

AL- Rafidain  
University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم

Available online at: <https://www.jrucs.iq>

JRUCS

Journal of AL-Rafidain  
University College  
for Sciences

## تقدير بعض نماذج الانحدار اللاخطي بتوظيف خوارزمية الحوت

|                                                                                    |                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| أ.د صباح منفي رضا                                                                  | م.م. زينب نهاد محمد الراوي                                                             |
| <a href="mailto:drsabah@codec.uobaghdad.edu.iq">drsabah@codec.uobaghdad.edu.iq</a> | <a href="mailto:Zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq">Zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq</a> |
| كلية الإدارة والاقتصاد، جامعة بغداد، بغداد، العراق                                 | مركز الحاسبة الالكترونية، جامعة بغداد، بغداد، العراق                                   |

## المستخلص

يعد انموذج الانحدار اللاخطي هو احد نماذج الانحدار عندما تكون العلاقة بين المتغيرات التفسيرية ومتغير الاستجابة لاخطية ، ويعتبر احد النماذج الأكثر شيوعا واستعمالا في تحليل تأثير المتغيرات التفسيرية على متغير الاستجابة، تم دراسة انموذجين من نماذج الانحدار اللاخطي وهي (MEYER) و (MEYER5) ، اذ تكمن مشكلة الدراسة بصعوبة الحصول على تقديرات معالم النماذج من طرائق كلاسيكية بصورة مباشرة لكونها لاخطية ، ولغرض الحصول على تقديرات دقيقة لمعاملات الانموذج تم استعمال الطرائق التقليدية بوصفها طرائق تكرارية وصولا الى تقدير لهذه المعلمات (طريقة المربعات الصغرى اللاخطية وطريقة الامكان الاعظم ) وتوظيفها باحدى خوارزميات الذكاء الاصطناعي وهي خوارزمية الحوت . ومن خلال استعمال اسلوب المحاكاة للمقارنة بين طرائق التقدير وباحجام عينات مختلفة ومن خلال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطا للحصول على افضل طريقة ، حيث اظهرت النتائج التي تم حصول عليها بان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية بتوظيف خوارزمية الحوت (NLSWOA) هي الافضل في كلا النموذجين.

## معلومات البحث

## تواريخ البحث:

تاريخ تقديم البحث: 28/3/2024  
تاريخ قبول البحث: 12/4/2024  
تاريخ رفع البحث على الموقع: 31/12/2024

## الكلمات المفتاحية:

الكلمات المفتاحية: انحدار اللاخطي، طريقة المربعات الصغرى اللاخطية، طريقة الامكان الاعظم ، خوارزمية الحوت.

## للمراسلة:

م.م. زينب نهاد محمد الراوي

[Zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq](mailto:Zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq)DOI: <https://doi.org/10.55562/jrucs.v56i1.16>

## 1. المقدمة

يعرف الانحدار بشكل عام بأنه تحليل العلاقة بين المتغيرات وهو احد الادوات الاحصائية الأكثر استعمالا لانه يعطينا طريقة لتحديد العلاقة بين المتغيرات، وان هذه العلاقة يمكن التعبير عنها بشكل معادلة تحتوي على متغير واحد يعرف بالمتغير التابع (متغير الاستجابة) مع واحد او اكثر من المتغيرات التوضيحية (التفسيرية) . او بمعنى اخر هو مجموعة الطرائق الاحصائية التي تتعامل مع الصيغ المختلفة للنماذج الرياضية لكونه اداة احصائية يقوم ببناء انموذج احصائي لتقدير العلاقة بين المتغير التابع وعدة متغيرات توضيحية (المستقلة) ، ينتج عنها معادلة احصائية توضح العلاقة بين المتغيرات ويمكن استخدام هذه المعادلة لغرض التقدير والتنبؤ بقيمة المتغير التابع باعتماد معلومات المتغيرات التوضيحية . ونماذج الانحدار هي على نوعين ، الاول هي نماذج الانحدار الخطية والذي يكون شكل العلاقة بين المتغيرات خطية اما نوع الثاني هي نماذج الانحدار اللاخطية وتكون العلاقة بين المتغيرات التفسيرية ومتغير الاستجابة هي غير خطية وتعد النماذج اللاخطية من الأدوات المهمة في تحليل الظواهر الطبيعية ويتم التطبيق لهذه النماذج في الظواهر الاقتصادية او البايولوجية او الطبية الحيوية.... الخ .

## 2. مشكلة وهدف البحث

تكمن مشكلة البحث بصعوبة الحصول على تقديرات للمعاملات. لذلك فان البحث يهدف بالحصول على تقديرات لهذه المعلمات لذا تم استعمال طرائق التقليدية طريقة المربعات الصغرى اللاخطية وطريقة الامكان الاعظم واحدى خوارزميات الذكاء الاصطناعي خوارزمية الحوت.

## 3. الجانب النظري

## 3.1. انموذج الانحدار اللاخطي [6]

انموذج الانحدار اللاخطي هو الانموذج الرياضي العام الذي يمثل العلاقة اللاخطية بين المتغيرات التفسيرية ومتغير الاستجابة مع معلمات غير معروفة ويكون بالشكل الاتي:

$$y_i = f(x_i; \beta) + \varepsilon_i \quad (1)$$

$y$  : هو متغير الاستجابة

$x_i$  : متجه للمتغيرات المستقلة

$\beta$  : هو متجه المعلمات المراد تقديرها

$\varepsilon_i$  : هو متجه الاخطاء العشوائية ، ومن المفترض ان الاخطاء تتوزع طبيعياً وتكون iid اي ان المتغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع بمتوسط صفر وتباين  $\sigma^2$  ، وقد تكون هذه الافتراضات غير صحيحة اي ان الاخطاء لا تتوزع طبيعياً . حيث تم في هذا البحث اخذ انموذجين من نماذج الانحدار اللاخطي وهي:

**1- انموذج (Meyer)**

$$y_i = \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} + \varepsilon_i \quad (2)$$

**2- انموذج (Meyer5)**

$$y_i = \beta_3 (\exp(-\beta_1 x_1) + \exp(-\beta_2 x_2)) + \varepsilon_i \quad (3)$$

### 3.2. طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least squares method

تعد طريقة المربعات الصغرى اللاخطية من اهم طرائق التقدير والاكثر شيوعاً لتقدير معلمات النماذج اللاخطية وتكتب بالصيغة الاتية [1], [3] :

$$\beta_{(k+1)} = \beta_k - (J_k)^{-1} * f_k \quad (4)$$

اذ ان :

$K$ : عدد مرات التكرار

$\beta_{(k+1)}$  : متجه من درجة  $(h*1)$  اذ ان  $h$  تمثل عدد المعلمات المقدرة

$f_k$ : متجه عمودي من المعادلات

$J_k$  : مصفوفة من المشتقات الجزئية

$\beta_k$ : متجه المعلمات الافتراضية ، عندما تكون  $k=1$  فهذا يعني ان المتجه سيكون بالقيمة الافتراضية الاولى ، وعندما يكون  $k=2$  فهذا يعني ان المتجه سيكون بالقيمة الافتراضية الجديدة والتي هي قيم المعلمات المقدرة في التكرار الثاني في حالة عدم تحقق شرط التوقف للتكرار :

$$|\beta_{(k+1)} - \beta_k| \leq 0.01$$

ويستمر التكرار وان قيم متجه المعلمات الافتراضية سوف تتغير الى ان يتحقق شرط او نتوقف عند قيمة معينة للمعلمات المقدرة بحيث لانستطيع الاستمرار بالتكرار وذلك بسبب محدد مصفوفة المعلمات المقدرة يصل الى الصفر .  
ان هدف طريقة المربعات الصغرى هو ايجاد او اختيار المقدر الذي يجعل مجموع مربعات البواقي اقل ما يمكن وحسب المعادلة التالية:

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; \beta))^2 \quad (5)$$

لذلك عند اشتقاق  $Q$  بالنسبة للمعلمات تنتج معادلات بعدد المعلمات في الانموذج ، لذلك عند ايجاد الصف الاول لمصفوفة  $J_K$  يجب اشتقاق المعادلة الاولى بالنسبة الى جميع المعلمات في الانموذج وعند ايجاد الصف الثاني يجب اشتقاق المعادلة الثانية بالنسبة الى جميع المعلمات وهكذا الى ان نصل الى صف الاخير ولايجاد الصيغة العامة للمعلمات المقدرة بالنسبة للنماذج اللاخطية التي سوف يتم استعمالها في هذا البحث

#### 1. طريقة المربعات الصغرى اللاخطية للنموذج (Meyer)

عند ايجاد الصيغة العامة للمعلمات المقدرة بالنسبة للنموذج الاول يتوجب علينا عرض مجموع مربعات الخطأ لهذا النموذج من المعادلة (5) والذي يكون كالآتي :

$$Q = \sum_{i=1}^n \left[ y_i - \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} \right]^2 \quad (6)$$

لذلك فان المعادلة (4) تصبح بالشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial k_1}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial k_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial k_2}{\partial \beta_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} \quad (7)$$

متجه المعلمات الاولى  $\begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \end{pmatrix}$  وان

$$\begin{aligned} k_1 = \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} &= -2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} \right) * \frac{x_1}{1 + \beta_2 x_2} \\ &= -2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{y_i x_1}{1 + \beta_2 x_2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} k_2 = \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} &= 2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} \right) * \frac{\beta_1 x_1 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \\ &= 2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{y_i \beta_1 x_1 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

من معادلة (8) نحصل على:

$$\frac{\partial k_1}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial \beta_2} &= -2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{-x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \frac{2 \beta_1 x_1^2 x_2 (1 + \beta_2 x_2)}{(1 + \beta_2 x_2)^4} \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} + 4 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2 x_2 (1 + \beta_2 x_2)}{(1 + \beta_2 x_2)^4} \end{aligned} \quad (11)$$

من معادلة (9) نحصل على:

$$\frac{\partial k_2}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n \frac{x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - 4 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_2}{\partial \beta_2} &= 2 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{-\beta_1 x_1 x_2^2 y_i * 2(1 + \beta_2 x_2)}{(1 + \beta_2 x_2)^4} - \sum_{i=1}^n \frac{-\beta_1^2 x_1^2 x_2^2 * 3(1 + \beta_2 x_2)^2}{(1 + \beta_2 x_2)^6} \right] \\ &= 6 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1^2 x_2^2}{(1 + \beta_2 x_2)^4} - 4 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1 x_2^2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

## 2. طريقة المربعات الصغرى للنموذج (Meyer 5)

$$Q = \sum_{i=1}^n [y_i - \beta_3 (e^{-\beta_1 x_1} + e^{-\beta_2 x_2})]^2 \quad (14)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial k_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial k_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial k_1}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial k_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial k_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial k_2}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial k_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial k_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial k_3}{\partial \beta_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_3} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$k_1 = \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i \beta_3 x_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (16)$$

$$k_2 = \frac{\partial Q}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i \beta_3 x_2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \beta_3^2 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}] \quad (17)$$

$$k_3 = \frac{\partial Q}{\partial \beta_3} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i (e^{-\beta_1 x_1} + e^{-\beta_2 x_2}) - \beta_3 (e^{-2\beta_1 x_1} + e^{-2\beta_2 x_2}) - 2\beta_3 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (18)$$

من معادلة (16) نحصل على

$$\frac{\partial k_1}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i \beta_3 x_1^2 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3^2 x_1^2 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1^2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (19)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{i=1}^n [\beta_3^2 x_1 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (20)$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial \beta_3} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i x_1 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (21)$$

من معادلة (17) نحصل على

$$\frac{\partial k_2}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n [\beta_3^2 x_1 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (22)$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial \beta_2} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i \beta_3 x_2^2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2^2 e^{-(\beta_1 x_1)} - 2\beta_3^2 x_2^2 e^{-2\beta_2 x_2}] \quad (23)$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial \beta_3} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i x_2 e^{-\beta_2 x_2} - 2\beta_3 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - 2\beta_3 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}] \quad (24)$$

من معادلة (18) نحصل على:

$$\frac{\partial k_3}{\partial \beta_1} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i x_1 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}] \quad (25)$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial \beta_2} = 2 \sum_{i=1}^n [y_i x_2 e^{-\beta_2 x_2} - 2\beta_3 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - 2\beta_3 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}] \quad (26)$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial \beta_3} = 2 \sum_{i=1}^n [e^{-2\beta_1 x_1} + 2e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} + e^{-2\beta_2 x_2}] \quad (27)$$

### 3.3 طريقة الامكان الاعظم (Maximum likelihood Method)

هي احدى الطرائق التقليدية للتقدير، وتعد من الطرائق المهمة والمستخدمة على نطاق واسع لانها تحتوي على خصائص مميزة وجيدة مثل الاستقرار (inversion) والاتساق (consistency) وعدم التحيز (unbiased). ودالة الامكان الاعظم تكتب بالشكل التالي [3]:

$$L = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; \beta))^2}{2\sigma^2}} \quad (28)$$

وبإدخال  $\ln$  على دالة الامكان تنتج المعادلة التالية:

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i; \beta))^2}{2\sigma^2} \quad (29)$$

وفيما يلي سوف يتم توضيح الاشتقاق التي يتم من خلالها إيجاد مقدرات (mle) لمعاملات النماذج اللاخطية التي سوف يتم استعمالها في هذا البحث

**1- طريقة الامكان الاعظم بالنسبة للنموذج (Meyer) وبتطبيق الصيغة (4) نحصل على:**

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} \right)^2}{2\sigma^2} \quad (30)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_1}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_2}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \beta_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_3} \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} A_1 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} &= \frac{-1}{2\sigma^2} * 2 \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{(1 + \beta_2 x_2)} \right) * \frac{-x_1}{(1 + \beta_2 x_2)} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_1 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A_2 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} &= -\frac{1}{2\sigma^2} * \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{(1 + \beta_2 x_2)} \right) * \frac{-\beta_1 x_1 * x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \right] \end{aligned} \quad (33)$$

$$A_3 = \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^2} \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{(1 + \beta_2 x_2)} \right)^2 \quad (34)$$

من معادلة (32) نحصل على

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \quad (35)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \frac{2\beta_1 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} - \sum_{i=1}^n \frac{x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} \right] \quad (36)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_1 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)} \right] \quad (37)$$

من معادلة (33) نحصل على

$$\frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \right] \quad (38)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2} \left[ 3 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1 x_2^2}{(1 + \beta_2 x_2)^4} - 2 \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1 x_2^2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \right] \quad (39)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \right] \quad (40)$$

من معادلة (34) نحصل على

$$\frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1^2}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{x_1 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)} \right] \quad (41)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^4} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1 x_1 x_2 y_i}{(1 + \beta_2 x_2)^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\beta_1^2 x_1^2 x_2}{(1 + \beta_2 x_2)^3} \right] \quad (42)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^6} \left( y_i - \frac{\beta_1 x_1}{1 + \beta_2 x_2} \right)^2 \quad (43)$$

## 2- طريقة الامكان الاعظم للنموذج (Meyer5)

$$\ln L = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \beta_3 (e^{-\beta_1 x_1} + e^{-\beta_2 x_2}))^2}{2\sigma^2} \quad (44)$$

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \\ \hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{10} \\ \beta_{20} \\ \beta_{30} \\ \sigma_0^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_1}{\partial \beta_3} & \frac{\partial A_1}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_2}{\partial \beta_3} & \frac{\partial A_2}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_3}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_3}{\partial \beta_3} & \frac{\partial A_3}{\partial \sigma^2} \\ \frac{\partial A_4}{\partial \beta_1} & \frac{\partial A_4}{\partial \beta_2} & \frac{\partial A_4}{\partial \beta_3} & \frac{\partial A_4}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_3} \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} \end{pmatrix} \quad (45)$$

$$A_1 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (46)$$

$$A_2 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \beta_3^2 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (47)$$

$$A_3 = \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_3} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i (e^{-\beta_1 x_1} + e^{-\beta_2 x_2}) - \beta_3 (e^{-2\beta_1 x_1} + e^{-2\beta_2 x_2}) - 2\beta_3 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (48)$$

$$A_4 = \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^4} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sigma^4} (y_i - \beta_3 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3 e^{-\beta_2 x_2})^2 \quad (49)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_1^2 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3^2 x_1^2 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1^2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (50)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\beta_3^2 x_1 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (51)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \beta_3} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i x_1 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - 2\beta_3 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (52)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (53)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (\beta_3^2 x_1 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (54)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_2^2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2^2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - 2\beta_3^2 x_2^2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (55)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \beta_3} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i x_2 e^{-\beta_2 x_2} - 2\beta_3 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - 2\beta_3 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (56)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \beta_3^2 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (57)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i x_1 e^{-\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - 2\beta_3 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (58)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i x_2 e^{-\beta_2 x_2} - 2\beta_3 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - 2\beta_3 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (59)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \beta_3} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (e^{-2\beta_1 x_1} - 2e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (60)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i (e^{-\beta_1 x_1} + e^{-\beta_2 x_2}) - \beta_3 (e^{-2\beta_1 x_1} + e^{-2\beta_2 x_2}) - 2\beta_3 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (61)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_1 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-2\beta_1 x_1} - \beta_3^2 x_1 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)}) \quad (62)$$

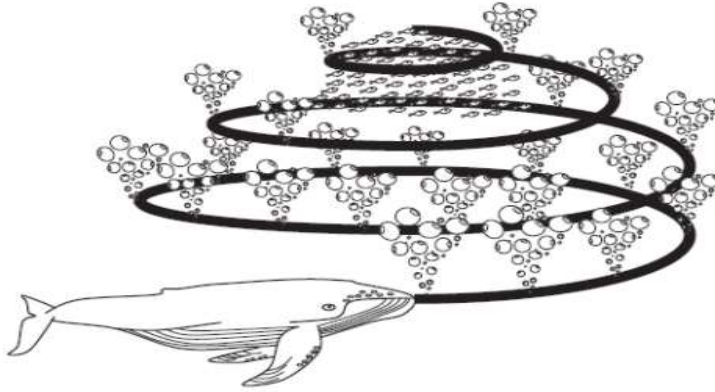
$$\frac{\partial A_4}{\partial \beta_2} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i \beta_3 x_2 e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3^2 x_2 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \beta_3^2 x_2 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (63)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial \beta_3} = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (y_i e^{-\beta_1 x_1} + y_i e^{-\beta_2 x_2} - \beta_3 e^{-2\beta_2 x_2} - 2\beta_3 e^{-(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2)} - \beta_3 e^{-2\beta_2 x_2}) \quad (64)$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial \sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma^6} (y_i - \beta_3 e^{-\beta_1 x_1} - \beta_3 e^{-\beta_2 x_2})^2 \quad (65)$$

#### 4. خوارزمية تحسين الحوت (WOA) Whale Optimization Algorithm

خوارزمية تحسين الحيتان (WOA) تقنية جديدة اقترحها (Mirjalili and Lewis) في عام 2016 وهي مستوحاة من الطبيعة التي تحاكي سلوك الصيد الفريد للحيتان الحدباء للبحث عن الطعام ، الحيتان مخلوقات عجيبة وهي تعد من اكبر الثدييات في العالم حيث يمكن ان يصل طول الحوت البالغ (30 مترا) ووزنه (180 طنا)، وهناك سبعة انواع مختلفة من هذه الحيتان مثل (Blue and Finback Right , Humpback, Minke, Sei , killer)، وتعتبر الحيتان من الحيوانات المفترسة التي لا ينامون ابدا لانهم مضطرين للتنفس من سطح الماء وفي الواقع ان نصف الدماغ هو فقط ينام، حقيقة اخرى مثيرة للاهتمام حول الحيتان هو سلوكهم الاجتماعي حيث تعيش الحيتان بمفردهم او في مجموعات، وغالبا يتم مشاهدتها في مجموعات، ومن اكبر انواع الحيتان هي حيتان الحدباء حيث يكون حجمها تقريبا حجم حافلة المدرسية وان فرائسهم المفضلة هي (krill) والاسماك الصغيرة، ومن المثير للاهتمام هو طريقة الصيد الخاصة بهم (تسمى سلوك البحث عن الطعام بطريقة التغذية بالشبكة الفقاعية)، حيث تغوص الحيتان حوالي 12 مترا ثم تبدأ بتكوين فقاعات على طول دائرة او مسار حلزوني على شكل رقم (9) حول الفريسة وتسبح نحو السطح [2], [4], [5]. وكما هو موضح في الشكل (1):



شكل (1): يوضح سلوك تغذية شبكة الفقاعات للحيتان الحدباء

حيث ان النموذج الرياضي لخوارزمية تحسين الحوت (WOA) يمكن توضيحه وفق الفقرات الآتية :

##### 1- تطويق الفريسة (Encircling prey)

يمكن للحيتان الحدباء التعرف على موقع الفريسة والاحاطة بها ، بالنظر الى ان موقع التصميم الامثل في مساحة البحث غير معروف سابقا، تفترض خوارزمية WOA ان افضل حل مرشح حاليا هو الفريسة المستهدفة او القريب من الحل الامثل بعد تحديد افضل عامل بحث، سيحاول عوامل البحث الآخرون بالتالي تحديث مواقعهم نحو افضل عامل بحث ، ويتم تمثيل هذا السلوك رياضيا بالمعادلات التالية:

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \quad (66)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}^*(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (67)$$

اذ ان :

t تمثل التكرار الحالي

$X^*$  يمثل متجه الموقع الافضل حل تم الحصول عليه لحد الان

$X$  يمثل متجه الموقع

$\vec{A}$  و  $\vec{C}$  تشير الى متجه المعاملات وتحسب من خلال المعادلات التالية:

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r} - \vec{a} \quad (68)$$

$$\vec{C} = 2 \cdot \vec{r} \quad (69)$$

اذ ان  $\vec{a}$  معلمة التحكم في المسافة تتناقص خطيا من 2 الى 0 على مدى التكرارات (في كل من مرحلة الاستكشاف والاستغلال) وتحسب من خلال المعادلة التالية:

$$\vec{a}(t) = 2 - 2 \frac{t}{t_{max}} \quad (70)$$

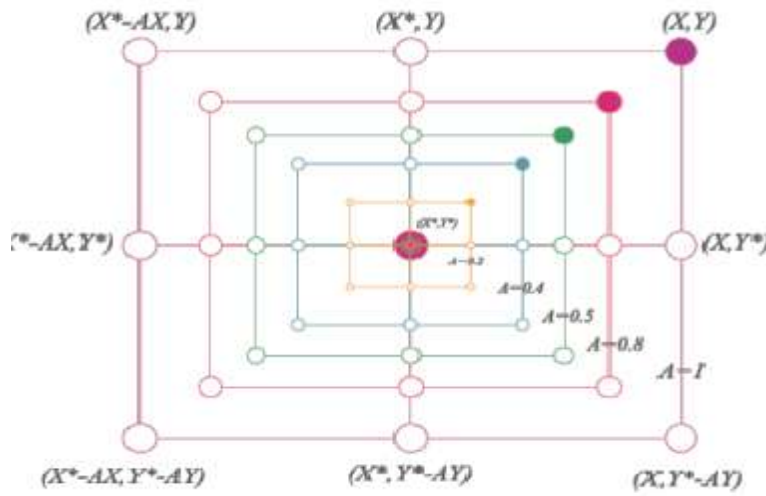
حيث يشير  $t_{max}$  الى حد الاقصى لعدد التكرارات ،وان  $\vec{r}$  متجه عشوائي ياخذ القيم  $[0,1]$ . ومن جدير بالذكر ان  $X^*$  يجب تحديثها في كل تكرار اذا كان هنالك حل افضل .

## 2- طريقة مهاجمة شبكه الفقاعات وتسمى مرحلة الاستغلال

تم تصميم طريقتين من اجل تمثيل سلوك الحيتان الحذاء رياضياً

### • تقليص الية التطويق (Shrinking encircling mechanism)

يتم تحقيق هذا السلوك من خلال تقليل قيمة  $\vec{a}$  في معادلة رقم (68) مع ملاحظة ان نطاق تذبذب  $\vec{A}$  ايضا ينخفض بمقدار  $\vec{a}$  ، بعبارة اخرى ان  $\vec{A}$  هي قيمة عشوائية في الفترة  $[-a, a]$  حيث يتم تقليل  $a$  من 2 الى 0 خلال مسار التكرار. تحديد قيم عشوائية لـ  $\vec{A}$  في  $[-1,1]$  يمكن تحديد الموقع الجديد لعامل البحث في اي مكان بين الموضع الاصلي للعامل ومنصب افضل عامل حالي ، والشكل التالي (2) يوضح الموضع المحتملة من  $(X,Y)$  الى  $(X^*, Y^*)$  التي يمكن تحقيقها بواسطة  $0 \leq A \leq 1$ .



شكل (2): تقليص الية التطويق

### • موقف التحديث الحلزوني

يحسب هذا الاسلوب اولا المسافة بين الحوت الموجود في  $(X, Y)$  والفريسة الموجودة في  $(X^*, Y^*)$  ثم يتم انشاء معادلة حلزونية بين موقع الحوت والفريسة لتقليد الحركة الحلزونية الشكل للحيتان الحذاء كما يلي:

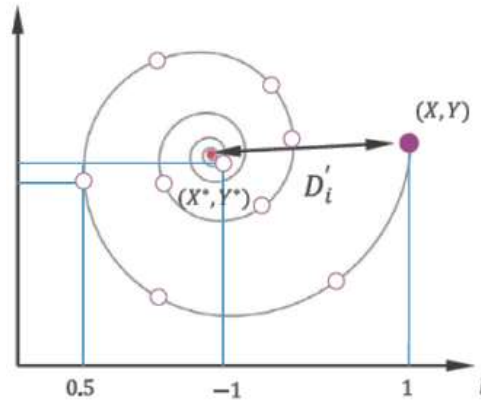
$$\vec{X}(t+1) = \vec{D} \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + \vec{X}^*(t) \quad (71)$$

اذ ان  $\vec{D}$  تشير الى المسافة بين  $i$  من الحيتان الى الفريسة (افضل حل تم الحصول عليه)

$$\vec{D} = |\vec{X}^*(t) - \vec{X}(t)| \quad (72)$$

وان  $b$  تشير الى ثابت لتحديد شكل الدوامة اللوغارتمية

$l$  رقم عشوائي في الفترة  $[-1,1]$  والشكل التالي (3) يوضح موقف تحديث الحلزوني



شكل (3): موقف التحديث الحلزوني

لوحظ ان الحيتان الحذباء تسبح حول الفريسة داخل دائرة متقلصة وعلى طول مسار حلزوني الشكل في وقت واحد، ولنمذجة هذا السلوك المتزامن نفترض ان هنالك احتمال 50% للاختيار بين الية التطويق او النموذج الحلزوني لتحديث موقع الحيتان اثناء التحسين وحسب الصيغة التالية :

$$\vec{X}(t+1) = \begin{cases} \vec{X}(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} & \text{if } p \leq 0.5 \\ \vec{D} \cdot e^{bl} \cdot \cos(2\pi l) + \vec{X}^*(t) & \text{if } p \geq 0.5 \end{cases} \quad (73)$$

اذ ان  $p$  رقم عشوائي في الفترة  $[0,1]$

### 3- البحث عن الفريسة (مرحلة الاستكشاف) Search for prey (exploration phase)

تبحث الحيتان الحذباء بشكل عشوائي عن الفريسة تبعاً لموقع كل منها ، لذلك نستخدم ( $\vec{A}$ ) قيم عشوائية اكبر من 1 او اقل من 1- لاجبار عامل البحث على الابتعاد عن الحوت. على عكس مرحلة الاستغلال نقوم بتحديث موقع عامل البحث في مرحلة الاستكشاف وفقاً لعامل بحث تم اختياره عشوائياً بدلاً من افضل عامل بحث تم الحصول عليه حتى الان ، تؤكد هذه الالية و  $|\vec{A}| > 1$  على الاستكشاف والسماح لخوارزمية WOA بأجراء بحث شامل والنموذج الرياضي كما يلي:

$$\vec{D} = \left| \vec{C} \cdot \vec{X}_{rand} - \vec{X} \right| \quad (74)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_{rand} - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (75)$$

اذ ان  $\vec{X}_{rand}$  يمثل متجه الموقع العشوائي (حوت العشوائي) والذي يتم اختياره من المجتمع الحالي

### 5. جانب المحاكاة

يمكن تعريف المحاكاة بانها تقنية عددية تستخدم الحاسوب وتتضمن علاقات منطقية ورياضية للحصول على بيانات تجريبية من الواقع الحقيقي، وفي بعض الاحيان، عند فشل جميع الاساليب المستخدمة لحل مشكلة معينة تعتبر المحاكاة الطريقة الامثل للحل. شهدت المحاكاة تطوراً كبيراً في الآونة الاخيرة بفضل تطور البرمجيات والحاسوب مما جعلها احد الادوات الأكثر قبولا واستخداماً على نطاق واسع في تحليل النظم . هناك عدة انواع من المحاكاة ومن بينها تلك التي تعتمد على بيانات المشكلة المدروسة وتسمى المحاكاة المقيدة. تقوم عملية المحاكاة بتوليد الارقام العشوائية باستخدام توزيع المنتظم  $u(0,1)$  وبالاعتماد على هذه الارقام يتم توليد المتغيرات العشوائية وفقاً لتوزيع معين. وهناك عدة طرق لتوليد هذه المتغيرات، تتنوع طرق التوليف البسيطة الى الطرق الأكثر تعقيداً مثل طريقة المونتوكارلو وطريقة انتقاء العينات، وبعد ذلك يتم توليد الاخطاء التي تتبع توزيع معين ومن ثم يتم توليد متغير الاستجابة من خلال عدة نماذج تم تصميمها لهذا الغرض واخيراً يتم تكرار تجربة المحاكاة باستعمال (برنامج الماتلاب) عدة مرات للحصول على بيانات تجريبية تقترب من الواقع. الجداول الاتية توضح الطرائق المستعملة:

جدول (1): تقدير معلمات نموذج MEYER

| N   | parameter | NLS   | MLE   | NLSWOA | MLEWOA |
|-----|-----------|-------|-------|--------|--------|
| 50  | $\beta_1$ | 0.125 | 0.367 | 0.554  | 0.672  |
|     | $\beta_2$ | 0.223 | 0.149 | 0.472  | 0.521  |
| 100 | $\beta_1$ | 0.649 | 0.669 | 0.951  | 0.358  |
|     | $\beta_2$ | 0.495 | 0.586 | 0.864  | 0.972  |
| 150 | $\beta_1$ | 0.775 | 0.996 | 0.665  | 0.788  |
|     | $\beta_2$ | 0.856 | 0.859 | 0.357  | 0.899  |

يوضح الجدول اعلاه تقدير معلمات النموذج MEYER للطرائق المستعملة وباحجام عينات مختلفة.

**جدول (2): MSE لنموذج MEYER**

| N   | NLS     | MLE     | NLSWOA  | MLEWOA  | BEST   |
|-----|---------|---------|---------|---------|--------|
| 50  | 0.85423 | 5.36589 | 0.00236 | 0.22581 | NLSWOA |
| 100 | 0.45221 | 2.55771 | 0.00110 | 0.03566 | NLSWOA |
| 150 | 0.32658 | 0.99873 | 0.00054 | 0.02144 | NLSWOA |

يبين الجدول اعلاه نتائج محاكاة (MSE) للطرائق المستعملة لنموذج MEYER اذ تبين ان توظيف طريقة المربعات الصغرى اللاخطية NLSWOA تعطي نتائج افضل و ادق في مختلف احجام العينات.

**جدول (3): تقدير معلمات نموذج MEYER5**

| N   | parameter | NLS    | MLE    | NLSWOA | MLEWOA |
|-----|-----------|--------|--------|--------|--------|
| 50  | $\beta_1$ | 0.221  | 0.356  | 0.747  | 0.105  |
|     | $\beta_2$ | 0.563  | 0.332  | 0.889  | 0.557  |
|     | $\beta_3$ | -0.021 | -0.522 | -0.033 | -0.930 |
| 100 | $\beta_1$ | 0.625  | 0.306  | 0.630  | 0.972  |
|     | $\beta_2$ | 0.203  | 0.600  | 0.850  | 0.889  |
|     | $\beta_3$ | -0.321 | -0.749 | -0.991 | -0.708 |
| 150 | $\beta_1$ | 0.332  | 0.667  | 0.508  | 0.397  |
|     | $\beta_2$ | 0.749  | 0.778  | 0.025  | 0.854  |
|     | $\beta_3$ | 0.036  | 0.963  | 0.307  | 0.943  |

يوضح الجدول اعلاه تقدير معلمات النموذج MEYER5 للطرائق المستعملة وباحجام عينات مختلفة.

**جدول (4): MSE لنموذج MEYER5**

| N   | NLS     | MLE     | NLSWOA  | MLEWOA  | BEST   |
|-----|---------|---------|---------|---------|--------|
| 50  | 3.25866 | 6.33669 | 0.03256 | 0.42389 | NLSWOA |
| 100 | 0.98732 | 4.54221 | 0.00178 | 0.02577 | NLSWOA |
| 150 | 0.12222 | 1.00358 | 0.00089 | 0.00333 | NLSWOA |

يبين الجدول اعلاه نتائج محاكاة (MSE) للطرائق المستعملة لنموذج MEYER5 اذ تبين ان توظيف طريقة المربعات الصغرى اللاخطية NLSWOA تعطي نتائج افضل ادق في مختلف احجام العينات. اذ ظهر تفوق الطريقة في كلا النموذجين.

## 6. الاستنتاجات

من خلال استعمال طرائق التقدير اللاخطية تبين ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية هي الافضل ، وكذلك اظهرت النتائج بان خوارزمية الحوت المستندة على طريقة المربعات الصغرى اللاخطية هي الافضل من بين جميع الطرائق وبكافة حجوم العينات ولكلا النموذجين .

## المصادر

- [1] Al Marsoomi, I. M., & Aboudi, E. H. (2020). Comparing traditional estimators and the estimators of (PSO) algorithm for some growth models of gross domestic product in Iraq. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(1), 491-507.
- [2] Brodzicki, A., Piekarski, M., & Jaworek-Korjakowska, J. (2021). The whale optimization algorithm approach for deep neural networks. Sensors, 21(23), 8003.
- [3] Lazem, J. H & Reza, S.M (2018). Comparison of Some Artificial Intelligence Algorithms with the Two Non-Linear Least Squares Method and the Maximum Likelihood Method of Estimating the Ratkowsky Model Using Simulation. Al-Rafidain University College For Sciences, (43).
- [4] Mirjalili, S., & Lewis, A. (2016). The whale optimization algorithm. Advances in engineering software, 95, 51-67.
- [5] Zhong, M., & Long, W. (2017). Whale optimization algorithm with nonlinear control parameter. In MATEC Web of Conferences (Vol. 139, p. 00157). EDP Sciences.
- [6] Özsoy, V. S., & Örkçü, H. H. (2016). Estimating the parameters of nonlinear regression models through particle swarm optimization. Gazi university journal of science, 29(1), 187-199.



AL- Rafidain  
University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

**Journal of AL-Rafidain  
University College for Sciences**

Available online at: <https://www.jrucs.iq>

**JRUCS**

Journal of AL-Rafidain  
University College  
for Sciences

## Estimating Some Nonlinear Regression Models by Employing the Whale Algorithm

|                                                                                                                      |                                                                                                                            |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Prof. Dr. Sabah M. Reda</b><br><a href="mailto:drsabah@codec.uobaghdad.edu.iq">drsabah@codec.uobaghdad.edu.iq</a> | <b>Zainab N. Mohammed ALrawi</b><br><a href="mailto:zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq">zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq</a> |
| College of Administration and Economy,<br>University of Baghdad, Baghdad, Iraq                                       | Computer Center, University of Baghdad,<br>Baghdad, Iraq                                                                   |

### Article Information

#### Article History:

Received: March, 28, 2024

Accepted: April, 12, 2024

Available Online: December, 31, 2024

#### Keywords:

Nonlinear regression, nonlinear least squares method, maximum likelihood method, whale algorithm.

#### Correspondence:

Zainab N. Mohammed ALrawi

[zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq](mailto:zainab.nihad@cc.uobaghdad.edu.iq)

DOI: <https://doi.org/10.55562/jrucs.v56i1.16>

### Abstract

*The nonlinear regression model is one of the regression models used when the relationship between explanatory variables and the response variable is nonlinear. It is considered one of the most common and widely used models in analyzing the impact of explanatory variables on the response variable. Two nonlinear regression models, MEYER and MEYER5, were studied. The study's problem lies in the difficulty of obtaining parameter estimates of the models directly using classical methods because they are nonlinear. To obtain accurate parameter estimates, traditional methods were used as iterative methods to estimate these parameters (nonlinear least squares method and maximum likelihood method) and employed one of the artificial intelligence algorithms, the Whale Optimization Algorithm (WOA). Using simulation techniques to compare estimation methods with different sample sizes and the mean squared error criterion to obtain the best method, the results showed that the nonlinear least squares method employing the Whale Optimization Algorithm (NLSWOA) is the best for both models.*