مقارنة بعض طرائق تقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيع Birnbaum-Saunders ذو المعلمتين باستخدام المحاكاة

أ.م.د. تهاني مهدي عباس*   رشا إبراهيم محمد**

المستخلص:

في هذا البحث سيتم مقارنة طريقة العزوم (*Method of Moments*)، طريقة العزوم المحورة (*Modified Moments Method*) لتقدير معلمتي ودالة المعولية لتوزيع Birnbaum-Saunders مع طريقة مقترحة والمتمثلة بطريقة التقلص (Shrinkage Method) ، وتم استخدام أسلوب المحاكاة للمقارنة بين هذه الطرائق وباستخدام معيارين للمقارنة هما متوسط مربعات الخطأ (*MSE*)، متوسط الخطأ النسبي المطلق (*MAPE*) وقد تم التوصل إلى أفضلية طريقة التقلص (*Shrinkage Method*) في التقدير.

Abstract:

In this paper the researcher will compare the method of moments and method of moments modified to estimate the parameters and function reliability for the distribution of Birnbaum-Saunders with the method proposed is a method of shrinking, was used simulation to compare these methods and using two criteria for comparison are the average of squares error (MSE), the average error relative absolute (MAPE) and the average error squares integrative, has been a priority method of shrinking in the estimate.

المقدمة:

يعد توزيع (*Birnbaum-Saunders*) من التوزيعات المستمرة وقد اشتق هذا التوزيع كل من العالمين (*Birnbaum*) و (*Saunders*) عام (1969) ويسمى أحيانا بتوزيع الحياة (*Life Distribution*) و (*Fatigue Distribution*) . ويعد هذا التوزيع من أهم عوائل توزيعات الفشل في حالة الحمل الميكانيكي أو الحراري أو الالكتروني الواقع على الجهاز أو النظام.

هدف البحث : ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو مقارنة بعض طرائق تقدير معلمتي الشكل والقياس و دالة المعولية لتوزيع *Birnbaum-Saunders* بتوظيف اسلوب المحاكاة للوصول الى افضل الطرائق في التقدير باستخدام متوسط مربعات الخطأ (*MSE*) (*Mean Squared Error*) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق (*MAPE*)(*Mean Absolute Percentage Error*)

الجانب النظري

دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (*Birnbaum-Saunders*) ذي المعلمتين هي:

$$f(t;\alpha,\beta)=\frac{1}{2\alpha\beta\sqrt{2\pi}}\left[\left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2}+\left(\frac{\beta}{t}\right)^{3/2}\right]\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2}\left(\frac{t}{\beta}+\frac{\beta}{t}-2\right)\right] \quad \dots (1)$$

حيث أن: $0< t< \infty$ ، $\alpha, \beta>0$ ،

---

* جامعة بغداد / كلية الادارة والاقتصاد .
** باحثة .

مستل من رسالة ماجستير
مقبول للنشر بتأريخ 2013/4/22

$t \sim BS\,(\alpha,\beta)$

حيث أن :

α: معلمة الشكل (*Shape Parameter*)

β: معلمة القياس (*Scale Parameter*)

ويمكن كتابة الصيغة رقم (1) على شكل خليط من دالتين:

f_1(t; α, β) , f_2 (t; α, β)

وبنسب متساوية أي:

$$f(t;\ \alpha,\beta) = \frac{1}{2} f_1(t;\ \alpha,\beta) + \frac{1}{2} f_2(t;\ \alpha,\beta)$$

حيث أن:

$$f_1(t;\ \alpha,\beta) = (\frac{\alpha^{-2}\beta}{2\pi\, t^3})^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2\beta}(t - 2\beta + \beta^2 t^{-1})\right] \qquad .....(2)$$

$$f_2(t;\ \alpha,\beta) = (\frac{\alpha^{-2}\beta^{-1}}{2\pi\, t})^{1/2} exp[\frac{-\beta}{2\alpha^2}(t^{-1} - 2\beta^{-1} + \beta^{-2}t)] \qquad .....(3)$$

حيث أن الصيغة رقم (2) تمثل دالة (*Inverse Gaussian*) أي:

$$g(t;\mu,\lambda) = (\frac{\lambda}{2\pi t^3})^{1/2} \exp[\frac{\lambda\,(t-\mu)^2}{2\mu^2 t}]$$

حيث أن:

t, λ, μ>0 , μ=β , $\lambda=\alpha^{-2}\beta$

فإذا كان: $T \sim IG\,(\mu,\lambda)$

وكان: $\acute{T} \sim IG\,(\mu^{-1},\lambda)$

$$S = (\acute{T})^{-1}$$

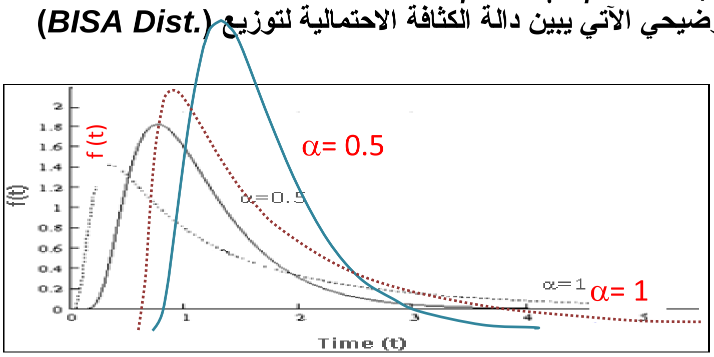
$$\therefore h(S;\mu,\lambda) = g(s^{-1};\mu^{-1},\lambda)\left|\frac{\partial \acute{t}}{\partial s}\right|$$

$$= (\frac{\lambda}{2\pi s})^{1/2} \exp\left[\frac{-\lambda(S-\mu)^2}{2s}\right]$$

حيث أن: S, λ, μ>0 وأن : μ=β & $\lambda=\alpha^{-2}\beta^{-1}$

والمخطط التوضيحي الآتي يبين دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع (*BISA Dist.*)

عندما β=1



(1) ش Time (t)

كما يمكن إيجاد دالة التوزيع التجميعية (*c.d.f*) وكما يأتي:

$$F_T(t) = P(T \le t)$$

$$= \int_0^t f_T(u)du$$

$$= gauf\left[\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{1/2}\right]\right] \qquad .....(4)$$

حيث أن: t, α, β>0

gauf: تمثل قيمة جدولية المقابلة للدالة التجميعية للتوزيع الطبيعي القياسي (*Standard Normal Dist.*)
وبذلك يمكن إيجاد دالة المعولية لهذا التوزيع وكما يأتي:

$$R(t) = \int_t^{\infty} f_T(u)\,du$$
$$= 1 - F_T(t)$$

$$gauf\left[\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{\beta}\right)^{-1/2}\right]\right] \quad .....(5)$$

حيث أن:
t, α, β>0

كما أن متوسط وقت الفشل (*MTTF*) لهذا التوزيع هو :

$$\int_0^{\infty} R(t)\,dt$$
$$= E(t)$$
$$= \int_0^{\infty} t\, f_T(t)\,dt$$
$$MTTF = \beta\left(1 + \frac{\alpha^2}{2}\right) \quad .....(6)$$

طرائق التقدير لمعلمتي توزيع *Birnbaum-Saunders* :

هناك عدة طرائق لتقدير معلمتي أنموذج (*Birnbaum-Saunders*) ودالة المعولية التقريبية وفي هذا البحث سنستند على طريقتي العزوم والعزوم المعدلة فضلاً عن طريقة مقترحة من قبلنا والمتمثلة بالدمج بين الطريقتين السابقتين عن طريق استخدام مقدر التقلص.

1. طريقة العزوم[1] [4] : *Method of Moments*

تعد هذه الطريقة من الطرائق الشائعة الاستخدام في حقل تقدير المعلمات، إذ أنها تتصف بسهولتها ومبدأ هذه الطريقة هي تقدير عزوم المجتمع (M_j) التي تكون مجهولة القيمة بواسطة عزوم العينة ($\widehat{M}_j$) والتي تكون معلومة القيمة ومساواتهم وايجاد صيغة تقديرية للمعلمات، أي أن بصيغة عامة:

$$M_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K) = \widehat{M}_j(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

إذ أن: J=1,2, …., k
حيث أن: K تمثل عدد المعلمات
وأن:

$$M_j(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K) = E(X_j)$$
$$\widehat{M}_j(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Xi$$

ولإيجاد مقدر المعلمة (β) لتوزيع (*Birnbaum- Saunders*) بهذه الطريقة فكالآتي:

$$\mu_1(\beta) = \widehat{M}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

أي أن:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi$$
$$\hat{\mu} = \overline{X}$$

وبالمقارنة مع العزم الأول الخاص بالتوزيع المفترض نحصل على:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\right) + 1/2}{\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\right)^2} \qquad ...(7)$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\frac{1}{\alpha^2} + 1/2}{\frac{1}{\alpha^2\beta}}$$

$$\hat{\mu}_1 = \left(\frac{1}{\alpha^2} + 1/2\right)\alpha^2\beta$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha^2} + \frac{1}{2}\alpha^2\beta$$

$$\hat{\mu}_1 = \beta + \frac{1}{2}\alpha^2\beta$$

$$\hat{\mu}_1 = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$\because \hat{\mu}_1 = \bar{X}$$

وبالتعويض عن $(\hat{\mu}_1)$ بما يساويها ينتج لدينا:

$$\therefore \bar{X} = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$\therefore \hat{\beta}_{MOM} = \frac{\bar{X}}{1+\frac{1}{2}\alpha^2} \qquad ...(8)$$

ولإيجاد مقدر المعلمة (α) لتوزيع (*Birnbaum- Saunders*) بهذه الطريقة فكالآتي:

$$\mu_2(\alpha) = \hat{\mu}_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

أي أن:

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} xi^2$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta}}\right) + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\right)^2} \qquad ...(9)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{2}}{\frac{\beta}{\alpha^2}}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\frac{2+\alpha^2}{2\alpha^2}}{\frac{\beta}{\alpha^2}}$$

$$\hat{\mu}_2 = \left(\frac{2+\alpha^2}{2\alpha^2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{2+\alpha^2}{2\beta}$$

وبالتعويض عن (β) بما يساويها نحصل على:

$$\hat{\mu}_2 = \frac{2+\alpha^2}{2\left(\frac{\hat{\mu}_1}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\right)}$$

$$\hat{\mu}_2 = \left(\frac{2+\alpha^2}{2\hat{\mu}_1}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\right)$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{2+\alpha^2}{2\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_1\alpha^2}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين للصيغة السابقة أعلاه نحصل على مقدر المعلمة (α) وكالآتي:

$$2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 + \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\alpha^2 = 2 + \alpha^2$$

$$2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 - 2 = \alpha^2 - \hat{\mu}_1\hat{\mu}_2\alpha^2$$

$$2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 - 2\alpha^2(1-\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2) =$$

$$\therefore \alpha^2 = \frac{2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 - 2}{1-\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}$$

$$\therefore \hat{\alpha}_{MOM} = \sqrt{\frac{2\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2 - 2}{1-\hat{\mu}_1\hat{\mu}_2}}$$

وبالتعويض عن ($\hat{\mu}_2, \hat{\mu}_1$) بما يساويها نحصل على:

$$\therefore \hat{\alpha}_{MOM} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\sum xi}{n}\right)\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right) - 2}{1-\left(\frac{\sum xi}{n}\right)\left(\frac{\sum x_i^2}{n}\right)}}$$

$$\therefore \hat{\alpha}_{MOM} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{\sum xi \sum x_i^2}{n^2}\right) - 2}{1-\left(\frac{\sum xi \sum x_i^2}{n^2}\right)}}$$

بافتراض أن:

$$\eta = \frac{\sum xi \sum x_i^2}{n^2}$$

$$\therefore \hat{\alpha}_{MOM} = \sqrt{\frac{2\eta - 2}{1-\eta}} \quad \ldots (10)$$

$\therefore$ فأن مقدر دالة المعولية التقريبية يمكن الحصول عليه وكالاتي:

$$\hat{R}_{MOM}(t) = \left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MOM}}\left[\left(\frac{t}{\hat{\beta}_{MOM}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{\hat{\beta}_{MOM}}\right)^{-1/2}\right]\right)$$

$$\hat{R}_{MOM}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{2\eta-2}{1-\eta}}}\left[\left(\frac{t}{\frac{\bar{X}}{1+\frac{1}{2}\hat{\alpha}^2}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{\frac{\bar{X}}{1+\frac{1}{2}\hat{\alpha}^2}}\right)^{-1/2}\right]\right) \quad \ldots (11)$$

2. طريقة العزوم المحورّة:[4][2] Modified Moments :Method of Moments Method

تعتمد فكرة هذه الطريقة على إيجاد تحوير على طريقة العزوم الاعتيادية والمعتمدة على مساواة العزمين الأول والثاني للمجتمع مع العزمين المناظرين للعينة وإيجاد صيغة تقديرية للمعلمات.
وفي هذه الحالة فأن متوسط وتباين العينة يكونان بالشكل الآتي:

$$E(T) = \beta\left(1+\frac{1}{2}\alpha^2\right) \quad \ldots(12)$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2\left(1+\frac{5}{4}\alpha^2\right) \quad \ldots(13)$$

كما يمكن من المعادلتين اعلاه إيجاد المقدرات (α, β) حيث يمكن الملاحظة من هذه العلاقات بأنه إذا كان معامل التباين أكبر من $(\sqrt{5})$ عندها فأن مقدرات العزوم لا تكون موجودة وكذلك مقدر (β) قد لا يكون وحيد لذا يمكن إجراء طريقة محورة للعزوم بتعديل المقارنة بين الصيغ اعلاه

$$E(T) = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$Var\,(T) = (\alpha\beta)^2\left(1 + \frac{5}{4}\alpha^2\right)$$

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \qquad \ldots(14)$$

وبمساواة الطرف الأيمن للصيغ أعلاه إلى عزوم المعاينة للحصول على المقدرات المحورة وفي هذه الحالة سيكون لدينا واعتماداً على التحويل المتسق الآتي:

$$X = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{T}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{T}{\beta}\right)^{-1/2}\right] \qquad \ldots(15)$$

حيث أن:

$$T = \beta\left(1 + 2x^2 + 2x(1 + x^2)^{1/2}\right)$$

من خلال الصيغة رقم (15) أعلاه نحصل على توزيع (X) المحول والذي يتوزع توزيعاً طبيعياً والذي يمتلك وسطاً حسابياً يساوي صفر وتبايناً = $\frac{1}{4}\alpha^2$.

وبما أن:

T يتوزع توزيع (*Birnbaum-Saunders*) بمعلمات (α,β) فأن (T^{-1}) أيضاً يتوزع نفس التوزيع ولكن بمعلمات (α, β^{-1}) على التوالي ومنه فأن:

حيث يتم افتراض:

$$S = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \qquad \ldots(16)$$

$$r^{-1} = \beta^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right) \qquad \ldots(17)$$

$$r = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)^{-1} \qquad \ldots(18)$$

وبضرب المعادلة رقم (16) بمعادلة رقم (18) ينتج لدينا:

$$Sr = \beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)\cdot\beta\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)^{-1}$$

$$\therefore Sr = \beta^2$$

$$\therefore \hat{\beta} = (Sr)^{1/2} \qquad \ldots(19)$$

وبتعويض الصيغة رقم (19) في الصيغة رقم (16) ينتج لدينا:

$$S = (Sr)^{1/2}\left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$S = (Sr)^{1/2} + \frac{1}{2}\alpha^2(Sr)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2}\hat{\alpha}^2(Sr)^{1/2} = S - (Sr)^{1/2}$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{S - (Sr)^{1/2}}{\frac{1}{2}(Sr)^{1/2}}$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{S}{\frac{1}{2}(Sr)^{1/2}} - \frac{(Sr)^{1/2}}{\frac{1}{2}(Sr)^{1/2}}$$

$$\hat{\alpha}^2 = \frac{S^{1/2}}{\frac{1}{2}r^{1/2}} - 2$$

$$\hat{\alpha}^2 = 2\left(\frac{S}{r}\right)^{1/2} - 2$$

$$\hat{\alpha}^2 = 2\left[\left(\frac{S}{r}\right)^{1/2} - 1\right]$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \left[2\left[\left(\frac{S}{r}\right)^{1/2} - 1\right]\right]^{1/2} \qquad \text{...(20)}$$

حيث أن:

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$r = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{-1}\right]^{-1}$$

وبهذا يمكن إيجاد مقدر دالة المعولية التقريبية وكالآتي:

$$\hat{R}_{MMOM}(t) = \left(\frac{1}{\hat{\alpha}_{MMOM}}\left[\left(\frac{t}{\hat{\beta}_{MMOM}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{\hat{\beta}_{MMOM}}\right)^{-1/2}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\left[2\left[\left(\frac{S}{r}\right)^{1/2} - 1\right]\right]^{1/2}}\left[\left(\frac{t}{(Sr)^{1/2}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{(Sr)^{1/2}}\right)^{-1/2}\right]\right) \qquad \text{...(21)}$$

3. طريقة التقلص المقترحة *Shrinkage Method*

تعتمد هذه الطريقة في حساباتها على البحث عن أفضل مقدّر من خلال دمج مقدّر من مقدرات الطرائق الاعتيادية (مقدّر العزوم الاعتيادية) مع مقدّر (العزوم المحورة) في صيغة جديدة لتقدير معلمتي التوزيع المفترض ((α) ، (β)) وكما في الصيغة الاتية:

$$\hat{\alpha}_{Mix} = P\hat{\alpha}_{MOM} + (1-P)\hat{\alpha}_{MMOM} \qquad \text{...(22)}$$

حيث أن: $0 < P < 1$

وأن:

$\hat{\alpha}_{Mix}$: مقدّر الخليط

$\hat{\alpha}_{MOM}, \hat{\alpha}_{MMOM}$: مقدرات الطرائق المستخدمة للحصول على المقدر الجديد

ويمكن أن يأخذ أفضل ما في الطريقتين ويتلافى الأخطاء الحاصلة عند التقدير.

ولإيجاد القيمة التقديرية للمعلمة (α_{Mix})، يجب إيجاد قيمة (P) من دون افتراضها وكما يأتي:

تطرح قيمة المعلمة (α) من طرفي المعادلة (22) فنحصل على الآتي:

$$-\alpha\hat{\alpha}_{Mix} - \alpha = [P\hat{\alpha}_{MOM} + (1-P)\hat{\alpha}_{MMOM}] \qquad \text{...(23)}$$

بتربيع طرفي الصيغة (23) ثم بأخذ التوقع لها نحصل على الآتي:

$$E[(\hat{\alpha}_{Mix} - \alpha)^2] = P^2E(\hat{\alpha}_{MOM})^2 + 2P(1-P)E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) + (1-P)^2E(\hat{\alpha}_{MMOM})^2 - 2PE(\hat{\alpha}_{MOM})E(\alpha) - 2(1-P)E(\hat{\alpha}_{MMOM})E(\alpha) + E(\alpha^2) \qquad \text{...(24)}$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للصيغة رقم (24) نسبة لـ P نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial E[(\hat{\alpha}_{Mix} - \alpha)^2]}{\partial P} = 2P(\hat{\alpha}_{MOM})^2 + (2-4P)E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - 2(1-P)E(\hat{\alpha}_{MMOM})^2 - 2\alpha E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\alpha) + 2E(\hat{\alpha}_{MMOM})E(\alpha) \qquad \text{... (25)}$$

بما أن: $E(\alpha) = \alpha$

فإن الصيغة (*25*) تصبح كالآتي:

$$\frac{\partial E[(\hat{\alpha}_{Mix}-\alpha)^2]}{\partial P} = 2P\,(\hat{\alpha}_{MOM})^2 + (2-4P)E(\hat{\alpha}_{MOM})\,E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - 2(1-P)E(\hat{\alpha}_{MMOM})^2 - 2\alpha\,E(\hat{\alpha}_{MOM}) + 2\alpha\,E(\hat{\alpha}_{MMOM})$$

إن القيمة التقديرية لـ P هي حل المعادلة الآتية:

وبقسمة طرفي المعادلة على (2) نحصل على:

$$\frac{\partial E[(\hat{\alpha}_{Mix}-\alpha)^2]}{\partial P} = PE(\hat{\alpha}_{MOM})^2 + (1-2P)E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - (1-P)E(\hat{\alpha}_{MMOM})^2 - \alpha E(\hat{\alpha}_{MOM}) + \alpha E(\hat{\alpha}_{MMOM}) = 0$$

فأن:

$$(\hat{\alpha}_{MOM})^2 + E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - 2PE(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - E(\hat{\alpha}_{MMOM})^2 + PE\left(\hat{\alpha}^2{}_{MMOM}\right) - \alpha E(\hat{\alpha}_{MOM}) + \alpha E(\hat{\alpha}_{MMOM}) = 0$$

وأن:

$$P = \frac{\alpha E(\hat{\alpha}_{MOM}) - \alpha E(\hat{\alpha}_{MMOM}) - E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) + E(\hat{\alpha}^2{}_{MMOM})}{E(\hat{\alpha}^2{}_{MOM}) - 2E(\hat{\alpha}_{MOM})E(\hat{\alpha}_{MMOM}) + E(\hat{\alpha}^2{}_{MMOM})} \qquad ...(26)$$

ولإيجاد قيمة P يجب إيجاد قيم التوقع في الصيغة رقم (26) وكالآتي:

$$E(\hat{\alpha}_{MOM}) = E\left(\sqrt{\frac{2\eta-2}{1-\eta}}\right)$$

ونلحظ في الصيغة أعلاه أن لا يمكن إدخال التوقع على الصيغة لوجود جذور وعليه يتم اللجوء إلى الطرائق العددية لحلها ومنها طريقة نيوتن- رافسون للحصول على قيمة (P).

حيث يتم إعطاء قيمة اولية إلى (P) وعادة تكون أقل ما يمكن ويتم تطبيق طريقة المربعات الصغرى [1] للحصول على القيمة الاولية (*Primal value*) للمقدر المتقلص (*Shrinkage Estimation*) فضلاً عن متوسط مربعات الخطأ المرافق له، بعدها يتم إضافة قيمة صغيرة ما امكن إلى القيمة الابتدائية (P) وذلك للحصول على قيمة جديدة تؤخذ للحصول على مقدر متقلص معدّل (*Modified Shrinkage Estimation*) فضلاً عن متوسط مربعات خطأ (*MSE*) مرافق له وبمقارنة متوسطي المربعات الأولي والمعدّل ليكون أقل من قيمة فرق مفترضة في الدراسة ولتكن(d) ويمكن تكرار الخطوات السابقة حتى الحصول على مقدرات معدّلة جديدة ومتوسط مربعات الخطأ المرافق له لحين الوصول إلى الإستقرار في التقدير الناتج من الاستقرار في قيمة مربعات الخطأ المرافق له عندها نتوقف ويكون بذلك آخر مقدر معدّل ممثلاً لمقدر الخليط الذي نتج عن قيمة (P) المعدّلة الأفضل وبمتوسط مربعات خطأ يكون هو الأفضل مقارنة مع الغير.

أما بالنسبة للمعلمة (β) فيمكن إيجاد التقدير لها بالأسلوب نفسه وكالآتي:

$$\hat{\beta}_{Mix} = P\hat{\beta}_{MOM} + (1-P)\hat{\beta}_{MMOM} \qquad ...(27)$$

تطرح قيمة المعلمة (β) من طرفي المعادلة (27) فنحصل على الآتي:

$$\hat{\beta}_{Mix} - \beta = \left[P\hat{\beta}_{MOM} + (1-P)\hat{\beta}_{MMOM}\right] - \beta \qquad ...(28)$$

بتربيع طرفي الصيغة (28) ثم بأخذ التوقع لها نحصل على الآتي:

$$E\left[(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2\right] = P^2E(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) + 2P(1-P)E(\hat{\beta}_{MOM})E(\hat{\beta}_{MMOM}) + (1-P)^2E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) - 2PE(\hat{\beta}_{MOM})E(\beta) - 2(1-P)E(\hat{\beta}_{MMOM})E(\beta) + E(\beta^2) \qquad ...(29)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية للصيغة رقم (29) نسبة لـ P نحصل على الآتي:

$$\frac{\partial E[(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2]}{\partial P} = PE(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) + (2-4P)E(\hat{\beta}_{MOM})E(\hat{\beta}_{MMOM}) - 2(1-P)E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) - 2E(\hat{\beta}_{MOM})E(\beta) + 2E(\hat{\beta}_{MMOM})E(\beta) \quad ...(30)$$

بما أن: $E(\beta) = \beta$

فأن الصيغة رقم (30) تصبح كالآتي:

$$\frac{\partial E\left[(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2\right]}{\partial p} = 2PE(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) + (2-4P)E(\hat{\beta}_{MOM})$$
$$E(\hat{\beta}_{MMOM}) \quad -2(1-P)E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) - 2\beta E(\hat{\beta}_{MOM}) + 2\beta E(\hat{\beta}_{MMOM})$$

إن القيمة التقديرية لـ P هي حل للمعادلة الآتية

وبقسمة طرفي المعادلة على (2) نحصل على:

$$\frac{\partial E\left[(\hat{\beta}_{Mix}-\beta)^2\right]}{\partial p} = PE(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) + (1-2P)E(\hat{\beta}_{MOM})$$
$$E(\hat{\beta}_{MMOM}) - (1-P)E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) - \beta E(\hat{\beta}_{MOM}) + \beta E(\hat{\beta}_{MMOM}) = 0$$

فأن :

$$PE(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) + E(\hat{\beta}_{MOM})E(\hat{\beta}_{MMOM}) - 2PE(\hat{\beta}_{MOM})E(\hat{\beta}_{MMOM}) - E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) + PE(\hat{\beta}^2{}_{MMOM}) - E(\hat{\beta}_{MOM}) + \beta E(\hat{\beta}_{MMOM}) = 0$$

وأن:

$$P = \frac{\beta\, E(\hat{\beta}_{MOM}) - \beta\, E(\hat{\beta}_{MMOM}) - E(\hat{\beta}_{MOM}) - E(\hat{\beta}_{MMOM}) + E(\hat{\beta}_{MOM})}{E(\hat{\beta}^2{}_{MOM}) - 2\,E(\hat{\beta}_{MOM})\,E(\hat{\beta}_{MMOM}) + E(\hat{\beta}^2{}_{MMOM})} \quad ...(31)$$

ولإيجاد قيمة P يجب إيجاد قيم التوقع في الصيغة رقم (29) وكالآتي:

$$E(\hat{\beta}_{MOM}) = E\left(\frac{\bar{X}}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\right)$$
$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\,E\bar{X}$$
$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} E\,\frac{x_i}{n}$$
$$= \frac{n\bar{X}/n}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}$$
$$E(\hat{\beta}_{MOM}) = \frac{\bar{X}}{1+\frac{1}{2}\alpha^2}$$

أما بالنسبة لقيمة التوقع لـ $(\hat{\beta}_{MMOM})$ فكالآتي:

$$E(\hat{\beta}_{MMOM}) = E\left[(Sr)^{1/2}\right]$$

فنلحظ من الصيغة أعلاه أن لا يمكن إدخال التوقع على الصيغة لوجود أس وعليه يتم اللجوء إلى الطرائق العددية لحلها ومنها طريقة نيوتن- رافسون للحصول على قيمة (P) وبالأسلوب نفسه الذي أجري على مقدر المعلمة $(\hat{\alpha}_{Mix})$ يمكننا الحصول على مقدر المعلمة $(\hat{\beta}_{Mix})$ الجديد.

وبهذا يمكن إيجاد مقدر دالة المعولية التقريبية وكالآتي:

$$\widehat{R}_{Mix}(t) = \left(\frac{1}{\widehat{\alpha}_{Mix}}\left[\left(\frac{t}{\widehat{\beta}_{Mix}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{\widehat{\beta}_{Mix}}\right)^{-1/2}\right]\right) = \left(\frac{1}{P\widehat{\alpha}_{MOM} + (1-P)\widehat{\alpha}_{MMOM}}\left[\left(\frac{t}{P\widehat{\beta}_{MOM} + (1-P)\widehat{\beta}_{MMOM}}\right)^{1/2} - \left(\frac{t}{P\widehat{\beta}_{MOM} + (1-P)\widehat{\beta}_{MMOM}}\right)^{-1/2}\right]\right) \quad ...(32)$$

الجانب التجريبي :

تتضمن مراحل بناء تجربة المحاكاة أربع مراحل أساسية ومهمة لتقدير معلمات التوزيع ودالة المعولية لتوزيع (*BISA*) وهي كالآتي:

المرحلة الاولى: (مرحلة تعيين القيم الافتراضية):

تتضمن المرحلة الأولى تحديد القيم الافتراضية اذ تعد هذه المرحلة من أهم المراحل التي تعتمد عليها بقية المراحل، إذ يتم تعيين قيم المعلمة الافتراضية (الحقيقية) وكما يأتي:

أولاً: تحديد القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع:

تم اختيار قيم افتراضية لمعلمتي التوزيع وذلك بافتراض أن معلمة القياس (β) والتي تساوي (*β=1, 1.5*) ومعلمة الشكل (α) والتي تساوي (*α=0.25, 0.50*).

ثانياً: اختيار حجم العينة (*n*):

تم اختيار حجوم مختلفة للعينة بشكل يتناسب مع معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة وكفاءة النتائج المستخرجة من طرائق التقدير المستخدمة في الدراسة.

وتم أخذ احجام عينة صغيرة وهي (n=10,25, 50) ، وحجم عينة متوسطة واحدة هي (n=75) وكذلك حجم عينة كبيرة واحدة هي (n=100).

ثالثاً: اختيار حجم تكرار العينات (RP):

تم اختيار حجم تكرار هذه التجارب مساوياً إلى (RP=1000) لكل تجربة.

المرحلة الثانية: (مرحلة توليد البيانات):

في هذه المرحلة يتم توليد بيانات عشوائية تتبع توزيع (*BISA*) ذي المعلمتين، إذ تم أستخدام طريقة الدستور في هذه الرسالة وعلى ما مبين في المعادلة الآتية:

إذا كان:

Y_i يمثل متغيراً يتوزع توزيع طبيعي قياسي

حيث أن:

$\sigma^2=1 , \quad \mu=0$

وبحسب العلاقة الآتية:

إذا كان: $Y_i \sim Z(0,1)$

فأن:

$$Z_1 = (-2\ln(U_1))^{1/2}.\cos(2\pi \cdot U_2) \quad ....(33)$$

حيث أن:

Z_1 : يمثل متغير عشوائي طبيعي مستقل وان :

$$U_1 \sim uniform \quad (0,1)$$
$$U_2 \sim uniform \quad (0,1)$$

عندها فأن:

جذر المعادلة هو:

$$\lambda/\sqrt{x} = y + \mu\sqrt{x}$$

حيث تتضمن حلولاً للمتغير (x) الذي يتوزع توزيع (*BISA*) وبمعلمات (λ,μ) وعليه وباستخدام الدستور فأن حلول المعادلة السابقة ستكون:

$$x_1 = (\frac{-y + \sqrt{y^2 + 4\mu\lambda}}{2\mu})^2 \quad ...(34)$$

$$x_2 = (\frac{-y - \sqrt{y^2 + 4\mu\lambda}}{2\mu})^2 \quad ...(35)$$

في هذه المرحلة يعد الجذر الأول (x_1) متغير عشوائي يسلك سلوك (*BISA*) وبمعلمات (λ,μ) في حين يهمل الجذر الثاني (x_2) لأنه لا يقدم التوزيع المطلوب.

ومن خلال الصيغة رقم (34) يتم توليد بيانات تتبع توزيع (*BISA*) ذي المعلمتين.

المرحلة الثالثة (مرحلة إيجاد المقدرات):

يتم في هذه المرحلة تقدير معلمات التوزيع ودالة المعولية من خلال طرائق التقدير المتناولة في الجانب النظري من هذا البحث وبحسب الطرائق الآتية :

1. طريقة العزوم الاعتيادية: *Method of Moments*
2. طريقة العزوم المحورة: *Modified Moment Method*
3. .طريقة التقلص: *Shrinkage Method*

المرحلة الرابعة (مرحلة المقارنة):

وهي المرحلة الأخيرة حيث يتم فيها المقارنة بين طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع (*Birnbaum-Saunders*) وذلك بأستخدام المعايير الآتية:

1. متوسط مربعات الخطأ (*MSE*) : (*Mean Squared Error*)

والصيغة العامة له :

$$MSE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(\hat{\alpha}_i - \alpha)^2 \quad ...(36)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}(\hat{\beta}_i - \beta)^2 \quad ...(37)$$

i=1,2,…, r

حيث أن:

r : تمثل عدد المكررات لكل تجربة

2. متوسط الخطأ النسبي المطلق (*MAPE*): *Mean Absolute Percentage Error*

والصيغة العامة له:

$$MAPE(\hat{\alpha}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\hat{\alpha}_i - \alpha}{\alpha}\right| \quad ...(38)$$

$$MAPE(\hat{\beta}) = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left|\frac{\hat{\beta}_i - \beta}{\beta}\right| \quad ...(39)$$

حيث أن المقياس الأول هو مقياس مطلق للمقارنة بين المقدرات أما المقياس الثاني فهو مقياس نسبي يستخدم لدقة القياسات في حالة كون المقدرات مختلفة وللمقارنات الدقيقة.

3.متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE):

لكون (MSE) يحسب لكل (t_i) من الزمن فإن (IMSE) يمثل تكامل للمساحة الكلية (t_i) واختزالها بقيمة واحدة تعد عامة للزمن. أو معبرة عن الزمن الكلي.

وصيغة هذا المقياس تكون كما يأتي:

$$IMSE[\hat{R}(t)] = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}[\hat{R}_i(t_j) - R(t_j)]\right\} \qquad ...(40)$$

$$= \frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t} MSE[\hat{R}(t_i)] \quad , \qquad ...(41)$$

$$i = 1,\ldots\ldots, r$$

حيث أن:

r : يمثل مرات تكرار التجربة.

n_t : معبرة عن حدود المتغير (t_i) أي من الحد الأدنى (Lower Bound) إلى الحد الأعلى (Up

جدول رقم (1)
يبين مقدري معلمتي توزيع (Birnbaum-Saunders)
وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الاولى وعندما
$(\alpha = 0.25\ ,\ \beta = 1)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	α	0.237112097	0.225621114	0.2296419
	β	1.010160249	1.013276407	1.011253672
25	α	0.246930277	0.243006792	0.245198025
	β	1.007476431	1.008532094	1.007779801
50	α	0.24671719	0.24425891	0.24509914
	β	0.996871785	0.99749377	0.997355368
75	α	0.243930261	0.243030674	0.243970481
	β	0.999607528	0.999874378	0.999855383
100	α	0.249466844	0.248507225	0.248685425
	β	0.998187064	0.998463074	0.998306176

جدول رقم (2)
يبين مقدري معلمتي توزيع (Birnbaum-Saunders)
وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الثانية وعندما
$(\alpha = 0.25\ ,\ \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	α	0.223769359	0.227910577	0.232383483
	β	1.498472891	1.501931138	1.50001076
25	α	0.239655353	0.243210154	0.245312107
	β	1.498511965	1.500569555	1.499801093
50	α	0.222392522	0.240797347	0.241211936
	β	1.506046261	1.505996577	1.506072607
75	α	0.244492407	0.246632097	0.247387294
	β	1.497642893	1.498482541	1.498150989
100	α	0.246672883	0.250024145	0.249696054
	β	1.495074359	1.495770424	1.495541346

جدول رقم (3)
يبين مقدري معلمتي توزيع (Birnbaum-Saunders)
وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الرابعة وعندما
$(\alpha = 0.5\ ,\ \beta = 1)$

n		طرائق التقدير

		mom	Modified moment	Shr
10	α	0.463561125	0.449830416	0.454429075
	β	1.026563805	1.034244413	1.02767506
25	α	0.487620554	0.485572414	0.488251283
	β	1.016987292	1.018719304	1.016673404
50	α	0.491647599	0.488402253	0.488664975
	β	0.994441713	0.996096438	0.996200186
75	α	0.498768382	0.497403551	0.496319959
	β	0.996940814	0.997837928	0.997405754
100	α	0.485516552	0.489349292	0.488771671
	β	1.004640923	1.003107613	1.003288858

جدول رقم (4)

يبين مقدري معلمتي توزيع (Birnbaum-Saunders)

وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الخامسة وعندما

$(\alpha = 0.5\ ,\ \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	α	0.504112767	0.502189209	0.500659862
	β	1.48953633	1.491420361	1.491839034
25	α	0.465717487	0.472219901	0.471236363
	β	1.513895918	1.510429418	1.511594003
50	α	0.510907204	0.501109656	0.501183221
	β	1.485899221	1.493421355	1.489983746
75	α	0.504112767	0.502189209	0.500659862
	β	1.48953633	1.491420361	1.491839034
100	α	0.494915128	0.498202217	0.496583037
	β	1.499285039	1.497476707	1.499351283

جدول رقم (5)

يبين متوسط مربعات الخطأ لمعلمتي التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لدالة المعولية

لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الاولى وعندما

$(\alpha = 0.25, \beta = 1)$

n		طرائق التقدير			
		mom	Modified moment	shr	Best
10	$mse-\alpha$	0.004566387	0.003924405	0.003310811	Shr
	$mse-\beta$	0.008037407	0.00823377	0.007780532	Shr
	$IMSE\ R$	0.00236646	0.002397459	0.002219034	Shr
25	$mse-\alpha$	0.001189919	0.001013004	0.00084563	Shr
	$mse-\beta$	0.002018984	0.002072792	0.001964776	Shr
	$IMSE\ R$	0.000611234	0.000601516	0.000558405	Shr
50	$mse-\alpha$	0.000712156	0.00063862	0.000542347	Shr
	$mse-\beta$	0.000888696	0.000875764	0.000843967	Shr
	$IMSE\ R$	0.000286213	0.000278397	0.00025901	Shr
75	$mse-\alpha$	0.00062436	0.000489397	0.000424456	Shr
	$mse-\beta$	0.000667189	0.000642912	0.000615997	Shr
	$IMSE\ R$	0.000231499	0.00021425	0.000198693	Shr
100	$mse-\alpha$	0.000450563	0.000354757	0.000309376	Shr
	$mse-\beta$	0.000474587	0.000474824	0.000450172	Shr

	$IMSE\ R$	0.000166685	0.000156581	0.000144979	Shr

جدول رقم (6)

يبين متوسط مربعات الخطأ لمعلمتي التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لدالة المعولية

لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الثانية وعندما

$(\alpha = 0.25, \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير			
		mom	Modified moment	Shr	Best
10	$mse-\alpha$	0.00995537	0.003059518	0.002426163	Shr
	$mse-\beta$	0.010361598	0.010316558	0.009935492	Shr
	$IMSE\ R$	0.027050438	0.002215965	0.002023082	Shr
25	$mse-\alpha$	0.006119004	0.001413309	0.001229823	Shr
	$mse-\beta$	0.005027381	0.004909576	0.004747864	Shr
	$IMSE\ R$	0.017630351	0.001012657	0.000948825	Shr
50	$mse-\alpha$	0.009846499	0.000695455	0.000548045	Shr
	$mse-\beta$	0.003083065	0.003041643	0.002958837	Shr
	$IMSE\ R$	0.033926847	0.000597008	0.000557022	Shr
75	$mse-\alpha$	0.002660047	0.000418842	0.000355656	Shr
	$mse-\beta$	0.001900665	0.001879554	0.001809221	Shr
	$IMSE\ R$	0.008788207	0.000367991	0.000346072	Shr
100	$mse-\alpha$	0.002920041	0.00028856	0.0002108	Shr
	$mse-\beta$	0.001388729	0.001404962	0.00132047	Shr
	$IMSE\ R$	0.008536298	0.000268624	0.000243263	Shr

جدول رقم (7)

يبين متوسط مربعات الخطأ لمعلمتي التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لدالة المعولية

لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الرابعة وعندما

$(\alpha = 0.5, \beta = 1)$

n		طرائق التقدير			
		mom	Modified moment	Shr	Best
10	$mse-\alpha$	0.021242168	0.01568041	0.012993423	Shr
	$mse-\beta$	0.033140631	0.033809593	0.029701653	Shr
	$IMSE\ R$	0.005157782	0.005065094	0.004410877	Shr
25	$mse-\alpha$	0.006088287	0.004077604	0.003140107	Shr
	$mse-\beta$	0.007940885	0.008196715	0.006986433	Shr
	$IMSE\ R$	0.001337347	0.001244921	0.001051	Shr
50	$mse-\alpha$	0.003583253	0.002554553	0.002022242	Shr
	$mse-\beta$	0.00356599	0.003304302	0.002894747	Shr
	$IMSE\ R$	0.000625599	0.000561757	0.000479002	Shr
75	$mse-\alpha$	0.003602378	0.002134217	0.001695967	Shr
	$mse-\beta$	0.003123641	0.002749692	0.002429287	Shr
	$IMSE\ R$	0.000574198	0.000487099	0.000415483	Shr

100	$mse-\alpha$	0.002354882	0.001649701	0.001314881	Shr
	$mse-\beta$	0.002507471	0.002344927	0.002115787	Shr
	$IMSE\ R$	0.000448765	0.000401195	0.000347406	Shr

جدول رقم (8)

يبين متوسط مربعات الخطأ لمعلمتي التوزيع ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي لدالة المعولية لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الخامسة وعندما

$(\alpha = 0.5, \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير			
		mom	Modified moment	Shr	Best
10	$mse-\alpha$	0.032789663	0.011235019	0.008719449	Shr
	$mse-\beta$	0.043163573	0.042887679	0.036988867	Shr
	$IMSE\ R$	0.016476941	0.004794544	0.004030241	Shr
25	$mse-\alpha$	0.008428056	0.006490524	0.005224476	Shr
	$mse-\beta$	0.017447227	0.016968661	0.014919132	Shr
	$IMSE\ R$	0.002231606	0.002053695	0.001762446	Shr
50	$mse-\alpha$	0.004521756	0.002046461	0.00143069	Shr
	$mse-\beta$	0.009734483	0.009176505	0.007652515	Shr
	$IMSE\ R$	0.001128481	0.000957981	0.000760915	Shr
75	$mse-\alpha$	0.002906199	0.001536255	0.001057696	Shr
	$mse-\beta$	0.007498504	0.007368094	0.006371518	Shr
	$IMSE\ R$	0.000818158	0.000732613	0.000615028	Shr
100	$mse-\alpha$	0.002250325	0.001365647	0.000998273	Shr
	$mse-\beta$	0.004056394	0.00378884	0.00314895	Shr
	$IMSE\ R$	0.000513998	0.000433505	0.000344351	Shr

جدول رقم (9)

يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الاولى وعندما

$(\alpha = 0.25 , \beta = 1)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.214320273	0.204190095	0.177280881
	$mape-\beta$	0.072116575	0.072968839	0.070433803
	$mape\ -R$	1.26196029	1.734764567	1.089090602
25	$mape-\alpha$	0.108757961	0.104352446	0.087889713
	$mape-\beta$	0.03499161	0.035419129	0.034052943
	$-Rmape$	1.227230279	1.15689516	1.546917011
50	$mape-\alpha$	0.08736606	0.083953296	0.073060125
	$mape-\beta$	0.02356921	0.023157171	0.022594915
	$-\ Rmape$	1.133028991	1.481277164	1.153432782
75	$mape-\alpha$	0.076300888	0.067650183	0.057219333
	$mape-\beta$	0.021276037	0.020798993	0.020156115
	$mape\ -R$	1.908023839	1.996638451	1.748903252

100	$mape-\alpha$	0.071510114	0.062705335	0.05593511
	$mape-\beta$	0.01762879	0.017736913	0.017001188
	- *Rmape*	1.716919264	1.135525865	1.503723329

جدول رقم (10)
يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)
وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الثانية وعندما
$(\alpha = 0.25, \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.233696713	0.178323806	0.14937389
	$mape-\beta$	0.054371393	0.054178282	0.052393442
	$mape-R$	1.879473487	1.448578752	1.498925023
25	$mape-\alpha$	0.160513452	0.116678037	0.10123621
	$mape-\beta$	0.039124453	0.038497231	0.037540784
	-*Rmape*	1.247859083	1.822435867	1.006068285
50	$mape-\alpha$	0.1587016	0.087922665	0.073529018
	$mape-\beta$	0.029567007	0.029481522	0.028723858
	- *Rmape*	1.485873336	0.836763773	0.646898484
75	$mape-\alpha$	0.091095359	0.06473954	0.055289537
	$mape-\beta$	0.023039889	0.022776333	0.022048265
	- *Rmape*	1.622060096	0.631065117	0.541372853
100	$mape-\alpha$	0.081509083	0.054559478	0.044518019
	$mape-\beta$	0.020900613	0.020945039	0.020095665
	- *Rmape*	1.622086859	0.624015454	0.488801378

جدول رقم (11)
يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)
وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الثالثة وعندما
$(\alpha = 0.25, \beta = 2)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.319936724	0.187580829	0.154520057
	$mape-\beta$	0.064297348	0.064143822	0.062590923
	-*Rmape*	1.124451074	1.045266134	0.922612145
25	$mape-\alpha$	0.124183108	0.097874077	0.083238037
	$mape-\beta$	0.043601793	0.04322592	0.042271151
	-*Rmape*	1.302899825	0.513626366	0.46567838
50	$mape-\alpha$	0.080324297	0.080574557	0.064944135
	$mape-\beta$	0.027058014	0.026970676	0.026064897
	- *Rmape*	0.382059571	0.37008342	0.318954316
75	$mape-\alpha$	0.065803599	0.062852501	0.051369842
	$mape-\beta$	0.020700601	0.020977642	0.020058689
	- *Rmape*	0.304658564	0.29154412	0.255888965

100	$mape-\alpha$	0.06720623	0.063344151	0.053307816
	$mape-\beta$	0.019021452	0.019009058	0.018289568
	- $Rmape$	0.253431649	0.237181924	0.212786581

جدول رقم (12)

يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الرابعة وعندما

$(\alpha = 0.5, \beta = 1)$

n		طرائق التقدير		
		mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.23317497	0.203863903	0.170261762
	$mape-\beta$	0.14309802	0.145614431	0.133049996
	-$Rmape$	1.992177783	1.605284943	1.247769399
25	$mape-\alpha$	0.12327988	0.104793478	0.081544116
	$mape-\beta$	0.069600293	0.070237532	0.062623074
	-$Rmape$	0.763733097	0.653690509	0.56117637
50	$mape-\alpha$	0.098170272	0.083900852	0.068091891
	$mape-\beta$	0.047786336	0.044785351	0.041193327
	- $Rmape$	0.477455746	0.424530573	0.355733417
75	$mape-\alpha$	0.098391437	0.075635809	0.061935986
	$mape-\beta$	0.0451927	0.042051552	0.038027032
	- $Rmape$	0.537475233	0.443432249	0.375091548
100	$mape-\alpha$	0.077693302	0.069176117	0.055037564
	$mape-\beta$	0.040804306	0.03991842	0.03628929
	-$Rmape$	0.386821398	0.366766858	0.304532279

جدول رقم (13)

يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الخامسة وعندما

$(\alpha = 0.5, \beta = 1.5)$

n		طرائق التقدير		
		Mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.221799354	0.171083084	0.133908921
	$mape-\beta$	0.112277192	0.111066631	0.101919277
	-$Rmape$	0.945798821	0.500317542	0.430378417
25	$mape-\alpha$	0.151296698	0.133789387	0.100992864
	$mape-\beta$	0.070710752	0.069556153	0.063016824
	--$Rmape$	0.350455422	0.342748199	0.003021992
50	$mape-\alpha$	0.102572585	0.071372447	0.051985464
	$mape-\beta$	0.052103034	0.050953474	0.004351894
	-- $Rmape$	0.272302127	0.229744458	0.184591549
75	$mape-\alpha$	0.076615036	0.062155333	0.045991231
	$mape-\beta$	0.045560158	0.045802369	0.004038973
	-- $Rmape$	0.228410299	0.203946421	0.176259009

100	$mape-\alpha$	0.073791471	0.05842285	0.042588817
	$mape-\beta$	0.03261761	0.03174932	0.000269778
	-- $Rmape$	0.177626875	0.158184132	0.129093943

جدول رقم (14)
يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)
وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة السادسة وعندما

$(\alpha = 0.5, \beta = 2)$

n		طرائق التقدير		
		Mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.417999393	0.203863903	0.170750225
	$mape-\beta$	0.143098019	0.145614431	0.133049996
	--$Rmape$	0.931244788	0.349679415	0.315409452
25	$mape-\alpha$	0.138050029	0.104793478	0.082130082
	$mape-\beta$	0.069600289	0.070237532	0.06262307
	--$Rmape$	0.259221717	0.19541145	0.178805517
50	$mape-\alpha$	0.098170327	0.083900852	0.06809189
	$mape-\beta$	0.047786334	0.044785351	0.041193323
	-- $Rmape$	0.139588468	0.136353205	0.12177344
75	$mape-\alpha$	0.111228851	0.067581716	0.053496746
	$mape-\beta$	0.044766722	0.0004032967	0.036462092
	-- $Rmape$	0.185824222	0.012577968	0.111624358
100	$mape-\alpha$	0.083483951	0.062750987	0.051003582
	$mape-\beta$	0.03501125	0.034730142	0.029944466
	-- $Rmape$	0.120722205	0.109848956	0.094845767

جدول رقم (15)
يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)
وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة السابعة وعندما

$(\alpha = o.75\,,\ \beta = 1)$

N		طرائق التقدير		
		Mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.221093571	0.177057843	0.137114345
	$mape-\beta$	0.180840745	0.171632561	0.149877575
	--$Rmape$	0.59083754	0.572919857	0.488842005
25	$mape-\alpha$	0.165202038	0.115073433	0.084129624
	$mape-\beta$	0.1326967	0.113752075	0.097983015
	--$Rmape$	0.407504978	0.383104525	0.306658036
50	$mape-\alpha$	0.10859786	0.085486146	0.05935524
	$mape-\beta$	0.09279984	0.086007692	0.073113788
	-- $Rmape$	0.26612534	0.256137779	0.217035063
75	$mape-\alpha$	0.104762302	0.065213347	0.049311596
	$mape-\beta$	0.070727718	0.067312105	0.053219969

	-- $Rmape$	0.262097454	0.226808702	0.187578979
100	$mape-\alpha$	0.087406115	0.055179342	0.035905089
	$mape-\beta$	0.063722483	0.060090463	0.046406258
	-- $Rmape$	0.225063352	0.198387785	0.146749434

جدول رقم (16)

يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة الثامنة وعندما

$(\alpha = o.75\,,\ \beta = 1.5)$

N		طرائق التقدير		
		Mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.260955002	0.162759692	0.120571881
	$mape-\beta$	0.179618988	0.166806477	0.146512863
	--$Rmape$	0.488648583	0.343778351	0.290533981
25	$mape-\alpha$	0.154772664	0.099101473	0.069003777
	$mape-\beta$	0.138029615	0.12338094	0.108914647
	--$Rmape$	0.266752794	0.220815816	0.194376871
50	$mape-\alpha$	0.109741836	0.079948165	0.005356573
	$mape-\beta$	0.08756351	0.074448231	0.062981221
	-- $Rmape$	0.163177417	0.164125677	0.130014667
75	$mape-\alpha$	0.106125347	0.066956566	0.048139035
	$mape-\beta$	0.06996565	0.057752791	0.04719083
	-- $Rmape$	0.144738156	0.129494887	0.103930563
100	$mape-\alpha$	0.090412542	0.062694837	0.044879232
	$mape-\beta$	0.060119624	0.051198028	0.041905253
	-- $Rmape$	0.120694138	0.112693781	0.091110996

جدول رقم (17)

يبين متوسط الخطأ النسبي المطلق لتوزيع (Birnbaum-Saunders)

وحـــسب (طرائق التقدير، حجم العينة) بالنسبة للتجربة التاسعة وعندما

$(\alpha = o.75\,,\ \beta = 2)$

n		طرائق التقدير		
		Mom	Modified moment	Shr
10	$mape-\alpha$	0.245358807	0.174271015	0.124570686
	$mape-\beta$	0.193298188	0.018501232	0.162031059
	--$Rmape$	0.298509534	0.245199953	0.213715135
25	$mape-\alpha$	0.159542029	0.106942132	0.073088653
	$mape-\beta$	0.108342567	0.099668376	0.081135692
	--$Rmape$	0.173701132	0.146199566	0.116287256
50	$mape-\alpha$	0.151356142	0.085359303	0.064855197
	$mape-\beta$	0.085783658	0.073049125	0.063358115
	-- $Rmape$	0.150498556	0.105247808	0.091785161
75	$mape-\alpha$	0.110360867	0.062194928	0.043746571
	$mape-\beta$	0.078719892	0.071426968	0.060207617

	-- $Rmape$	0.130912191	0.108328398	0.089302416
100	$mape-\alpha$	0.097776599	0.050991867	0.033517128
	$mape-\beta$	0.069678997	0.066049523	0.053817029
	-- $Rmape$	0.110522083	0.09119006	0.073295765

الاستنتاجات والتوصيات :

أولا: الاستنتاجات :

1.تبين من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة افضلية طريقة التقلص لتقدير معلمتي التوزيع بأستخدام المقياسين الاحصائيين (MSE) , (MAPE) من اجل المقارنة بين افضلية المقدرات و لحجوم العينات المفترضة.

2.حققت طريقة التقلص المقترحة الافضلية في تقدير دالة المعولية بأستخدام المقياس الاحصائي متوسط مربع الخطأ التكاملي (IMSE).

3.اظهرت نتائج المحاكاة ان قيم متوسط مربعات الخطأ ومتوسط الخطأ النسبي التكاملي لتقدير كل من معلمتي التوزيع تتناقص بزيادة حجم العينة ولجميع طرائق التقدير وهذا يتطابق والنظرية الاحصائية.

ثانيا: التوصيات:

1.توصي الباحثتان بأجراء البحث على بيانات حقيقية واستخدام طريقة التقلص لتقدير دالة المعولية لكونها افضل طرائق التقدير التي تم التوصل اليها في الجانب التجريبي .

2. اجراء بحوث مستقبلية لتقدير دالة المعولية لتوزيع Birnbaum- Saunders في حالة بيانات مراقبة بنوعيها الاول والثاني.

3.تطبيق اسلوب بيز وبيز التجريبي في تقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيع Birnbaum - Saunders.

المصادر:

1. أبو التمن ، رشا أبراهيم (2012) ، " مقارنة بعض طرائق تقدير المعلمات ودالة المعولية لتوزيع Birnbaum-Saunders ذو المعلمتين باستخدام المحاكاة " رسالة ماجستير – كلية الادارة والاقتصاد / جامعة بغداد.
2. **A. J. Lemonte, F. Cribari – Neto, K. L. P. Vasconcellos, (2007), "*Improved Statistical inference for the two – parameter Birnbaum – Saunders distribution*", Computational Statistics and Data Analysis, Vol. 51, pp. 4656 – 4981**
3. **Dong Shang Chang & Loon Ching Tang, (1993), "*Reliability Bounds and Critical Time for the Birnbaum- Saunders Distribution*", IEEE Trans. on Reliability, Vol. 42, No. 3**
4. **H. K. T. Ng , D. Kundo & N. Balakrishnan, (2003), "*Modified moment estimation for the two – parameter Birnbaum – Saunders distribution*", Computational Statistics and Data Analysis Vol. 43, pp. 283 – 298**
5. **J. R. Rieck, (1999), "*A Moment – generating function with application to the Birnbaum – Saunders distribution*", Communications in Statistcs – Theory and Methods, Vol. 28, pp. 2213 – 2222.**

……………………………………………………………….

……………………………………

………………..