذا يكشف عن التكاملية الأصيلة بين مجاهيل العقل ومجاهيل الطبيعة ، وأن مشاكل الطبيعة لا تحل إلا بحل مشاكل العقل أولا .

ليس مستغربا أن تتماثل الظواهر الطبيعية التي بحاجة لنموذج الأعداد التخيلية لحلها مع لا مرئية العدد التخيلي وعدم الامساك فيه وفق متطلبات الحس المشترك ، فللتقريب لا الحصر ، إما أن تكون هذه الظواهر خيالية الفهم الفيزيائي لمركباتها كظاهرة الكهرباء ومفاهيم القوى والمجالات الفيزيائية وملحقاتها ، أو أن تكون بالغة الصغر تنتمي إلى المكونات الذرية وما دون الذرية في فيزياء الكوانتم ، أو أن تخص ظواهر فلكية بعيدة جدا ، فليس من الصعب أن نخمن أن العدد التخيلي دخل في فهم وحساب معظم بنية الطبيعة[45].

في ظاهرة الكهرباء على سبيل المثال ، تنتقل هذه الظاهرة وتتحول على شكل طاقة كهربائية التي بدورها تتكون من مركبتين وهما التيار والفولتية ، إذ تحسب الطاقة الكهربائية من حاصل ضرب هاتين المركبتين ، ففي الدوائر الكهربائية ذات التيار المستمر[46*] تحسب كمية الطاقة من هذه العملية الحسابية البسيطة ولا توجد مشكلة في ذلك ، بيد أن المشكلة تبرز بوضوح للعيان في دوائر التيار المتناوب[47F] وهي الشائعة والأكثر انتشارا في ظاهرة الكهرباء ، ففي هذه الدوائر كمية الطاقة المحسوبة من عملية

الضرب الحسابي لمركبتي الفولتية والتيار لا تنسجم مع واقع الكمية عمليا وتجريبيا وتعبر عن حساب خاطئ ، وظلت هذه الظاهرة الطبيعية مستعصية الحل إلى أن تصدى لها الرياضي الانكليزي جون وليم ستروت1842–1919) John William Strutt[48]) مطلع القرن العشرين ، بعد أن وضع المشكلة في سياق نموذج الأعداد التخيلية ، إذ وجد مركبتي التيار والفولتية في دوائر التيار المتناوب ليسا من طور اتجاهي واحد كما هو الحال في دوائر التيار المستمر ، وإنما بينهما فرق في الطور الاتجاهي مقداره 90 درجة كتعامد المركب التخيلي مع المركب الحقيقي في العدد المركب ، وسيكون حساب كمية الطاقة حساب عددي واتجاهي في آن واحد ، فظهرت النتائج متطابقة مع الواقع العملي ودخلت الكهرباء إلى عالم رحب من الكشوفات بسبب هذا التحليل الرياضي الفذ الذي نال عنه جون ستروت جائزة نوبل في عام 1904[49] .

رُحل هذا النمط من التحليل بكفاءة عالية إلى عالم الكم الذي معظم جذوره ذات طبيعة كهربائية ، فأصبحت المسيرة العلمية فيه أكثر يسرا وانفتاحا ، وتلاشت معضلة الموجة الكهرومغناطيسية التي يعد الضوء واحدا من تطبيقاتها ، بعد أن فُسرت بأنها مركب من موجتين متعامدتين إحداهما كهربائية والأخرى مغناطيسية ، وتطبيقا حرفيا للنموذج التخيلي الحقيقي ، بيد أن الأدهى بهذا الأمر أن يقوم علماء الكم بإعادة قراءة معظم القوانين الفيزيائية السابقة التي تفسر البنية الأساسية للترابط الكوني وقوانينه الفاعلة – أمثال قوانين كبلر وغاليليو ونيوتن – على غرار نموذج الأعداد التخيلية ، فبدت فيزياء الكون أكثر صفاء وجلاء ودقة مما كانت عليه سابقا بانهماكها في تحليلات يشوبها الغموض والتعقيد ولعل العمل الذي قام به عالم الكم ريجارد فاينمان (1918 – 1988) خير مثال على ذلك[50]، أما التوزيع الكوني للمجرات والهندسة المكانية التي تتشكل عليها كل مجرة لا يمكن تصورها بعقلانية وبوضوح من دون إدخال حسابات مجموعة مندلبروت والتتالي اللانهائي المنغلق في حدود ، والتي هي نواة النموذج التخيلي للحساب العددي[51].

الأمثلة الطبيعية التي تحاكي الأعداد التخيلية والمركبة كثيرة والتفصيلات العلمية واسعة وتخصصية ، ولكن ما يثيرنا من الناحية الفلسفية أن هذه الظواهر الطبيعية تنطوي على حقائق مركبة من مركبين ، لا يتعارضان وليس بينهما تأثير متبادل لأنهما مستقلا الهوية ، لذلك يتقاطعان بالزاوية الصحيحة التي تحفظ استقلاليتهما وهي الزاوية 90 ، وفي المقابل أي منهما يفتقر للأخر كي يظهر للوجود ، بمعنى أيّ منهما يختفي وراء الأخر ، ولا يستقيم انبلاج الظاهرة في الوجود إلا بتكاملهما في واقعة مركبة ، ففي مثالنا الأول عن ظاهرة الكهرباء ، لا وجود ظاهرة لفولتية خالصة من دون أن يرافقها تيار كهربائي والعكس صحيح ، كي تكتمل وجودية ظاهرة الكهرباء بمفهوم الطاقة الكهربائية المركب من الفولتية والتيار ، وبهذا الوصف المتماثل مع صورية العدد المركب المنبثق من العدد التخيلي ، جاء إلحاق هذه الظواهر وفق هذا النموذج ليس ليّا تعسفيا ، بل

وكأن هذه الظواهر تنتظر هذا النموذج للنضوج كي تفسر وتحسب ، وفي الحقيقة من الممكن تعميم هذا النموذج من التحليل على كل ظواهر الوجود وحتى البسيطة منها بفرض إحدى المركبين صفرا ولكن الناحية العملية تتطلب البساطة والاقتصاد .

الخاتمة– إذا بدأنا من حيث ما انتهينا ، بأن من الممكن إدراج كل الوجود الطبيعي بصياغة رمزية العدد المركب بجزئيه التخيلي والحقيقي ، نكون قد انتهينا مثلما بدأنا بتمهيد هذا البحث بحلم الفيثاغورية بأن الوجود عدد ونغم ، أي حساب وهندسة ، وإذا ما أضفنا إلى ذلك مقولة غاليليو بأن كتاب الطبيعة مكتوب بلغة الرياضيات ، نجد أننا في رحلة البحث في إشكالية أسس فلسفة الرياضيات فرضت علينا فلسفة اللغة العثور على لغة الوجود الطبيعي ، وأن البحث في فلسفة الرياضيات يحيلنا بالضرورة إلى فلسفة اللغة ، إذ يبدو لي الخوض في فلسفة العدد التخيلي أوصلتنا إلى أن رمزية العدد المركب بشقيه ، الحقيقي والتخيلي ، وهي رمزية مقدار واتجاه ، رمزية كم وشكل ، أي هي رمزية موضوع مادي ومفهوم ، وبالتالي ستكون في مقابلة مع رمزية العلامة في فلسفة اللغة المكونة من : الرمز الدال المطابق للجزء الحقيقي للعدد المركب والمطابق للوجود المادي لأي موجود طبيعي ، ورمز الدلالة المطابق للجزء التخيلي للعدد المركب بالتماثل مع المفهوم الذي يخلعه العقل على الموجود الطبيعي ، عندئذ يمسي الوجود والرياضيات واللغة أمرا واحدا .

لقد تراوح البحث طوعا ذهابا وايابا بين فلسفة الرياضيات وفلسفة اللغة منذ تسليط الضوء على مفارقة العدد التخيلي بوصفه مفارقة بين دال سالب ودلالة موجبة ، ومن ثم أمست جدلية الحساب والهندسة وتداعياتها على إشكالية الاتصال والانفصال هو جدل بين لغة الهندسة ولغة الحساب ، وما ترتب على ذلك في تطور التبادلية بين الهندسة والحساب في تراتبية المركز والهامش بين الهندسة والحساب وفق ما افتضاه منهج التفكيك ، وصولا إلى القسمة العادلة بينهما في رحاب نموذج العدد المركب بجزئيه التخيلي والحقيقي .

خلص البحث أن مشكلات العقل الكبرى عادة ما تبدأ بمفارقة تكشف عن نفسها بتحدي خارجي يستهدف بنية العقل الداخلية ، واستجابة العقل لهذه المفارقة يعد مفارقة أخرى ، لأنه يرفضها ويقبلها في أن واحد ، فهو يرفضها حفاظا على تماسك بنيته الداخلية المؤقتة ، ويقبلها توقا لحل لغزها واستشرافا لبنية عقل جديدة ، وغالبا لا يأتي حل تلك المشكلات الكبرى بدفعة واحدة ، بل عبر تحولات في مستويات إدراكية متعددة ، منهجها النقد الباطني لبنية العقل ، وغايتها التسلق إلى لب حل المشكلة ، وهذا ما بدا للعيان جليا ونحن نقطع أشواط البحث في حل لغز مشكلة الأعداد التخيلية ، إذ جاء الحل تتويجا لسلسلة من التحولات في فلسفة الرياضيات الرامية لنقد بنية العقل الرياضي بمراحل متعددة .

هوامش البحث

متي ، كريم : الفلسفة اليونانية في عصورها الاولى، ص 90
2 كانط ، عمانوئيل : نقد العقل المحض ، ص 64
3 المصدر نفسه ، ص 65 6-
4 Kuhn , Thomas : The Structure Of Scientific Revolutions, P. 7
5 Hawking, Stephen: God Greated the Integers, P.1
6الفندي ، محمد ثابت : فلسفة الرياضة ، ص 46
7 Nahin, Paul(2010): An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, U.K, P.4
8 Ibid.
9 باشلار ، غاستون : حدس اللحظة ، ص ٢٢
10 الفندي ، محمد ثابت : فلسفة الرياضة، ص ٦٦
11 دريدا ، جاك: في علم الكتابة، ص ٢٨٩
12كريسون ، اندريه : روسو ، ص 93
13 دريدا ، جاك: في علم الكتابة، ص ٢٩١
14كلر ، جوناثان : البنيوية وما بعدها، ص 196 – 7
15الفندي ، محمد ثابت : فلسفة الرياضة ، ص 87
16 Descartes, Rene: The Geometry, P. 2
17الفندي ، محمد ثابت : فلسفة الرياضة، ص 62
18 Vladut, S.G: Kroneckener's Jugendtraum and Modular Functions, P. 11
19 رسل ، برتراند : مقدمة لفلسفة الرياضية، ص ١٣
20 الجابري ، محمد عابد : مدخل إلى فلسفة العلوم، ص ١١٥
21 بنروز ، روجر : العقل والحاسوب، ص ١١٣
22 رسل ، برتراند : مقدمة للفلسفة الرياضية، ص ١١١ – ١٢
23 أغروس , روبرت . العلم في منظوره الجديد، ص ٩١
24 رسل ، برتراند : تاريخ الفلسفة الغربية، ص 70
25المصدر نفسه، ص ١٠٣
26 Hawking, Stephen: God Greated the Integers , P.3
27موسى ، كريم : فلسفة العلم : من العقلانية إلى اللاعقلانية، ص ٢٧٧
28 Kuhn , Thomas : The Structure Of Scientific Revolutions, P.4
29موسى ، كريم : فلسفة العلم : من العقلانية إلى اللاعقلانية، ص ٢٧٤
Kuhn ,Thomas : The Road Since Structure, P. 33
30 Ibid., P . 35
31 بنروز ، روجر : العقل والحاسوب،ص ١١٩
32الفندي ، محمد ثابت : فلسفة الرياضة، ص 24 – 5
33 Jourdian, Philip E. B. : Richard Dedekind, P. 419-20
34 Nahin, Paul : An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$,P.6
35 Descartes, Rene: The Geometry, P.240
36 Ibid. P. 175 & P. 187

37 Nahin, Paul : An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$,P. 49
38 Ibid.
39 Mahanta, Arun & others: Mandelbrot Set, The Mesmerizing Fractal With Integer Dimension, P. 1
40Ibid.

41موسوعة ويكيبيديا ، مجموعة مندلبورت
42 بنروز ، روجر : العقل والحاسوب ، ص ١٢٩
43 بنروز ، روجر : العقل والحاسوب، صص ١٢٨ – ٩
44بنروز ، روجر : العقل والحاسوب، ص ١١٢

* الدوائر الكهربائية ذات التيار المستمر التي يكون فيها التيار والفولتية ثابتا القيمة والاتجاه ، والمثال الجلي لمثل هذه الدوائر تلك التي تتكون من مقاومات كهربائية صرفة وتتغذى من مصدر ثابت الفولتية كالبطارية الكهربائية .

F الدوائر الكهربائية ذات التيار المتناوب هي التي يكون فيها التيار والفولتية متغيرا القيمة والاتجاه وتتكون دوائرها من مقاومات صرفة وحثية وسعوية ، وتتغذى من مصدر فولتية متغير ذات طبيعة موجية بتردد معين وامثلتها واسعة كتلك التي تستخدم في الخدمة المنزلية .

أسم الشهرة له لورد رالي Lord Raleigh

45 Nahin, Paul : An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$,P. 125
46 Nahin, Paul : An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, P. 114
47 Mahanta, Arun & others: Mandelbrot Set, The Mesmerizing Fractal With Integer Dimension,P.2

المصادر باللغة العربية

- أغروس , روبرت(١٩٩٣): العلم في منظوره الجديد، الكويت، سلسلة عالم المعرفة . الطبعة ١٣٤
- باشلار ، غاستون(١٩٨٦) : حدس اللحظة ، ترجمة : رضا عزوز و عبد العزيز زمزم ، بغداد، دار الشؤون الثقافية (افاق عربية) .
- بنروز ، روجر(١٩٩٨): العقل والحاسوب ، ترجمة محمد وائل وبسام المعصراني، دمشق، دار طلاس للنشر ، الطبعة الاولى.
- الجابري ، محمد عابد(١٩٩٨): مدخل إلى فلسفة العلوم، بيروت، مركز دراسات الوحدة العربية، الطبعة الرابعة
- دريدا ، جاك(٢٠٠٨): في علم الكتابة، ترجمة: أنور مغيث، منى طلبة، القاهرة، المركز القومي للترجمة، الطبعة الثانية.
- رسل ، برتراند(١٩٦٢) : مقدمة لفلسفة الرياضية، ترجمة محمد مرسي احمد، القاهرة، مؤسسة سجل العرب.
- رسل ، برتراند(١٩٦٧) : تاريخ الفلسفة الغربية، الكتاب الأول، ترجمة زكي نجيب محمود ، القاهرة، مطبعة لجنة التأليف والترجمة والنشر، الطبعة الثانية.

· الفندي ، محمد ثابت(١٩٩٦): فلسفة الرياضة، بيروت، دار النهضة للطباعة والنشر، الطبعة الأولى .
· كانط، عمانوئيل(بدون سنة نشر): نقد العقل المحض، ترجمة موسى وهبه، بيروت، مركز الانماء القومي
· كريسون ، اندريه(١٩٨٨) : روسو ، ترجمة :نبيه صفر، بيروت، منشورات عويدات، الطبعة الرابعة.
· كلر ، جوناثان(١٩٩٦): البنيوية وما بعدها، تحرير : جون ستروك، ترجمة : محمد عصفور، الكويت، سلسلة عالم المعرفة ، المجلد ٢٠٦ .
· متي، كريم(١٩٦٦): الفلسفة اليونانية في عصورها الاولى، بغداد، مطبعة الارشاد
· موسى ، كريم(٢٠١٢): فلسفة العلم : من العقلانية إلى اللاعقلانية، بيروت، دار الفارابي، الطبعة الأولى.
· قائمة المصادر باللغة الانجليزية
· Descartes, Rene(1954): The Geometry, Translated from French and Latin: David Eugene & Marcia Latham, New York, Dover Publications Inc.
· Hawking, Stephen(2007): God Greated the Integers, USA, Running Press books Publishers.
· Jourdian, Philip E. B.(July 1916): Richard Dedekind , The Monist Journal , , Volume 26,
· Kuhn , Thomas(1970) : The Structure Of Scientific Revolutions, second edition, USA, The Univ. of Chicago Press,
· Kuhn ,Thomas(2000): The Road Since Structure ,edited by james conant and john haugeland, USA, University of Chicago Press,
· Mahanta, Arun & others(Dec-Jan 2017): Mandelbrot Set, The Mesmerizing Fractal With Integer Dimension, International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences, Vol. 6, Issue 1,
· Nahin, Paul(2010) : An Imaginary Tale: Story of $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, U.K, Princeton Science Library Press.
· Vladut, S.G(1995): Kroneckener's Jugendtraum and

Modular Functions, translated from Russian: M. Tsfasman , U.K, Gordon & Preach Publishers , second printing