AL- Rafidain University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم

Available online at: https://www.jrucs.iq

JRUCS

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences

تقدير موثوقية توزيع Lomax بالاعتماد على معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (مع التطبيق)

موسى محمد موسى	بان غانم العاني
musa.9300@gmail.com	drbanalani@uomosul.edu.iq

قسم الإحصاء والمعلوماتية، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل، الموصل، العراق

المستخلص

في بعض الأحيان من الصعوبة الحصول على البيانات والمعلومات المطلوبة للبحث لأسباب قد تتعلق بالوقت والجهد، إضافةً إلى ذلك، في كثير من المسائل التطبيقية فإن الحصول على القياسات الحقيقية للمتغير قيد الاهتمام قد يكون أمراً ذو تكلفة عالية. لحل هذه المشكلات يتم اللجوء إلى أسلوب المعاينة الذي يضمن للباحث تحقيق أهداف بحث بأقل وقت وجهد وتكلفة. ومن أساليب المعاينة المهمة في هذا الجانب هو أسلوب معاينة المجموعة المرتبة. من هذا المنطلق، تمثل الهدف الرئيسي للبحث في إيجاد الدالة الاحتمالية لتوزيع لوماكس من خلال تقدير معلمتي القياس والشكل إضافةً إلى تقدير دالة الموثوقية للتوزيع، وكل ذلك سيتم بناءً على معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة وذلك باستخدام كل من طريقتي التقدير وهما الإمكان الأعظم والحد الأقصى لمقدرات التباعد. ولغرض المقارنة بين طريقتي التقدير لدالة الموثوقية، تم استخدام أسلوب المحاكاة مونت-كارلو لتوليد بيانات المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع لوماكس مع استخدام المعيار الإحصائي المتمثل بمتوسط مربعات الخطأ. توصل البحث إلى أن طريقة الإمكان الأعظم تعطي أفضل تقدير لدالة الموثوقية لتوزيع لوماكس عند استخدام أسلوب معاينة المجموعات المرتبة المزدوجة بأحجام عينات وعدد دورات مختلفة. وهذا ما تم إثباته من خلال النتائج التجريبية إذ أنه كلما زاد حجم العينة كانت نتائج التقدير أفضل، إذ حققت طريقة الإمكان الأعظم نسبة أفضلية (72.22%). ولبيان أهمية الموضوع من الناحية التطبيقية والواقعية، تم استخدام بيانات حقيقية عن مرضى سرطان المثانة، تمثل فيها المتغير العشوائي بأزمنة سكون المرض بالأشهر (بداية الشفاء التام) والمسجلة منذ دخول المرضى المستشفى لغاية خروجهم منها، إذ تم اختبار أن البيانات تتبع توزيع لوماكس باستخدام اختبارات جودة المطابقة (أندرسون-دارلنك، كولموكوروف-سميرنوف، مربع كاي). وباستخدام طريقة معاينة المجموعات المرتبة المزدوجة تم سحب عينة بحجم 96 من العينة الكلية من خلال أربع مجموعات وتم تكرار العملية 24 مرة، وباستخدام طريقة الإمكان الأعظم كأفضل طريقة لتقدير دالة الموثوقية، لوحظ بان الموثوقية للشفاء من مرض سرطان المثانة تتناقص بزيادة أزمنة بقاء المرضى بالمشفى عند استخدام بروتوكول العلاج والتعافي.

معلومات البحث

تواريخ البحث:

تاريخ تقديم البحث: 26/2/2024
تاريخ قبول البحث: 12/4/2024
تاريخ رفع البحث على الموقع: 31/12/2024

الكلمات المفتاحية:

معاينة المجموعات المرتبة المزدوجة، توزيع لوماكس، طريقة الإمكان الأعظم، طريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد.

للمراسلة:

بان غانم العاني
drbanalani@uomosul.edu.iq

DOI: https://doi.org/10.55562/jrucs.v56i1.11

1. المقدمة

تلعب المبادئ الإحصائية الأساسية دوراً حيوياً في أبحاث العلوم جميعاً- الزراعية والبيولوجية والبيئية والهندسية والطبية والفيزيائية والاجتماعية - وربما يكون أهم هذه المبادئ، هو ضمان أن البيانات التجريبية التي تم جمعها تمثل المجتمع قيد الدراسة تمثيلاً صادقاً. فاذا لم يتحقق هذا المبدأ، فلن تسمح الاختبارات الإحصائية بالتوصل الى استنتاجات إحصائية صحيحة حول الدراسة. في الدراسات التي تهتم بعمل استنتاجات حول مجتمع ما وبناءً على عينة من البيانات التي جمعت منه فإن النهج الأكثر شيوعًا لجمع البيانات هو الذي يستخدم طريقة المعاينة العشوائية البسيطة Simple Random sampling (SRS) من المجتمع. ولكن في بعض الأحيان يكون سحب العينات صعب لكون كلفة جمع البيانات باهضه أو تحتاج وقتا اطول، ولهذا لاقت طرق المعاينة ذات التكلفة المثلى اهتماماً كبيراً من قبل الإحصائيين ولاسيما عندما يكون قياس الخاصية محل الاهتمام باهظة الثمن وتحتاج الى مزيد

من الوقت لقياسها. في أوائل الخمسينيات من القرن الماضي، وفي سعيه لتقدير غلة المراعي في أستراليا بشكل فعال، اقترح العالم Mcintyre في عام (1952) طريقة لسحب العينات التي أصبحت تُعرف فيما بعد باسم معاينة المجموعة المرتبة Ranked Set Sampling (RSS). على الرغم من أن هذه الطريقة لم تلق الاهتمام من قبل الباحثين ولم تستخدم على نطـاق واسع، لكن أعيد النظر فيها لأهميتها في العقد الأخير من القرن الماضي، بسبب طبيعتها الفعالة من حيث التكلفة [1]. كان هناك زيادة في الاهتمام البحثي للإحصائيين بشأن طريقة (RSS) في السنوات الأخيرة حيث كانت هناك العديد من التطورات الجديدة للفكرة المقدمة من قبل Mcintyre، والتي جعلت الطريقة قابلة للتطبيق في نطاق أوسع بكثير في المجالات مثل العلوم البيئية، والموثوقية ومراقبة الجودة. طريقة معاينة المجموعات المرتبة أصبحت بديل فعال عن المعاينة العشوائية البسيطة (SRS) حيث أثبتت الدراسات المقدمة من قبل العديد من الباحثين أنها أكثر كفاءةً باستخدام بعض المعايير الإحصائية منها تقليل تباين المقدر، ومن ثم تعطي أكثر دقة عند اخذ عينات ذات حجم أصغر مما هو عليه في المعاينة العشوائية البسيطة. ويرتب المتغير قيد الدراسة بسهولة نسبيًا على الرغم من أنه لا يمكن قياسه بسهولة. ويمكن إجراء الترتيب على أساس الفحص البصري أو المعلومات السابقة أو الطرق التقريبية الأخرى التي لا تتطلب قياسًا فعليًا. وهناك العديد من الدراسات والبحوث التي تناولت معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (DRSS) منهم ففي عام 2002 استخدام الباحث (Abu-Dayyeh) وآخرين طريقة معاينة المجموعة المرتبة الزوجية (DRSS) لتقدير دالة التوزيع التراكمية. تم الحصول كفاءة المقدرات المقترحة عليها عندما يكون الترتيب مثاليًا. وتم استخلاص بعض الاستدلالات على دالة التوزيع بناءً على إحصائية Kolomgrov-Smirnov. تبين أن استخدام DRSS سيزيد من الكفاءة في هذه الحالة [2]. وفي عام 2004 حاول الباحثان (Abujiya & Uttlak) تطوير مخططات مراقبة الجودة لمراقبة متوسط العملية باستخدام عينات مرتبة مزدوجة (DRSS) بدلاً من العينات العشوائية البسيطة. تمت مقارنة أداء متوسط طول التشغيل (ARL) لهذه المخططات الجديدة مع المخططات القائمة على عينات مرتبة (RSS) والعينات العشوائية البسيطة (SRS) بنفس عدد المشاهدات. تبين أن المخططات الجديدة تقوم بعمل أفضل في اكتشاف التغيرات في متوسط العملية مقارنةً بـ SRS و RSS [3]. وفي عام 2019 قام (Taconeli & Bonat) بالمقارنة بين أداء ستة طرائق تقدير معلمات عدة توزيعات احتمالية في ضل RSS. وهذه الطريقة هي MLE وطريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد، المربعات الصغرى العادية والمرجحة، ومقدرات Cramér-von-Mises، و Anderson-Darling، من خلال تباين كولباك-ليبلر Kullback – Leibler . ظهرت نتائج بشكل عام أن طريقة أندرسون-دارلنك تفوق منافسيها وأن تقديرات الأمكان الأعظم تعتمد بشكل كبير على الترتيب المثالي للتقدير الدقيق [4].

2. مفهوم معاينه المجموعات المرتبة Ranked Set Sampling

معاينة المجموعة المرتبة هي طريقة تندرج ضمن طريقة المعاينة العشوائية البسيطة تشمل الحصول على قياسات العينة عندما يكون من الصعب على الباحث الحصول على القياسات للمتغير المراد دراسته، أي أنها باهظة الثمن، ولا تتوفر قياسات حقيقية، أو يصعب الحصول عليها، ويستغرق الأمر وقتًا طويلاً لقياسه. في هذه الحالة، يمكن للباحث استخدام RSS كطريقة إحصائية لجمع البيانات عن طريق تقليص حجم العينة. والحصول على قياسات حقيقية في أقل وقت وبأقل تكلفة والتي تمثل المجتمع أفضل تمثيل، وهي طريقة بديل من العينات العشوائية البسيطة (SRS) في حالة أنها باهظة الثمن أو تتطلب جهدًا مكثفًا. تم اقتراح فكرة أخذ معاينة المجموعة المرتبة لأول مرة من قبل العالم Mcintyre (1952) كجزء من جهوده المتميزة لإيجاد مقدر أكثر فاعلية كطريقة دقيقة لتقدير متوسط المجتمع. يعتمد مفهوم Mcintytre على قياس الوحدة المرتبة الأولى في المجموعة الأولى، والوحدة المرتبة الثانية من المجموعة الثانية، وهكذا حتى نصل إلى أكبر وحدة مرتبة في المجموعة الأخيرة.

3. معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة Double Ranked Set Sampling (DRSS)

قدم صالح والقادري (2000) طريقة سحب عينات المجموعة المرتبة المزدوجة **(DRSS)** المسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية (p.d.f) ودالة تراكمية (c.d.f) [5].

خطوات طريقة جمع عينة مجموعة مرتبة مزدوجة كالاتي :

1. نختار m^3 مشاهدة من المجتمع المعني للدراسة .

2. نقسم المشاهدات m^3 عشوائياً الى m من المجموعات، حجم كل مجموعة m^2 في هذه الحالة تتكون لدينا مصفوفة $m*m$ كل مجموعة وبعدها يتم استخدام طريقة المعاينة المجموعة المرتبة (RSS) على كل مجموعة حتى يتم الحصول على عينة مجموعة مرتبة بحجم m .

$$YR = \{y_{(1)j}\,,\, y_{(2)j}\,,\, \ldots\,,\, y_{(m)j}\},\ j = 1,2,\ \ldots\ ,m$$

3. لغرض الحصول على عينة مزدوجة بحجم n نكرر الخطوات k=1,2…r من المرات n=mk.

وصف اختيار مفردات المعاينة المرتبة المزدوجة كالاتي :

- **الحالة الأولى:** في حالة $m = 2r$ زوجية حيث ان r عدد حقيقي $r > 0$ في هذه الحالة يتكون لدينا مجموعتان من المشاهدات يتم اختيار اقل مشاهده من مجموعة الأولى المرتبة وأكبر مشاهدة من المجموعة الثانية المرتبة نحصل على معاينة مجموعة مرتبة مزدوجة **(DRSS)** .

والمخطط الآتي يوضح كيفية سحب عينة في حالة حجم العينات زوجي :

$$\begin{bmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} & \cdots & y_{1m}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)} & y_{22}^{(1)} & \cdots & y_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(1)} & y_{m2}^{(1)} & \cdots & y_{mm}^{(1)} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_{11}^{(2)} & y_{12}^{(2)} & \cdots & y_{1m}^{(2)} \\ y_{21}^{(2)} & y_{22}^{(2)} & \cdots & y_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(2)} & y_{m2}^{(2)} & \cdots & y_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} y_{11}^{(r)} & y_{12}^{(r)} & \cdots & y_{1m}^{(r)} \\ y_{21}^{(r)} & y_{22}^{(r)} & \cdots & y_{2m}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(r)} & y_{m2}^{(r)} & \cdots & y_{mm}^{(r)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} y_{11}^{(r+1)} & y_{12}^{(r+1)} & \cdots & y_{1m}^{(r+1)} \\ y_{21}^{(r+1)} & y_{22}^{(r+1)} & \cdots & y_{2m}^{(r+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(r+1)} & y_{m2}^{(r+1)} & \cdots & y_{mm}^{(r+1)} \end{bmatrix}$$

$$\cdots \begin{bmatrix} y_{11}^{(m)} & y_{12}^{(m)} & \cdots & y_{1m}^{(m)} \\ y_{21}^{(m)} & y_{22}^{(m)} & \cdots & y_{2m}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(m)} & y_{m2}^{(m)} & \cdots & y_{mm}^{(m)} \end{bmatrix}$$

مخطط (1): طريقة DRSS في حالة حجم العينة زوجي

نختار مفردات العينة المسحوبة بطريقة RSS نحصل على :

$s_1 = [y_{11}^{(1)}, y_{22}^{(1)}, \ldots, y_{mm}^{(1)}]$, $s_2 = [y_{11}^{(2)}, y_{22}^{(2)}, \ldots, y_{mm}^{(2)}]$, … $s_r = [y_{11}^{(r)}, y_{22}^{(r)}, \ldots, y_{mm}^{(r)}]$, $s_{r+1} = [y_{11}^{(r+1)}, y_{22}^{(r+1)}, \ldots, y_{mm}^{(r+1)}]$, …., $s_m = [y_{11}^{(m)}, y_{22}^{(m)}, \ldots, y_{mm}^{(m)}]$

نفرض أن :

$y_{(1,1)} = min\, S_1 = \min\left[y_{11}^{(1)}, y_{22}^{(1)}, \ldots, y_{mm}^{(1)}\right]$,$y_{(1,2)} = min\, S_2 = \min\left[y_{11}^{(2)}, y_{22}^{(2)}, \ldots, y_{mm}^{(2)}\right]$, …,

$y_{(1,r)} = min\, S_r = \min\left[y_{11}^{(r)}, y_{22}^{(r)}, \ldots, y_{mm}^{(r)}\right]$

بصورة عامة

$y_{(1,j)} = \min\left[y_{(1)}^{(j)}, y_{(2)}^{(j)}, \ldots, y_{(m)}^{(j)}\right]$; j=1, … , r

حيث ان $y_{(1)}^{(j)} = y_{11}^{(j)}$ وهكذا بالنسبة لبقية المشاهدات. ونفرض أن :

$y_{(m,r+1)} = max\, S_{r+1} = max\left[y_{11}^{(r+1)}, \ldots, y_{mm}^{(r+1)}\right]$

$y_{(m,r+2)} = max\, S_{r+2} = max\left[y_{11}^{(r+2)}, \ldots, y_{mm}^{(r+2)}\right]$

$\vdots$

$y_{(m,m)} = max\, S_m = max\left[y_{11}^{(m)}, y_{22}^{(m)}, \ldots, y_{mm}^{(m)}\right]$

بشكل عام

$y_{(m,k)} = max\left[y_{(1)}^{(k)}, y_{(2)}^{(k)}, \ldots, y_{(m)}^{(k)}\right]$; k = r + 1, r + 2,…,m

وعلية تكون العينة المسحوبة بحجم (m) بطريقة DRSS كالاتي :

$y_{D_{(e)}} = [y_{(1,1)}, y_{(1,2)}, \ldots, y_{(1,r)}, y_{m,(r+1)}, y_{m,(r+2)}, \ldots, y_{(m,m)}]$

- **الحالة الثانية:** في حالة $m = 2r + 1$ فردي حيث أن r عدد حقيقي r>0, في هذه الحالة تتكون لدينا ثلاث مجاميع يتم اختيار اقل مشاهدة من المجموعة الأولى المرتبة ومن المجموعة الأخيرة أكبر مشاهدة مرتبة ومن المجموعة $(\mathrm{r}+1)^{th}$ يتم اختيار الوسيط في هذه الحالة، نحصل على معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة DRSS [7],[6].

والمخطط الآتي يوضح كيفية سحب عينة في حالة حجم العينات فردي:

$$\begin{bmatrix} y_{11}^{(1)} & y_{12}^{(1)} & \cdots & y_{1m}^{(1)} \\ y_{21}^{(1)} & y_{22}^{(1)} & \cdots & y_{2m}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(1)} & y_{m2}^{(1)} & \cdots & y_{mm}^{(1)} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} y_{11}^{(2)} & y_{12}^{(2)} & \cdots & y_{1m}^{(2)} \\ y_{21}^{(2)} & y_{22}^{(2)} & \cdots & y_{2m}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(2)} & y_{m2}^{(2)} & \cdots & y_{mm}^{(2)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} y_{11}^{(r)} & y_{12}^{(r)} & \cdots & y_{1m}^{(r)} \\ y_{21}^{(r)} & y_{22}^{(r)} & \cdots & y_{2m}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(r)} & y_{m2}^{(r)} & \cdots & y_{mm}^{(r)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_{11}^{(r+1)(r+1)} & y_{12}^{(r+1)(r+1)} & \cdots & y_{1m}^{(r+1)(r+1)} \\ y_{21}^{(r+1)(r+1)} & y_{22}^{(r+1)(r+1)} & \cdots & y_{2m}^{(r+1)(r+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(r+1)(r+1)} & y_{m2}^{(r+1)(r+1)} & \cdots & y_{mm}^{(r+1)(r+1)} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_{11}^{(r+2)} & y_{12}^{(r+2)} & \cdots & y_{1m}^{(r+1)} \\ y_{21}^{(r+2)} & y_{22}^{(r+2)} & \cdots & y_{2m}^{(r+2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(r+2)} & y_{m2}^{(r+2)} & \cdots & y_{mm}^{(r+2)} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} y_{11}^{(m)} & y_{12}^{(m)} & \cdots & y_{1m}^{(m)} \\ y_{21}^{(m)} & y_{22}^{(m)} & \cdots & y_{2m}^{(m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1}^{(m)} & y_{m2}^{(m)} & \cdots & y_{mm}^{(m)} \end{bmatrix}$$

مخطط (2): لطريقة DRSS في حالة حجم العينة فردي

نختار مفردات العينة المسحوبة بطريقة DRSS نحصل على :

$$S_1 = \left[y_{11}^{(1)}, y_{22}^{(1)}, \dots, y_{mm}^{(1)}\right], S_2 = \left[y_{11}^{(2)}, y_{22}^{(2)}, \dots, y_{mm}^{(2)}\right], S_r = \left[y_{11}^{(r)}, y_{22}^{(r)}, \dots, y_{mm}^{(r)}\right],$$

$$S_{r+1} = \left[y_{11}^{(r+1)}, y_{22}^{(r+1)}, \dots, y_{mm}^{(r+1)}\right], \dots, S_m = \left[y_{11}^{(m)}, y_{22}^{(m)}, \dots, y_{mm}^{(m)}\right]$$

ونفرض ان :

$$y_{(1,1)} = \min\left[y_{11}^{(1)}, y_{22}^{(1)}, \dots, y_{mm}^{(1)}\right], y_{(1,2)} = \min\left[y_{11}^{(2)}, y_{22}^{(2)}, \dots, y_{mm}^{(2)}\right], y_{(1,r)} = \min\left[y_{11}^{(r)}, y_{22}^{(r)}, \dots, y_{mm}^{(r)}\right]$$

بشكل عام :

$$y_{(1,j)} = \min\left[y_{(1)}^{(j)}, y_{(2)}^{(j)}, \dots, y_{(m)}^{(j)}\right] \;; j = 1, \dots, r$$

$$y_{(r+1)(r+1)} = median\left[y_{(1)(r+1)}, y_{(2)(r+1)}, \dots, y_{(m)(r+1)}\right]$$

ونفرض ان :

$$y_{(m,r+1)} = \max\left[y_{11}^{(r+1)}, \dots, y_{mm}^{(r+1)}\right], y_{(m,r+2)} = \max\left[y_{11}^{(r+2)}, \dots, y_{mm}^{(r+2)}\right], \dots,$$

$$y_{(m,m)} = \max\left[y_{(1)}^{(m)}, y_{(2)}^{(m)}, \dots, y_{(m)}^{(m)}\right]$$

بشكل عام :

$$y_{(m,k)} = \max\left[y_{(1)}^{(k)}, y_{(2)}^{(k)}, \dots, y_{(m)}^{(k)}\right] \;; k = r+1, r+2, \dots, m$$

اذاً تكون العينة المسحوبة بحجم (m) بواسطة DRSS في حالة حجم العينة فردي كتالي :

$$y_{D_{(o)}} = \left[y_{1,1}, y_{1,2}, \dots, y_{1,r}, y_{(r+1)(r+1)}, y_{m,(r+2)}, \dots, y_{m,m}\right]$$

توزيع لوماكس Lomax Distribution

استخدم هذا التوزيع لأول مرة من قبل العالم Lomax عام 1954 ويعرف توزيع Lomax كذلك باسم توزيع Pareto من النوع الثاني عندما μ=0 أو توزيع بيرسون من النوع السادس. ويعد مفيداً لنمذجة وتحليل بيانات مدى الحياة في العلوم الطبية والبيولوجية والهندسية وما الى ذلك. كما انه قد حظي بأكبر قدر من الاهتمام من الإحصائيين النظريين لاستخدامه في دراسة الموثوقية والحياة . أيضا يستخدم في التطبيقات في الاقتصاد والعلوم. ليكن المتغير العشوائي y يتبع توزيع لوماكس بالمعلمتين θ و β حيث أن θ معلمة شكل (Shape Parameter) و β معلمة قياس (Scale Parameter). فان دالة كثافة احتمالية p.d.f والدالة تراكمية c.d.f تكون على التوالي بالنحو الاتي:[8]

$$f(y|\theta,\beta) = \frac{\theta}{\beta}\left(1+\frac{y}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} \quad y > 0 \quad ,\theta,\beta > 0 \tag{1}$$

يكون شكل دالة الكثافة الاحتمالية لمعاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (DRSS) الأصغر مشاهدة كالاتي:

$$h(Y|\theta,\beta) = \frac{\theta}{\beta}\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} \tag{2}$$

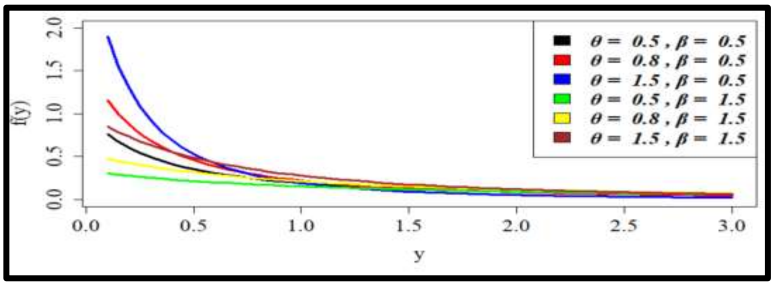
شكل دالة الكثافة الاحتمالية لمعاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (DRSS) الأكبر مشاهدة كالاتي:

$$Q(Y|\theta,\beta) = \frac{\theta}{\beta}\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} \tag{3}$$

شكل دالة الكثافة الاحتمالية لمعاينة المجموعة المرتبة المزدوجة (DRSS) للوسيط كالاتي:

$$N(Y|\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)} \tag{4}$$

والشكل (1) يبين منحني دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع لقيم مختلفة من θ و β .

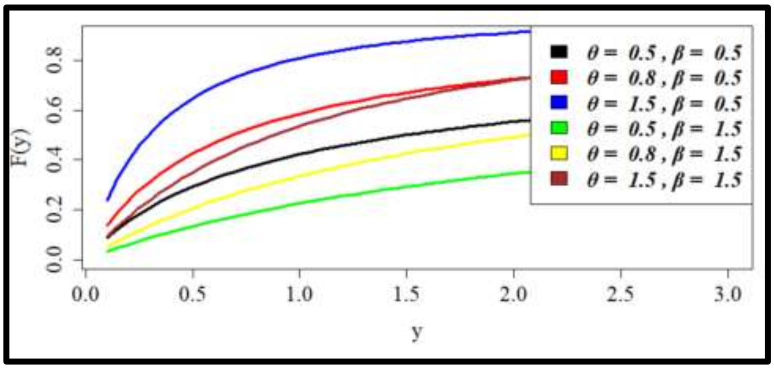


شكل (1): منحني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس لقيم مختلفة من θ و β

وان دالة التوزيع التراكمية تعطي بالصيغة الأتية:

$$F(y|\theta,\beta) = 1 - \left(1 + \frac{y}{\beta}\right)^{-\theta} \qquad (5)$$

والشكل (2) يبين منحني دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لوماكس لقيم مختلفة من θ و β.



شكل (2): منحني دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لوماكس لقيم مختلفة من θ و β.

الموثوقية Reliability

الموثوقية تعني الوثوق بالشيء او الاستناد علية كما واستعملت الموثوقية لأول مرة بعد الحرب العالمية الأولى عام 1920 في عملية تحسين الإنتاج من خلال عمليات السيطرة الإحصائية statistical control processes. وكذلك تعرف الموثوقية بأنها قياس لنظام أو أحد مكوناتهُ سيؤدي وظيفته المطلوبة لفترة من الوقت في ضل الظروف التشغيل العادية، وبتالي يمثل احتمال عدم الفشل بالنظام أثناء فترة زمنية معينة [0,t) ويشار لها بالرمز R(t) يمكن تحديد الموثوقية بناءً على الوقت أو بعض المقاييس الأخرى . وتعرف الموثوقية رياضياً [9].

$$R(t) = P(T \geq t) = \int_t^\infty f_T(y)dy = 1 - \int_0^t f_T(y)dy = 1 - F_T(t)\ ; \ \ t > 0$$

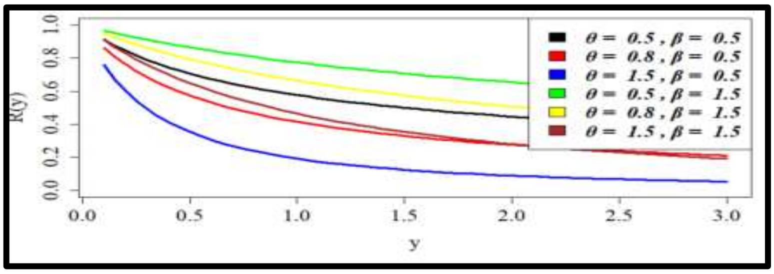
وبذلك تكون دالة الموثوقية لتوزيع لوماكس هي :

$$R(t) = \left(1 + \frac{t}{\beta}\right)^{-\theta} \ \ ; t > 0 \qquad (6)$$

حيث ان $R(t)$ هي دالة الموثوقية .T متغير عشوائي يرمز للفترة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل، أو هو الفترة الزمنية التي اشتغلها الجهاز حتى حدوث الفشل أما t فيمثل زمن الأشغال الذي يكون أكبر أو يساوي صفر ($t \geq 0$) . كذلك دالة الموثوقية هي دالة احتمالية تتميز بالخصائص التالية:

1. دالة الموثوقية R(t) موجبة ولكل قيم (t).
2. دالة الموثوقية R(t) مستمرة ولكل في (t) .
3. دالة الموثوقية R(t) رتيبة تتناقص مع الزمن (Monotonically decreasing function).
4. إن دالة الموثوقية تتناسب تناسباً عكسياً مع الزمن أي أن $\lim_{t\to\infty} R(t) = 0$.

ويبين الشكل (3) منحنيات دالة الموثوقية للتوزيع.



شكل (3): منحني دالة الموثوقية للتوزيع عند قيم مختلفة من θ و β

وسوف يكون تقدير معلمات توزيع Lomax باستخدام طريقتين للتقدير هما طريقة الإمكان الأعظم وطريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد (MPS) في ظل معاينة المجموعة المرتبة. ثم يتم تعويض المعلمات المقدرة في دالة الموثوقية حتى نحصل على تقدير دالة الموثوقية في ظل معاينة المجموعة المرتبة حسب طرائق التقدير .

دالة الكثافة الاحتمالية لمعاينة المجموعة المرتبة: *PDF for Ranked set sampling*

لتكن $y_{[1]1}y_{[2]1},\dots,y_{[m]k}$ عينة عشوائية مستقلة سحبت بطريقة معاينة المجموعة المرتبة RSS تم الحصول عليها من دورات k .وتمثل الإحصاءات المرتبة بحجم mk, كذلك نرمز لها للسهولة $y_{[i]j}$ حيث ان *i=1,...,m , j=1,..,k* . ولها دالة الكثافة الاحتمالية الأتية: [10]

$$f\left(Y_{(i)j}|\theta,\beta\right)=\frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}f\left(y_{(i)j}\right)\{F\left(y_{(i)j}\right)\}^{i-1}\{1-F\left(y_{(i)j}\right)\}^{m-i} \quad (7)$$

إذ إن الإحصاءات المرتبة أعلاه مستقلة وان الدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تكون بالشكل الاتي :

$$f(Y|\theta,\beta)=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}f\left(y_{(i)j}\right) \quad (8)$$

طريقة الإمكان الأعظم في ظل (*DRSS*)

1. في حالة حجم العينة زوجي m=2r

تعرف دالة الإمكان المعتمدة على عينة DRSS بالشكل الاتي :

$$L_{D_e}(\theta;\beta)=\left\{\prod_{j=1}^{r}mf_{1:m}\left(y_{1,j}\right)\left[1-F_{1:m}\left(y_{1,j}\right)\right]^{m-1}\right\}\left\{\prod_{k=r+1}^{m}m\,f_{m:m}\left(y_{m,k}\right)\left[F_{m:m}\left(y_{m,k}\right)\right]^{m-1}\right\}$$

إذ إن

$$\left.\begin{aligned}
f_{1:m}\left(y_{1,j}\right)&=mf\left(y_{1,j}\right)\left[1-F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m-1}\\
F_{1:m}\left(y_{1,j}\right)&=1-\left[1-F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m}\\
f_{m:m}\left(y_{m,k}\right)&=mf\left(y_{m,k}\right)\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m-1}\\
F_{m:m}\left(y_{m,k}\right)&=\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m}
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

نعوض معادلة (9) في معادلة (8) نحصل على المعادلة الآتية :

$$L_{D_{(e)}}=\left\{\prod_{j=1}^{r}m^2\ f\left(y_{1,j}\right)\left[1\text{-}F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m-1}\left[1\text{-}F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m(m-1)}\right\}*\left\{\prod_{k=r+1}^{m}m^2\,f\left(y_{m,k}\right)\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m-1}\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m(m-1)}\right\}$$

$$L_{D_{(e)}}=\left\{\prod_{j=1}^{r}m^2\frac{\theta}{\beta}\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)^{-1}\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)^{-\theta m^2}\right\}*\left\{\prod_{k=r+1}^{m}m^2\frac{\theta}{\beta}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\left[1\text{-}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m^2-1}\right\}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة أعلاه وأخذ المشتقة بالنسبة الى θ ومن ثم مساواتها للصفر للحصول على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة θ وكلاتي:

$$\frac{\partial lnL_{D_{(e)}}}{\partial\theta}=\frac{m}{\theta}\text{-}m^2\sum_{j=1}^{r}ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)\text{-}\sum_{k=r+1}^{m}ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)+\left(m^2\text{-}1\right)\sum_{k=r+1}^{m}\left\{\frac{\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}{\left(1\text{-}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\right\}=0 \quad (10)$$

والمعادلة (10) لا يمكن حلها بالطرق الرياضية الاعتيادية لذا تحل عدديا باستخدام طريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\theta}_{MLEDRSS_{(e)}}$ ، الآن نشتق معادلة (42) بالنسبة الى β ونساويها للصفر للحصول على مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة β.

$$\frac{\partial lnL_{D_{(e)}}}{\partial\beta}=\text{-}\frac{m}{\beta}+\left(1\text{-}\theta m^2\right)\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{y_{1,j}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}\right]+(\theta+1)\sum_{k=r+1}^{m}\left[\frac{y_{m,k}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}\right]+$$

$$\left(m^2\text{-}1\right)\sum_{k=r+1}^{m}\left[\frac{\theta y_{m,k}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}}{\beta^2\left(1\text{-}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\right]=0 \quad (11)$$

والمعادلة (11) لا يمكن حلها بالطرق الرياضية الاعتيادية لذا تحل عدديا باستخدام طريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\beta}_{MLEDRSS_{(e)}}$, لذلك فان مقدر دالة الموثوقية بطريقة الامكان الاعظم في ظل معاينة المجموعات المرتبة المزدوجة لتوزيع لوماكس يكون كالآتي :

$$R(t)=P(T>t)=\left(1+\frac{t}{\hat{\beta}_{MLEDRSS_{(e)}}}\right)^{-\hat{\beta}_{MLEDRSS_{(e)}}}\quad ;t>0 \quad (12)$$

2. في حالة حجم العينة فردي m=2r+1

$$\boldsymbol{L_{D_{(o)}}}=\left[\prod_{j=1}^{r} mf_{1:m}\left(y_{1,j}\right)\left[1\text{-}F_{1:m}\left(y_{1,j}\right)\right]^{m-1}\right]*\left[\prod_{k=r+2}^{m} m\, f_{m:m}\left(y_{m,k}\right)\left[F_{m:m}\left(y_{m,k}\right)\right]^{m-1}\right]*$$
$$\left[f_{(r+1)(r+1)}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right] \quad (13)$$

حيث أن :

$$f_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)=\left\{\frac{m!}{(r!)^2} f_{r+1:m}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\left(F_{\mathrm{r+1:m}}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\right)^r\left(1\text{-}F_{\mathrm{r+1:m}}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\right)^r\right\}$$

وعليه فان

$$L_{D_{(o)}}=\left\{\prod_{j=1}^{r} m^2\ f\left(y_{1,j}\right)\left[1\text{-}F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m-1}\left[1\text{-}F\left(y_{1,j}\right)\right]^{m(m-1)}\right\}*\left\{\prod_{k=r+2}^{m} m^2 f\left(y_{m,k}\right)\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m-1}\left[F\left(y_{m,k}\right)\right]^{m(m-1)}\right\}$$
$$*\left\{\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\left(\frac{m!}{r!\,r!} f\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\left(F\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\right)^r\left(1\text{-}F\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right)^r\right)\right\}$$
$$*\left\{\left(F_{r+1:\mathrm{m}}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\right)^r\left(1\text{-}F_{r+1:\mathrm{m}}\left(y_{(\mathrm{r+1})(\mathrm{r+1})}\right)\right)^r\right\} \quad (14)$$

نعوض عن قيم الدالة التراكمية في معادلة (14) وناخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة نحصل على المعادلة الآتية:

$$lnL_{D_{(o)}}=2rlnm+rln\theta\text{-}rln\beta\text{-}\sum_{j=1}^{r} ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)\text{-}\theta m^2\sum_{j=1}^{r} ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)$$
$$+2(m\text{-}r\text{-}1)lnm+(m\text{-}r\text{-}1)ln\theta\text{-}(m\text{-}r\text{-}1)ln\beta\text{-}(\theta+1)\sum_{k=r+2}^{m} ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)$$
$$+(m^2-1)\sum_{k=r+1}^{m} ln\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)+ln\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}+ln\frac{m!}{r!\,r!}+ln\theta-ln\beta$$
$$-(\theta+1)ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)+rln\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)+rln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta} \quad (15)$$
$$+rlnF_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)+rln\left(1-F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right)$$

نشتق المعادلة أعلاه بالنسبة الى θ ونساويها بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial lnL_{D_{(o)}}}{\partial\theta}=\frac{r}{\theta}-m^2\sum_{j=1}^{r} ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)+\frac{(m-r-1)}{\theta}-\sum_{k=r+2}^{m} ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)$$
$$+(m^2-1)\sum_{k=r+2}^{m}\left\{\frac{1}{\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)\right\}+\frac{1}{\theta}$$
$$-ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)+\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}{1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}$$
$$-\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta} ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}{\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}+r\frac{1}{\left[F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}F_\theta$$
$$-r\frac{1}{\left[1-F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}F_\theta$$

إذ إن:

$$F_\theta=\frac{\partial F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)}{\partial\theta} \tag{16}$$

$$\frac{\partial lnL_{D_{(o)}}}{\partial\theta}=\frac{r}{\theta}-m^2\sum_{j=1}^{r}ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)+\frac{(\text{m-r-1})}{\theta}-\sum_{k=r+2}^{m}ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)$$
$$+(m^2-1)\sum_{k=r+2}^{m}\left\{\frac{\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}{1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}}\right\}+\frac{1}{\theta}-\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)$$
$$+\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}{1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}-\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-1}}{\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}$$
$$+rF_\theta\left[\frac{1-2F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)}{\left[F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]\left[1-F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}\right] \tag{17}$$

حيث أن :

$$F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)=\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{r+w+1}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w+1}$$

الآن نجد قيمة F_θ حسب المعادلة رقم (16) نحصل على :

$$\frac{\partial F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)}{\partial\theta}=\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{r+w+1}\,(r+w+1)\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}$$
$$*\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)$$

نعوض F_θ في المعادلة (17) ونساويها بالصفر نحصل على المعادلة الآتية:

$$\frac{\partial lnL_{D_{(o)}}}{\partial\theta}=\frac{r}{\theta}-m^2\sum_{j=1}^{r}ln\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)-\frac{(m-r-1)}{\theta}\sum_{k=r+1}^{m}ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)$$
$$+(1-m^2)\sum_{k=r+2}^{m}\left\{\frac{\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}{\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\right\}+\frac{1}{\theta}-\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)$$
$$+\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}{1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}-\frac{r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}{\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}$$
$$+\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{r+w+1}\,(r+w+1)\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}$$
$$*\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)\left[\frac{1-2\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}{\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}\right]=0 \tag{18}$$

والمعادلة (18) لا يمكن حلها بالطرق الرياضية الاعتيادية لذا تحل عدديا باستخدام طريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\theta}_{MLEDRSS(o)}$. الآن نشتق معادلة (15) بالنسبة الى β ونساويها بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial\ln L_{D_{(o)}}}{\partial\beta}=-\frac{r}{\beta}-\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}(-y_{1,j}\beta^{-2})\right]-\theta m^2\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{(-y_{1,j}\beta^{-2})}{\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}\right]-\frac{(\text{m-r-1})}{\beta}$$
$$-(\theta+1)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{(-y_{m,k}\beta^{-2})}{\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}\right]+(m^2-1)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{\theta}{\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}(-y_{m,k}\beta^{-2})\right]$$

$$-\frac{1}{\beta}+\frac{(\theta+1)}{\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}\left(y_{(r+1)(r+1)}\,\beta^{-2}\right)+\frac{(\theta)r}{\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\left(\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right)\left(y_{(r+1)(r+1)}\beta^{-2}\right)$$

$$+\frac{r\theta\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\beta^{-2}}{\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}+r\frac{1}{\left[F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}F_\beta+r\frac{1}{\left[1-F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}F_\beta$$

إذ إن:

$$F_\beta=\frac{\partial F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)}{\partial\beta}$$

$$\frac{\partial \ln L_{D_{(o)}}}{\partial\beta}=-\frac{r}{\beta}+\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{y_{1,j}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}\right]+\theta m^2\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{y_{1,j}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}\right]-\frac{(m-r-1)}{\beta}-(\theta+1)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{y_{m,k}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}\right]$$

$$+\left(m^2-1\right)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{\theta y_{m,k}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}}{\beta^2\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\right]-\frac{1}{\beta}+\frac{(\theta+1)y_{(r+1)(r+1)}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}+\frac{r\theta y_{(r+1)(r+1)}\left(\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right)}{\beta^2\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}$$

$$+\frac{\theta r\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}y_{(r+1)(r+1)}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}+rF_\beta\left[\frac{1-2F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)}{\left[F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]\left[1-F_{r+1:m}\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)\right]}\right]$$

(19)

الآن نجد قيمة F_β:

$$F_\beta=\frac{(2r+1)!}{(r)!(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{r+w+1}\,(r+w+1)\frac{\theta y_{(r+1)(r+1)}}{\beta^2}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}*\left[\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]$$

نعوض قيمة F_β في المعادلة (19) نحصل على :

$$\frac{\partial lnL_{D_{(o)}}}{\partial\beta}=-\frac{r}{\beta}+\left(\theta m^2+1\right)\sum_{j=1}^{r}\left[\frac{y_{1,j}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)}\right]-\frac{(m-r-1)}{\beta}-(\theta+1)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{y_{m,k}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)}\right]$$

$$+\left(m^2-1\right)\sum_{k=r+2}^{m}\left[\frac{\theta y_{m,k}\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}}{\beta^2\left(1-\left(1+\frac{y_{m,k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}\right]-\frac{1}{\beta}+\frac{(\theta+1)y_{(r+1)(r+1)}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)}$$

$$-\frac{r\theta y_{(r+1)(r+1)}\left(\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right)}{\beta^2\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}+\frac{\theta r y_{(r+1)(r+1)}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}}{\beta^2\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}}$$

$$+r\frac{(2r+1)!}{(r)!(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{r+w+1}\left(r+w+1\right)\frac{\theta y_{(r+1)(r+1)}}{\beta^2}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}$$

$$*\left[\frac{1-2\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)}{\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)\left[1-\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)\right]}\right]=0 \qquad (20)$$

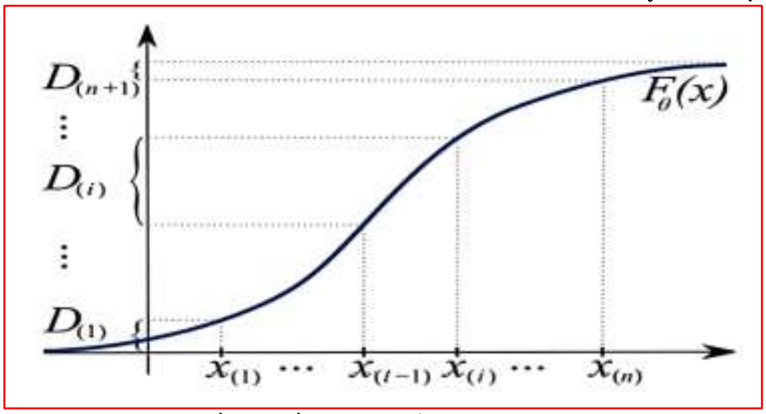
والمعادلة (20) لا يمكن حلها بالطرق الرياضية الاعتيادية لذا تحل عدديا باستخدام طريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\beta}_{MLEDRSS_{(o)}}$.

لذلك فان مقدر دالة الموثوقية بطريقة الإمكان الأعظم في ظل معاينة المجموعات المرتبة المزدوجة لتوزيع لوماكس يكون كالآتي:

$$R(t) = P(T > t) = \left(1 + \frac{t}{\hat{\beta}_{MLEDRSS_{(o)}}}\right)^{-\hat{\theta}_{MLEDRSS_{(o)}}} \quad ; t > 0 \tag{21}$$

طريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعـد: Maximum Product of Spacing Estimator Method (MPS)

اذا كانت $y_1, y_2, \ldots, y_n$ عينة عشوائية مرتبة ومتبـــــاعدة بشكل منتظم بين مفرداتها وأخذت من مجتمع يتبع التوزيع الاحتمالي الذي له داله كثافه احتماليه $f(\theta,\beta)$ وداله تراكميه $F(y)$ فأعلى ناتج لمقدرات التباعد نحصل عليه من تعظيم المتوسط الهندسي للمسافات كما أن التقدير في هذه الطريقة يزيد التباعد الى حد اقصى من الوسط الهندسي $Q(\theta;\beta|y)$. والشكل الآتي يوضح التباعد بين المشاهدات والذي نرمز لهُ D_i وال $i=1\ldots n$. [12],[13]



شكل (4): تباعد المسافات المنتظمة لطريقة (MPS)

$$H(\theta,\beta/y) = \{\prod_{i=1}^{n+1} D_i(\theta,\beta|y)\}^{\frac{1}{n+1}} \tag{22}$$

$$D_i(\theta,\beta/y) = F\left(y_{(i:n)}|\theta,\beta\right) - F\left(y_{(i-1:n)}|\theta,\beta\right) \tag{23}$$

حيث ان :

$$D_i(\theta,\beta/y) = \begin{cases} D_1 = F(x_1) \\ D_i = F(x_i) - F(x_{i-1}) = F(x_{(2:n)}) & i = 2 \ldots n \\ D_{n+1} = 1 - F(x_n) \end{cases} \tag{24}$$

كما ان هذه الطريقة تتحقق بالشروط الآتية:

$$F\left(y_{(0:n)}|\theta,\beta\right) = 0 \;;\; F\left(y_{(n+1)}|\theta,\beta\right) = 1 \;;\; \sum_{i=1}^{n+1} D_i(\theta,\beta) = 1$$

طريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد في ظل طريقة (DRSS)

1. في حالة حجم العينة زوجي m=2r

ترتيب المشاهدات الصغرى والعظمى التي سحبت بطريقة DRSS ترتيباً تصاعدياً وكالآتي :

$$y_1 < y_2, \ldots, < y_r \;,\quad y_{r+1} < y_{r+2} < , \ldots, < y_m$$

نحدد قيم D_i للمشاهدات حسب المعادلة (24) وكالاتي :

$$D_1 = F(y_1)\,, D_2 = F(y_2) - F(y_1) \ldots \;\; D_r = F(y_r) - F(y_{r-1}), D_{r+1} = F(y_{r+1}) - F(y_r)$$

$$, D_{r+2} = F(y_{r+2}) - F(y_{r+1}), \ldots \ldots \ldots \ldots, D_{m+1} = 1 - F(y_m)$$

تعوض قيم D_i في معادلة (22) نحصل على

$$H(\theta,\beta) = \{\prod_{j=1}^{r} D_j * \prod_{k=r+1}^{m+1} D_k * D_{r+1}\}^{\frac{1}{m+1}}$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة اعلاه نحصل على :

$$lnH(\theta,\beta) = \frac{1}{m+1}\{\sum_{j=1}^{r} lnD_j + \sum_{k=r+1}^{m+1} lnD_k + lnD_{r+1}\}$$

نعوض عن قيم D_i و D_k و D_{r+1} نحصل على :

$$= \frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r} \ln\left[F(y_{1.j}) - F\left(y_{1,j-1}\right)\right] + \sum_{k=r+1}^{m+1} \ln\left[F(y_{m.k}) - F\left(y_{m,k-1}\right)\right] + \ln\left[F\left(y_{m,r+1}\right) - F(y_{1.r})\right]\right\} \tag{25}$$

نعوض قيم الدوال التراكمية في معادلة (25) وإجراء بعض الاختصارات نحصل على المعادلة الآتية:

$$=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r} ln\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{1,j}}{\beta}\right)^{-m\theta}\right]-\left[1-\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right]\right\}+\sum_{k=r+2}^{m+1} ln\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}\right\}+ln\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)^{-m\theta}\right]\right\}\right\} \tag{26}$$

نشتق معادلة (26) بالنسبة الى θ ومن ثم نساويها للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial lnH(\theta,\beta)}{\partial\theta}=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{-m\left(1+\frac{y_{1.j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m} ln\left(1+\frac{y_{1.j-1}}{\beta}\right)-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m} ln\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)}{\left\{1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}-1+\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right.$$

$$+\sum_{k=r+2}^{m+1}\frac{m\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)-m\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta} ln\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)}{\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}\right\}}$$

$$\left.+\frac{\left[m\left[1-\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta} ln\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)\right]-\left[m\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)^{-\theta m} ln\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)\right]}{\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-1+\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right\}=0 \tag{27}$$

المعادلة (27) لا يمكن حلها بالطريقة العادية لذا تحل عددياً بطريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\theta_{MPSDRSS_{(e)}}$.

الان نشتق معادلة (26) بالنسبة الى β ثم نساويها للصفر نحصل على :

$$\frac{\partial lnH(\theta,\beta)}{\partial\beta}=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{-\frac{m\theta}{\beta^2}\left[y_{1,j-1}\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-(\theta m+1)}+y_{1.j}\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-(\theta m+1)}\right]}{\left\{1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}-1+\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right.$$

$$+\sum_{k=r+2}^{m+1}\frac{-\frac{m\theta}{\beta^2}\left[y_{m,k-1}\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}+y_{m.k}\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]}{\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}\right\}}$$

$$\left.+\frac{\left[\frac{-y_{1.r}\theta m}{\beta^2}\left[1-\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]+m\theta\left[\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)\right]^{-(\theta m+1)}\frac{y_{1.r}}{\beta^2}}{\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m,r+1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-1+\left(1+\frac{y_{1.r}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right\} \tag{28}$$

المعادلة (28) لا يمكن حلها بالطريقة العادية لذا تحل عددياً بطريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\beta}_{MPSDRSS_{(e)}}$.

لذلك فأن مقدر دالة الموثوقية بطريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد في ضل معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة لتوزيع لوماكس يكون كالآتي:

$$R(t)=P(T<t)=\left(1+\frac{t}{\hat{\beta}_{MPSDRSS_{(e)}}}\right)^{-\hat{\theta}_{MPSDRSS_{(e)}}} \tag{29}$$

2. في حالة حجم المجموعة فردي m=2r+1

ترتيب المشاهدات الصغرى والعظمى والوسيط ترتيبا تصاعدياً

$y_1<y_2,\dots,<y_r\ \ ,y_{r+1}<y_{r+2}<,\dots,<y_m$

نجد قيم D_i و D_k للمشاهدات حسب الصيغة (24)

إذ أن $y_1<,\dots,<y_r$ تمثل القيم الصغرى و y_{r+1} تمثل الوسيط و $y_{r+2}<,\dots,<y_m$ تمثل القيم العظمى ويمكن توضيح ذلك كالآتي :

$$D_1 = F(y_1)\,,D_2 = F(y_2) - F(y_1)\,,\ldots,D_r = F(y_r) - F(y_{r-1})\,,D_{r+1} = F(y_{r+1}) - F(y_r),$$
$$D_{r+2} = F(y_{r+2}) - F(y_{r+1}),\ldots\ldots\ldots.,D_{m+1} = 1 - F(y_m)$$

تعوض قيم D_i في معادلة (22)

$$Z(\theta;\beta)=\left\{\prod_{j=1}^{r} D_j * \prod_{k=r+2}^{m+1} D_k * \left\{F\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)-F\left(y_{(r:r)}\right)\right\} * \left\{F\left(y_{(r+2)(r+2)}\right)-F\left(y_{(r:r)}\right)\right\}\right\}^{\frac{1}{m+1}} \quad (30)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة (30) نعوض عن قيم D_j و D_k بما يساويها نحصل على :

$$\ln Z(\theta;\beta)=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r}\ln\left[F\left(y_{1,j}\right)-F\left(y_{1,j-1}\right)\right]+\sum_{k=r+2}^{m+1}\ln\left[F\left(y_{m.k}\right)-F\left(y_{m,k-1}\right)\right]+ln\left\{F\left(y_{(r+1)(r+1)}\right)-F(y_{1.r})\right\}+ ln\left\{F\left(y_{(r+2)}\right)-F(y_{(r+1)(r+1)})\right\}\right\} \quad (31)$$

نعوض عن قيم الدوال التراكمية في المعادلة اعلاه ثم نشتق بالنسبة ل θ نحصل على

$$\frac{\partial \ln Z(\theta,\beta)}{\partial\theta}=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{\left(1+\frac{y_{1.j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\ln\left(1+\frac{y_{1.j-1}}{\beta}\right)-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}\ln\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)}{\left\{1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}-1+\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right.$$

$$+\sum_{k=r+2}^{m+1}\frac{m\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)-m\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)}{\left\{\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}\right\}}$$

$$+\frac{1}{\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{(r+w+1)}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w+1}\right]-\left[1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right]}$$

$$*\left[\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}\ln\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)-\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{(r+w+1)}(r+w+1)\right.$$
$$\left.*\left(1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right)^{r+w}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+2,m)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{(r+w+1)}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w+1}\right]}$$
$$*\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^w\binom{r}{w}}{(r+w+1)}(r+w+1)\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\ln\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)\right]$$
$$\left.-m\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)^{-\theta}ln\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)\right\}=0 \quad (32)$$

المعادلة (32) لا يمكن حلها بالطريقة العادية لذا تحل عددياً بطريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\theta}_{MPSDRSS_{(o)}}$

الآن نشتق معادلة (31) بالنسبة الى β ونساويها بالصفر نحصل على

$$\frac{\partial lnZ(\theta,\beta)}{\partial\beta}=\frac{1}{m+1}\left\{\sum_{j=1}^{r}\frac{\frac{m\theta}{\beta^2}\left[y_{1,j-1}\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-(\theta m+1)}-y_{1.j}\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-(\theta m+1)}\right]}{\left\{1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}-1+\left(1+\frac{y_{1,j-1}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right\}}\right.$$

$$+\sum_{k=r+2}^{m+1}\frac{\frac{m\theta}{\beta^2}\left[y_{m,k-1}\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}-y_{m.k}\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]}{\left[1-\left(1+\frac{y_{m.k}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[1-\left(1+\frac{y_{m,k-1}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}}$$

$$+\frac{1}{\left\{\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^{w}\binom{r}{w}}{(r+w+1)}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w+1}\right]-\left[1-\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-\theta m}\right]\right\}}$$

$$*\left\{\begin{array}{c}\left[\frac{\theta m}{\beta^2}y_{1.j}\left(1+\frac{y_{1.j}}{\beta}\right)^{-(\theta m+1)}\right]\\ -\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^{w}\binom{r}{w}}{(r+w+1)}(r+w+1)\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}\frac{\theta}{\beta^2}y_{(r+1)(r+1)}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]\end{array}\right\}$$

$$+\frac{1}{\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m}-\left[\frac{(2r+1)!}{(r)!\,(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^{w}\binom{r}{w}}{(r+w+1)}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w+1}\right]}$$

$$*\frac{(2r+1)!}{(r)!(r)!}\sum_{w=0}^{r}\frac{(-1)^{w}\binom{r}{w}}{(r+w+1)}(r+w+1)\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{r+w}\frac{\theta}{\beta^2}y_{(r+1)(r+1)}\left(1+\frac{y_{(r+1)(r+1)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}-$$

$$\left[\frac{m\theta}{\beta^2}y_{(r+2)}\left[1-\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)^{-\theta}\right]^{m-1}\left(1+\frac{y_{(r+2)}}{\beta}\right)^{-(\theta+1)}\right]\Bigg\} \qquad (33)$$

المعادلة (33) لا يمكن حلها بالطريقة العادية لذا تحل عددياً بطريقة نيوتن رافسون التكرارية لنحصل على مقدر $\hat{\beta}_{MPSDRSS_{(o)}}$ لذلك فأن مقدر دالة الموثوقية بطريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد في ضل معاينة المجموعة المرتبة المزدوجة التوزيع لوماكس يكون كالآتي :

$$R(t)=P(T<t)=\left(1+\frac{t}{\hat{\beta}_{MPSDRSS_{(o)}}}\right)^{-\hat{\theta}_{MPSDRSS_{(o)}}} \qquad (34)$$

مراحل تجربة المحاكاة

تم كتابة برنامج المحاكاة باستعمال لغة البرمجة الإحصائية (R) ويتضمن البرنامج أربعة مراحل أساسية لتقدير معلمات ودالة الموثوقية لتوزيع لوماكس وكما يأتي:

المرحلة الأولى: مرحلة تحديد القيم الافتراضية وقد تم اختيار القيم كالآتي:

1- اختيرت القيم الافتراضية لمعلمتي توزيع لوماكس، إذ تم تشكيل 6 نماذج وكما يأتي:

جدول (1): القيم الافتراضية لمعلمات توزيع لوماكس

Model	θ	β	
1	0.5	0.5	$\theta=\beta$
2	0.8	0.5	$\theta>\beta$
4	0.5	1.5	$\theta<\beta$

2- تم اختيار أحجام مختلفة للعينات (12، 24، 36، 54، 96)، وكما يأتي:

جدول (2): أحجام العينات المستخدمة

عدد الدورات (k)	حجم المجموعة (m)	حجم العينة
4	3	12
3	4	
2	6	
8	3	24
4	6	
6	4	
9	4	36
6	6	
12	3	
6	9	54
9	6	

18	3	
12	8	**96**
8	12	
16	6	

3- تم اختيار قيم t من ضمن القيم المولدة (0.05 و0.5 و1.5و3.5 و5) وذلك لمعرفة سلوك دالة الموثوقية.

4- تم تكرار كل تجربة 1000 مرة.

المرحلة الثانية (توليد البيانات): في هذهِ المرحلة يتم توليد المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع لوماكس بتطبيق ما تسمى طريقة التحويل العكسي، وكالآتي :

$$F(t) = 1 - [1 + \frac{t}{\beta}]^{-\theta}$$

$$u = 1 - [1 + \frac{t}{\beta}]^{-\theta}$$

$$1 - u = [1 + \frac{t}{\beta}]^{-\theta}$$

$$\Rightarrow \ln(1 - u) = -\theta \ln\left(1 + \frac{t}{\beta}\right)$$

$$t = \beta e^{-\frac{\ln(1-u)}{\theta}} - \beta$$

إذ يتم التعويض عن قيمة u بقيمة مولدة تتبع التوزيع المنتظم ضمن المدة [0,1].

المرحلة الثالثة (التقدير): يتم في هذه المرحلة إجراء عملية التقدير لدالة الموثوقية لتوزيع لوماكس باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة الحد الأقصى لمقدرات التباعد

المرحلة الرابعة (مرحلة المقارنة بين الطرائق لمعرفة أفضل طريقة تقدير): تم استخدام معيار مجموع مربعات الخطأ MSE إذ إن الطريقة التي تمتلك أقل قيمة MSE تعد أفضل، وحسب الصيغة الآتية :

$$MSE\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left[\hat{R}_i(t) - R_i(t)\right]^2$$

حيث أن L تمثل عدد التكرارات لكل تجربة والمساوي إلى (1000). و $\hat{R}(t)$: مقدر $R(t)$ بحسب الطريقة المستعملة في التقدير.

النتائج التجريبية في ظل طريقة (DRSS)

لغرض تطبيق طرائق التقدير لدالة الموثوقية لتوزيع لوماكس وتحديد الطريقة الأفضل، والتي تستخدم في تقدير دالة الموثوقية للبيانات الحقيقية في الجانب التطبيقي مستخدمين لذلك برنامج R، حيث تم تقدير دالة الموثوقية بطريقة MLE لدالة الموثوقية في كما في المعادلتين (12 و 21)، وبطريقة MPS كما في المعادلتين (29 و34) وتم الحصول على النتائج في الجدول الآتي:

جدول (3): قيم MSE عند قيم مختلفة لـ θ و β وفي حالتي الزوجي والفردي لحجم المجموعة

β	θ	r	m	MSE MLE	MSE MPS	Best
0.5	0.5	12	25	0.00215	0.00233	MLE
		27	55	0.00211	0.00207	MPS
		47	95	0.00171	0.00185	MLE
0.5	0.5	15	30	0.00214	0.00227	MPS
		30	60	0.00175	0.00189	MLE
		48	96	0.00160	0.00173	MLE
0.8	0.5	12	25	0.00118	0.00237	MLE
		27	55	0.00114	0.00229	MLE
		47	95	0.00105	0.00101	MPS
0.5	0.8	15	30	0.00188	0.00203	MLE
		30	60	0.00184	0.00194	MLE
		48	96	0.00148	0.00160	MLE
0.5	1.5	12	25	0.00587	0.00617	MLE
		27	55	0.00555	0.00584	MLE
		47	95	0.00552	0.00580	MLE
1.5	0.5	15	30	0.00558	0.00546	MPS
		30	60	0.00554	0.00583	MLE
		48	96	0.00512	0.00539	MLE

تحليل نتائج المحاكاة في ظل طريقة (DRSS)

يمكن تلخيص الجداول السابقة بجدول (4) الآتي:

جدول (4): طرائق التقدير عند استخدام طريقة المعاينة DRSS

m	Model	θ	β		Best
25	1	0.5	0.5	θ = β	MLE
55					MPS
95					MLE
30					MPS
60					MLE
96					MLE
25	2	0.8	0.5	θ > β	MLE
55					MLE
95					MPS
30					MPS
60					MLE
96					MLE
25	3	0.5	1.5	θ < β	MLE
55					MLE
95					MLE
30					MPS
60					MLE
96					MLE

نلاحظ من خلال جدول (25) أن طريقة الإمكان الأعظم MLE أعطت اعلى نسبة الأفضلية 72.22% بينما طريقة MPS بنسبة 27.78% لتقدير دالة الموثوقية لتوزيع لوماكس بالاعتماد على معيار MSE في ظل طريقة DRSS لسحب العينة عند أحجام مجموعات (فردي – زوجي) وعدد دورات مختلفة.

الجانب التطبيقي

اعتمدت هذه الدراسة على البيانات الخاصة بمرضى سرطان المثانة وعددهم (128) مريض، والتي تمثل مدة سكون المرض بالأشهر (بداية الشفاء التام) والمسجلة منذ دخول المرضى المستشفيات لغاية خروجهم منها. [14].

اختبارات حسن المطابقة

لأجل التحقق من أن البيانات سكون المرض تتبع توزيع لوماكس، تم استعمال كل من اختبار (K-S) Kolmogorov-Smirnov واختبار (A-D) Anderson Darling واختبار Chi-Squared إذ إن فرضية العدم تنص على أن للبيانات توزيع لوماكس، وكما يأتي:

$H_0: x \sim Lomax\ Distribution$

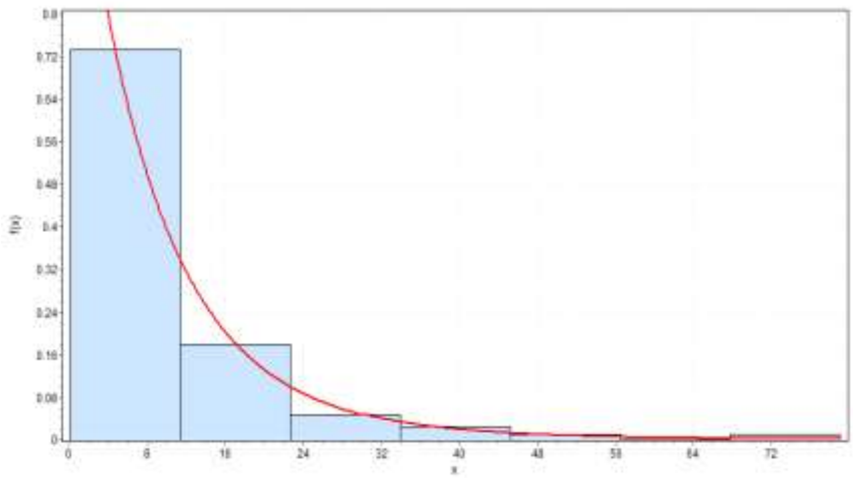
$H_1: x \nsim Lomax\ Distribution$

ولغرض توفيق توزيع لوماكس للبيانات تم استخدام البرنامج الإحصائي الجاهز EasyFit 5.6، وكانت افضل قيم للمعلمات المقدرة للتوزيع والتي يتحقق عندها ملائمة توزيع لوماكس للبيانات هي ($\hat{\theta} = 5.66375; \hat{\beta} = 49.82834$) حيث ان نتائج الاختبارات الثلاثة كانت كما في الجدول (5).

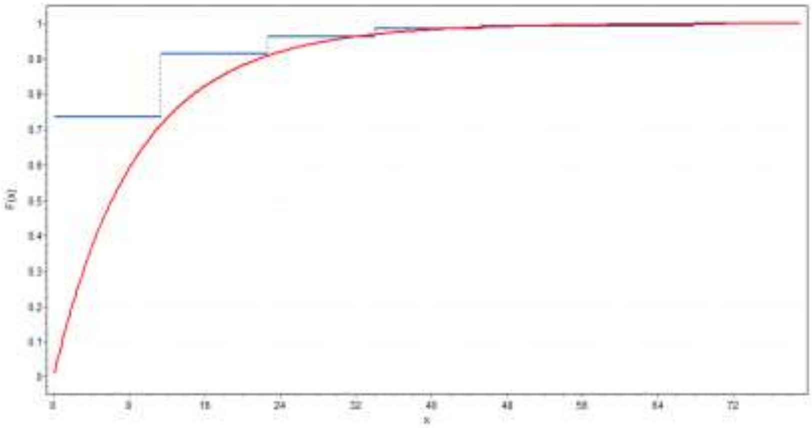
جدول (5): نتائج اختبار ملائمة توزيع لوماكس لبيانات الدراسة

Kolmogorov-Smirnov					
Sample Size Statistic P-Value Rank	128 0.09667 0.17116 28				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	0.09484	0.1081	0.12003	0.13417	0.14398
Reject?	Yes	No	No	No	No
Anderson-Darling					
Sample Size Statistic Rank	128 1.3768 25				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	1.3749	1.9286	2.5018	3.2892	3.9074
Reject?	Yes	No	No	No	No
Chi-Squared					
Deg. of freedom Statistic P-Value Rank	6 7.8995 0.24556 24				
α	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
Critical Value	8.5581	10.645	12.592	15.033	16.812
Reject?	No	No	No	No	No

وعلى ضوء ملائمة توزيع لوماكس للبيانات، فان منحني دالة كثافة الاحتمال والدالة التراكمية للتوزيع ستكون بالشكلين الآتيين:



شكل (5): منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع لوماكس للبيانات الحقيقية



شكل (6): منحنى دالة التوزيع التراكمية لتوزيع لوماكس للبيانات الحقيقية

تقدير دالة الموثوقية باستخدام طريقة المعاينة بطريقة DRSS

لغرض الحصول على عينة بحجم 96 من العينة الكلية في طريقة DRSS تم سحب m=4 مجاميع وتم تكرار العملية 24 مرة وكانت العينة المسحوبة كما يأتي:

جدول (6): مدة سكون المرض بالأشهر للعينة باستخدام DRSS

0.2	2.54	4.33	6.94	9.22	14.83
0.4	2.69	4.26	6.94	9.47	18.1
0.81	2.69	4.33	6.93	9.74	15.96
0.9	3.02	4.34	7.26	9.74	18.1
0.81	2.87	4.87	7.26	10.66	18.1
1.05	3.25	4.87	7.32	10.66	18.1
1.26	3.31	5.09	7.28	11.98	19.13
1.26	3.25	5.09	7.39	11.25	22.69
2.07	3.36	5.34	7.87	12.03	23.63
2.02	3.36	5.41	7.63	11.98	25.74
1.76	3.7	5.32	7.63	13.11	25.82
2.02	3.82	5.62	8.53	13.11	25.74
2.23	3.88	5.49	8.53	14.24	32.15
2.23	3.57	5.85	8.66	14.76	36.66
2.23	3.7	5.41	9.02	14.83	46.12
2.46	4.26	5.85	9.22	14.77	46.12

وقد تم تقدير معلمتي توزيع لوماكس باستخدام طريقة MLE لكونها أفضل طريقة في تجارب المحاكاة، وقد كانت النتائج قيم معلمتي $(\hat{\theta} = 7.466875;\ \hat{\beta} = 65.85926)$، وبناءً على هذه التقديرات تم تقدير دالة الموثوقية لهذا التوزيع، وكما يأتي:

$$\hat{R}(t) = \left(1 + \frac{t}{\hat{\beta}}\right)^{-\hat{\theta}} = \left(1 + \frac{t}{65.85926}\right)^{-7.466875}$$

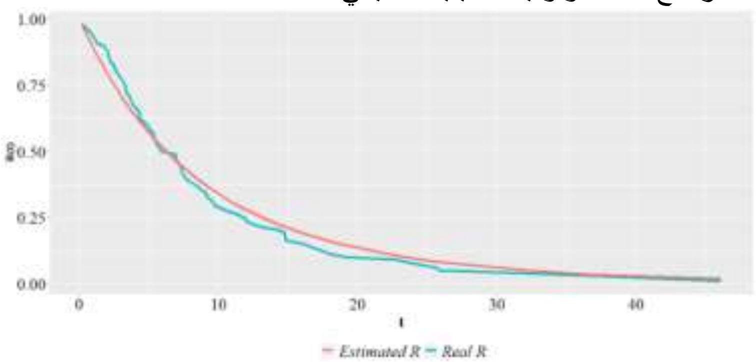
وبناءً على هذه المعادلة تم تقدير دالة الموثوقية عند أوقات البقاء للبيانات المدروسة وكما يأتي:

جدول (7): قيم دالة الموثوقية المقدرة بطريقة DRSS

t	$R(t)$	$\hat{R}(t)$	t	$R(t)$	$\hat{R}(t)$
0.2	0.9802	0.9769	6.93	0.49	0.4648
0.4	0.9698	0.9543	6.94	0.4696	0.4643
0.81	0.9494	0.91	7.26	0.4492	0.4491
0.9	0.9392	0.9006	7.28	0.439	0.4481
1.05	0.929	0.8851	7.32	0.4288	0.4463
1.26	0.9085	0.864	7.39	0.4185	0.443
1.76	0.8983	0.8161	7.63	0.3981	0.4322
2.02	0.8779	0.7924	7.87	0.3879	0.4216
2.07	0.8677	0.7879	8.53	0.3675	0.3941
2.23	0.8371	0.7738	8.66	0.3573	0.3889

2.46	0.8269	0.754	9.02	0.3471	0.375
2.54	0.8167	0.7473	9.22	0.3267	0.3675
2.69	0.7963	0.7348	9.47	0.3165	0.3584
2.87	0.786	0.7202	9.74	0.296	0.3488
3.02	0.7758	0.7082	10.66	0.2756	0.3184
3.25	0.7554	0.6904	11.25	0.2654	0.3005
3.31	0.7452	0.6858	11.98	0.245	0.2799
3.36	0.7248	0.682	12.03	0.2348	0.2786
3.57	0.7146	0.6664	13.11	0.2144	0.2512
3.7	0.6942	0.6569	14.24	0.2042	0.2258
3.82	0.684	0.6483	14.76	0.194	0.2152
3.88	0.6738	0.6441	14.77	0.1838	0.215
4.26	0.6533	0.6178	14.83	0.1633	0.2138
4.33	0.6329	0.6132	15.96	0.1531	0.1927
4.34	0.6227	0.6125	18.1	0.1123	0.1589
4.87	0.6023	0.5783	19.13	0.1021	0.1452
5.09	0.5819	0.5648	22.69	0.0919	0.1071
5.32	0.5717	0.551	23.63	0.0817	0.0991
5.34	0.5615	0.5498	25.74	0.0613	0.0834
5.41	0.541	0.5457	25.82	0.051	0.0829
5.49	0.5308	0.5411	32.15	0.0408	0.0508
5.62	0.5206	0.5336	36.66	0.0306	0.0366
5.85	0.5002	0.5207	46.12	0.0102	0.0193

وقد تم رسم دالة الموثوقية المقدرة مع دالة الموثوقية الحقيقية كما يأتي:



شكل (7): رسم دالة الموثوقية الحقيقية والتقديرية بناءً على طريقة DRSS

النتائج

1. في ضوء نتائج المحاكاة تبين بان الموثوقية تتناقص بزيادة أوقات البقاء مهما كان عدد المجموعات وعدد الدورات عند سحب العينة بطريقة RSS وطريقة DRSS .
2. في الجانب التطبيقي لوحظ بان الموثوقية بالشفاء من مرض سرطان المثانة تتناقص بزيادة أوقات المرضى بالمشفى باستخدام بروتوكول العلاج والتعافي.
3. باستخدام طريقة معاينة المجموعات المرتبة RSS وعند عدد مجموعات ودورات مختلفة ، وفي حالة كون المتغير العشوائي يتبع توزيع لوماكس فان طريقة الحد الأقصى لناتج المسافات MPS تعد افضل طرق التقدير مقارنة مع طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة المربعات الصغرى الموزونة في إعطائها افضل تقدير لدالة الموثوقية إذ تعتمد هذه الطريقة على اختيار عدد مفردات العينة من القيم الصغرى والقيم العظمى بشكل متساو في حالة العدد الزوجي للبيانات، فضلاً عن الى اختيارها الى قيم الوسيط في حالة العدد الفردي للبيانات.
4. إن أفضل طرائق تقدير لدالة الموثوقية لتوزيع لوماكس وعند عدد مجموعات ودورات مختلفة بالاعتماد على سحب العينة المرتبة بطريقة DRSS هي طريقة MLE .
5. نلاحظ ان كلما زاد حجم العينة بزيادة عدد المجاميع المختارة تتناقص قيم مجموع متوسط مربعات الخطأ وهذا ما يتطابق مع النظرية الإحصائية .

وعلى ضوء ذلك، يوصي البحث بدراسة موثوقية التوزيعات بالاعتماد على أساليب أخرى لسحب العينة كان تكون طريقة ERSS أو NRSS وغيرها من الطرق وتطبيقها على التوزيعات الاحتمالية .

المصادر

[1] McIntyre, G.A. (1952), "A Method for Unbiased Selective Sampling, Using Ranked Sets" , This article first appeared in the Australian Journal of Agricultural Research, 3, 385–390.

[2] Abu-Dayyeh W.A., Samawi, H.M. & Bani-Hani, L.A. (2002). "On Distribution Function Estimation Using Double Ranked Set Samples with Application". Journal of Modern Applied Statistical Methods, 1(2), Article 53.

[3] Abujiya, M.R. & Muttlak, H.A. (2004)." Quality Control Chart for the Mean using Double Ranked Set Sampling". Journal of Applied Statistics, 31(10), 1185–1201.

[4] Taconeli, C.A. & Bonat, W.H. (2019), "On the Performance of Estimation Methods under Ranked Set Sampling", doi: org/10.1007/s00180-020-00953-9.

[5] Al-Saleh, & Al-Kadiri (2000). “Double ranked set sampling”, Statistics and Probability Letters. 48(2), 205-212.

[6] Sabry, M.H. & Almetwally, E.M. (2021), "Estimation of the Exponential Pareto Distrbution's Parameters under Ranked and Double Ranked Set Sampling Designs", Pak.J.Stat.Oper.Res., 17(1), 169-184.

[7] Sabry, M.A., E. Muhammed, H,Z. Shaaban, M. & Nabih, A.E. (2020), "Parameter Estimation Based on Double Ranked Set Samples with Application to Weibull Distribution", Journal of Modern Applied Statistical Methods, 19(1), 3070.

[8] Oguntunde , P.E. Khaleel, M.A., Ahmed, M.T., Adejumo, A.O. & Odetunmibi, O.A. (2017). "A New Generalization of the Lomax Distribution with Increasing, Decreasing, and Constant Failure Rate", doi: org / 10.1155/2017/6043169.

[9] الباقر، زينب محمد باقر صادق (2017)، " تقدير دالة الموثوقية لتوزيع بواسون مع التطبيق العملي "، رسالة ماجستير، كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة كربلاء، العراق .

[10] Aziz, E.F.A. & Shaaban, M. (2021), "Om Maximum likelihood Estimators of the Parameters of three–Parameters Weibull Distribution Using Different Ranked Set Sampling Schemes", CRPASE, 7(2), 1-9.

[11] Almetwally, E.M. & Almongy, H.M. (2019), "Maximum Product Spacing and Bayesian Method for Parameter Estimation for Generalized Power Weibull Distribution Under Censoring Scheme", doi:10.6339/JDS.201904_17(2).

[12] Al-Omari, A.I. & Benchiha, S.A. & Almanjahie, I.M. (2021), "Efficient Estimation of the Generalized Quasi-Lindley Distribution Parameters under Ranked set sampling and Applications", Hindawi, Mathematical Problems in Engineering Volume 2021, Article ID 9982397,

[13] Rady, W.A. EL-Houssainy, A. Hassanein & Elhadad, T.A. (2016), "The Power Lomax Distribution with an Application to Bladder Cancer Data", doi: 10.1186/s40064-016-3464-y .

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences (2024); Issue 56; pp. 120-139

AL- Rafidain University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences

Available online at: https://www.jrucs.iq

JRUCS

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences

Estimating the Reliability of A Lomax Distribution Based on Double Ranked Set Sampling (DRSS) (With Application)

Musa M. Musa	Ban G. Al Ani
musa.9300@gmail.com	drbanalani@uomosul.edu.iq
Department of Statistics and Informatics, College of Computer Science and Mathematics, University of Mosul, Mosul, Iraq	

Article Information

Article History:
Received: February, 26, 2024
Accepted: April, 12, 2024
Available Online: December, 31, 2024

Keywords:
Double Ranked set Samplir (DRSS), Lomax Distributio Maximum likelihoo Maximum Product of Spacir estimator method (MPS).

Abstract

Sometimes it is difficult to obtain the data and information required for research for reasons that may be related to time and effort. In addition, in many applied issues, obtaining real measurements of the variable of interest may be very expensive. To solve these problems, the sampling method is used, which ensures that the researcher achieves research objectives with the least time, effort, and cost. One of the important sampling methods in this aspect is the Ranked Set Sampling (RSS) method. From this standpoint, the main goal of the research was to find the probability function of the Lomax distribution by estimating the scale and shape parameters, in addition to estimating the reliability function of the distribution. All of this will be done based on the Double Ranked Set Sampling (DRSS), using both estimation methods, which are the Maximum likelihood Estimation (MLE) and the Maximum Product Spacing (MPS). For the purpose of comparing the two estimation methods of the reliability function, the Monte-Carlo simulation method was used to generate data for the random variable that follows the Lomax distribution with the use of the statistical criterion represented by the mean square error (MSE). The research found that the (MLE) gives the best estimate of the reliability function of the Lomax distribution when using the (DRSS) method with different sample sizes and number of cycles. This has been proven through experimental results, as the larger the sample size, the better the estimation results, as the (MLE) method achieved a percentage of preference (72.22%). To demonstrate the importance of the topic from an applied and realistic perspective, real data was used on bladder cancer patients, in which the random variable represented the disease remission times in months (beginning of complete recovery), recorded from the time the patients entered the hospital until they left it. It was tested that the data follows a Lomax distribution using goodness of fit tests (Anderson-Darling, Kolmogorov-Smirnov and Chi-square). Using the (DRSS) method, a sample size of 96 was drawn from the total sample through four groups, and the process was repeated 24 times. Using the (MLE) method as the best way to estimate the reliability function, it was observed that the reliability of recovery from bladder cancer decreases with increasing patient stay times in the hospital when using Treatment and recovery protocol.

Correspondence:
Ban G. Al Ani
drbanalani@uomosul.edu.iq

DOI: https://doi.org/10.55562/jrucs.v56i1.11