دراسة مقارنة في تقدير دالة المعولية لانموذج ليندلي للاجهاد والمتانة

أ.م.د عبد الرحيم خلف راهي* فراس منذر جاسم**

المستخلص:

تم في هذا البحث تقدير دالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة وذلك بإستخدام إثنين من الطرائق المهمة الطريقة الاولى هي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) والتي تضمنت طريقة البوتستراب (Bootstrap) لحل معادلات الإمكان غير الخطية وإيجاد خصائص المقدر ، والطريقة الثانية هي طريقة بيز القياسية (Standard Bayes Method) بإستخدام دالة كثافة إحتمالية أولية مرافقة طبيعية ودالتي خسارة مربع الخطأ والإنتروبي ، وتوظيف طريقة مصفوفة ماركوف مونت كارلو(Markov Chain Monte Carlo) بإسلوب المعاينة (Importance Sampling) في إيجاد التكاملات المعقدة للتوزيع اللاحق وتم إجراء مقارنة بين أفضلية هذه الطرائق في الجانب التجريبي من خلال إسلوب المحاكاة بإستخدام طريقة مونت كارلو(Monte Carlo) ، وإجراء عدة تجارب مستخدمين المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) لغرض الحصول على أفضل طريقة تقدير، وتم التوصل الى أن طريقة بيز القياسية هي الأفضل نسبياً .

Abstract

In this research the estimation of Reliability of the Stress-strength Model for Lindley Distribution has been made by using two important methods ,the first method is the Maximum Likelihood Method which consists the Bootstrap technique to solve the non-linear equations ,the second methods is the Standard Bayes method by using natural conjugate prior and Squared Error, Entropy loss functions , the Bayes Method includes using Markov Chain Monte Carlo approximate method to find the posterior,s complex integrations. A comparison has been made between the MLE and Bayes methods in the experimental aspect to find the best method through simulation by using the Monte Carlo Method. Several experimentations have been made by using the Mean Square Error (MSE), the finding results shows comparative advantage for Standard Bayes method .

1- المقدمة : (Introduction)

يصف إنموذج الإجهاد – المتانة (Stress-Strength Model) بمفهومه العام طبيعة العلاقة بين متغيرين عشوائيين أحدهما يمثل الإجهاد والاخر يمثل المتانة , ويتلخص هذا المفهوم في إيجاد أو تقدير إحتمال أن يتجاوز أحد المتغيرين المتغير الاخر ويعود الاساس التطبيقي لهذا الإنموذج الى بدايات القرن

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .
** باحث .

بحث مستل من رسالة ماجستير
مقبول للنشر بتأريخ 2013/5/30

العشرين في مجال العلوم الاجتماعية ، الا أن التطور التكنولوجي الذي شهده العالم أدى الى التوسع في المجالات التطبيقية لهذا الإنموذج وخاصة في مجالي الأنظمة الهندسية والصناعية والذي تشكل فيهما دالة المعولية (Reliability Function) العصب الأساسي لتقييم عمل مكونات تلك الأنظمة سواءاً كانت معدات او مكائن او أجهزة ، وما لهذه الدالة من أثر كبير في تحسين الأداء والكفاءة كونها تمثل إحتمال بقاء المكون في نظام ما عاملا بمرور الزمن , كذلك الحال بالنسبة الى دالة معولية إنموذج الإجهاد-المتانة فهي أيضاً تعتبر مقياسا لكفاءة أداء مكونات الأنظمة ولكن ليس بالنسبة الى الزمن فقط بل نسبة الى متغير الإجهاد العشوائي , إذ تعرف على انها إحتمال نجاح المكون في نظام ما في أداء عمله إذا الإجهاد الواقع عليه أقل من متانته . وتختلف المجالات التطبيقية لإنموذج الإجهاد-المتانة بإختلاف المتغيرات العشوائية التي تتألف منها مجتمعات أنظمة المعولية ، فمنها أنظمة بسيطة تتكون من مجتمعات لها توزيعات إحتمالية منفردة (Single Distributions) ، ومنها أنظمة معقدة وغير متجانسة تفرض على الباحثين في هذا الجانب إستخدام توزيعات إحتمالية تتوافق مع سلوك المتغيرات العشوائية التي تتألف منها مجتمعات تلك الأنظمة ، وهي التوزيعات المعممة (Generalized Distributions) ، والتوزيعات المختلطة (Mixed Distributions) ، ويعد توزيع ليندلي (Lindley Distribution) أحد التوزيعات المختلطة المستمرة المهمة التي تستخدم في المجالات التطبيقية للمعولية بصورة عامة لما يمتاز به من مرونة عالية كانموذج للفشل ، وفي المجالات التطبيقية لمعولية إنموذج الإجهاد- المتانة بصورة خاصة كونه يتصف بميزة تمثيل الأنظمة التي تتألف من مجتمعات غير متجانسة .

2- هدف البحث : (Research's Purpose)

يهدف هذا البحث في جانبه النظري الى إيجاد مقدري دالة المعولية لإنموذج الإجهاد والمتانة بإستخدام طريقتي الإمكان الأعظم وبيز القياسية بإفتراض أن متغيري المتانة والإجهاد العشوائيين مستقلين ويتبعان توزيع ليندي، ومن ثم المقارنة بين مقدري الطريقتين لغرض التوصل الى أفضل طريقة لتقدير هذه الدالة بإستخدام تقنيات إعادة المعاينة والأساليب التقريبية ذات الصلة بإسلوب المحاكاة بطريقة (Monte-Carlo) وبالإعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ(MSE) .

3- الجانب النظري : (Theoretical Part)

3-1 توزيع ليندلي : (Lindley Distribution)

توزيع ليندلي أحد التوزيعات المختلفة المستمرة إقترحه الباحث (D.V.Lindley) في دراسة حول بناء الإحصاءات البيزية[17] ، وهو توزيع ناتج من خلط متغيرين عشوائيين أحدهما يتبع التوزيع الاسي بمعلمة قياس (Scale Parameter) θ ، والاخر يتبع توزيع كاما بمعامتي قياس وشكل Shape (Parameter) ، θ و 2 على التوالي ، وفقاً لصيغة الخلط الاتية :

$$f(x;\theta)=\sigma f_1(x;\theta)+(1-\sigma)f_2(x;\theta) \qquad ,\sigma=\frac{\theta}{1+\theta}\ ,\sigma,\theta>0 \quad \text{........(1)}$$

لذا فأن المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ليندلي تكون له دالة كثافة احتمالية (p.d.f) وفق الصيغة الاتية :

$$f(x;\theta)=\frac{\theta^2}{(1+\theta)}(1+x)e^{-\theta x} \qquad ,x>0\,,\theta>0 \qquad \text{........(2)}$$

وله دالة الكثافة التراكمية (c.d.f) الاتية :

$$F(x;\theta)=1-\left\{1+\frac{\theta}{(1+\theta)}x\right\}e^{-\theta x} \qquad ,x>0,\theta>0 \qquad \text{........(3)}$$

لذلك فإن دالة المعولية ستكون :

$$R(x;\theta)=1-F(x;\theta)=\frac{1+\theta+\theta x}{1+\theta}e^{-\theta x} \qquad ,x>0\,,\theta>0 \qquad \text{........(4)}$$

وإن دالة الإخفاق (Hazard Function) ستكون :

$$H(x;\theta)=\frac{f(x;\theta)}{R(x;\theta)}=\frac{\theta^2(1+x)}{1+\theta(1+x)} \qquad ,x>0,\theta>0 \qquad \text{........(5)}$$

وإذا كان المتغيران العشوائيان المستقلان (X) الذي يمثل المتانة و (Y) الذي يمثل الإجهاد لهما دالتي كثافة إحتمالية معرفتان وفقا للمعادلة (2) بمعلمتي قياس θ_1 و θ_2 على التوالي , فإنه يمكن إيجاد دالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة كما يأتي :

$$R(\theta_1,\theta_2)=\int_0^\infty\int_0^x f(y;\theta)\,f(x;\theta)\,dydx$$

$$R(\theta_1,\theta_2) = 1 - \left[\frac{\theta_1^2\{\theta_1(\theta_1+1)+\theta_2(\theta_1+3)(\theta_2+1)+\theta_2^2(2\theta_1+3)+\theta_2^3\}}{(\theta_1+1)(\theta_2+1)(\theta_1+\theta_2)^3} \right] \quad \text{........ (6)}$$

وقد بين الباحث Ghitany (2008) [10] العديد من الخصائص التي يمتاز بها هذا التوزيع , منها مرونته العالية كإنموذج للفشل والبقاء ، وإمكانية دمجه ببعض التوزيعات المتقطعة كتوزيع (Poisson) وتوزيع (Negative Binonial) لإيجاد توزيعات جديدة تصف بعض الظواهر النادرة ، والجدول الاتي يمثل بعض الخصائص والدوال المهمة لتوزيع ليندلي .

جدول (1)
بعض خصائص ودوال توزيع ليندلي

	الخاصية او الدالة	الصيغة
1	المتوسط (Mean)	$\mu(x) = \frac{\theta+2}{\theta(\theta+1)}$
2	التباين (Variance)	$Var(x) = \frac{\theta^2+4\theta+2}{\theta^2(\theta+1)^2}$
3	الوسيط (Meadian)	$M(x) = 1 - \frac{2}{\theta+1}e^{-(1-\theta)}$
4	المنوال (Mode)	$m(x) = \frac{1-\theta}{\theta}$
5	الالتواء (Skewness)	$C.S. = \frac{2(\theta^3+6\theta^2+6\theta+2)}{(\theta^2+4\theta+2)^{3/2}}$
6	التفلطح (Kurtosis)	$c.k. = \frac{3(3\theta^4+24\theta^3+44\theta^2+32\theta+8)}{(\theta^2+4\theta+2)^2}$
7	الدالة المولدة للعزوم (m.g.f)	$\mu_x(t) = \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\theta}{\theta-t}\right) + \frac{1}{1+\theta}\left(\frac{1}{\theta-t}\right)^2$
8	الدالة المميزة (ch. f)	$\emptyset_x(it) = \frac{\theta^2(\theta-it+1)}{(\theta+1)(\theta-it)^2}$

2-3 طرائق تقدير دالة المعولية لانموذج ليندلي للإجهاد والمتانة :

1-2-3 طريقة الإمكان الاعظم : (Maximum Liklelihood method)

تعد طريقة الإمكان الأعظم من أهم طرائق التقدير التقليدية التي تهدف الى جعل دالة الإمكان (Liklelihood Function) في نهايتها الصغرى ، وتتمتع مقدرات هذه الطريقة بخصائص جيدة أهمها خاصية الثبات (Invariance Property) .

فإذا كانت (x_1 , x_2 , ... , x_n) و (y_1 , y_2 ,...., y_m) عينتان عشوائيتان مستقلتان لمشاهدات متغيري المتانة والإجهاد اللذان يتبعان توزيع ليندلي بالمعلمتين θ_1 و θ_2 على التوالي فان دالة الإمكان المشتركة لمشاهدات المتغيرين تكون :

$$L(x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots y_n|\theta_1,\theta_2) = \frac{\theta_1^n\theta_2^m}{(1+\theta_1)^n(1+\theta_2)^m}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\prod_{j=1}^{m}(1+y_j)\, e^{-\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j} \quad \text{.... (7)}$$

وبأخذ اللوغريتم الطبيعي ، والإشتقاق الجزئي لطرفي المعادلة (7) بالنسبة الى المعلمتين θ_1 و θ_2 ومساواة الناتجين بالصفر نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لهاتين المعلمتين وكما يأتي :

$$\widehat{\theta_1} = \frac{-(\bar{x}-1)+\sqrt{(\bar{x}-1)^2-8\bar{x}}}{2\bar{x}} \quad \text{........(8)}$$

$$\widehat{\theta_2} = \frac{-(\bar{y}-1)+\sqrt{(\bar{y}-1)^2-8\bar{y}}}{2\bar{y}} \quad \text{........(9)}$$

وبتعويض المعادلتين (8) و (9) في المعادلة (6) إعتماداً على خاصية الثبات نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم لدالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة وكما يأتي :

$$\widehat{R_{ML}}(\theta_1,\theta_2) = R(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2}) = 1 - \left[\frac{\widehat{\theta_1^2}\{\widehat{\theta_1}(\widehat{\theta_1}+1)+\widehat{\theta_2}(\widehat{\theta_1}+3)(\widehat{\theta_2}+1)+\widehat{\theta_2^2}(2\widehat{\theta_2}+3)+\widehat{\theta_2^3}\}}{(\widehat{\theta_2}+1)(\widehat{\theta_1}+1)(\widehat{\theta_1}+\widehat{\theta_2})^3}\right] \quad \text{...(10)}$$

نلاحظ إن صيغة دالة المعولية في المعادلة (10) هي صيغة معقدة وذات درجة عالية من اللاخطية , وإن إيجاد مقدر الإمكان الأعظم بالطرق الرياضية المباشرة ليس سهلاً ، فضلاً عن كونه مقدر متحيز ، لذا سنلجأ الى إستخدام تقنية (Parametric Bootstrap) لإيجاد ودراسة خصائص المقدر كمقدار التحيز ومتوسط مربعات الخطأ .

1-1-2-3 تقنية البوتستراب : (Bootstrap Technique)

هي إحدى تقنيات اعادة المعاينة الاحصائية ذات الصلة باساليب المحاكاة بطريقة (Monte Carlo) اقترحها الباحث(1979) Efron [9] ، وتهدف هذه التقنية الى الحصول على مقدرات غير متحيزة او قليلة التحيز من بين مجموعة من المقدرات المتحيزة وذلك بإبدال عدد من العينات المسحوبة بشكل عشوائي مع الارجاع من البيانات المشاهدة سواءا كانت بيانات كاملة او بيانات العينة ، وهذه العينات المسحوبة تسمى (Bootstrap Samples) ، فإذا كانت لنا معرفة بالتوزيع الاحتمالي لبيانات العينة الأصلية فإن تقنية إعادة المعاينة المتبعة في هذه الحالة تكون معلمية (Parametric Bootstrap) وسنرمز لها (PB) .
ان تقنية (PB) هي تقنية حسابية تكرارية فكرتها الاساسية تقوم على توليد عدد كبير من العينات المسحوبة مع الارجاع من بيانات عينة عشوائية ولتكن (x_1 , x_2 , ... , x_n) والتي لها دالة توزيع تراكمية $F(x;\theta)$ ، فإذا كان مقدر طريقة الامكان الاعظم لمعلمة التوزيعθ ممكنا وموجودا وليكن$\hat{\theta}$, عندئذ يمكن ايجاد تقديرات دالة التوزيع التراكمية وذللك بإستبدال معلمة التوزيع θ بمقدرها $\hat{\theta}$ ، وبسحب عينات عشوائية من دالة التوزيع التراكمية المقدرة $F(x;\hat{\theta})$ ولتكن $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ وايجاد مقدرالإمكان الأعظم للمعلمة θ لمشاهدات عينات البوتستراب (Bootstrap) وليكن $\hat{\theta}^*$ وتعويضه في المعادلة (5) وتكرار العملية (B) من المرات يمكن ان نحصل على متوسط مقدار التحيز لمقدردالة المعولية كما ياتي :

$$E(R^{\wedge *}) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\widehat{R_i^*} - R_i) \qquad ....(11)$$

وإن متوسط مربعات الخطأ هو :

$$MSE(R^{\wedge *}) = \frac{1}{B}\sum_{i=1}^{B}(\widehat{R_i^*} - R_i)^2 \qquad ....(12)$$

2-2-3 طريقة بيز القياسية : (Standard Bayes Method)

تعد طريقة بيز القياسية من الطرائق البيزية الشائعة الإستخدام والتي تعتمد على دمج دالة التوزيع السابق بدالة الإمكان بإستخدام صيغة بيز العكسية (Inverson Bayes Formula) للحصول على التوزيع اللاحق(Posterior Distribution) ، وبتوفر دالة الخسارة (Loss Function) فان مقدر بيز القياسي للمعلمة المراد تقديرها هو المقدر الذي يجعل الخسارة المتوقعة للتوزيع اللاحق اقل مايمكن ، والجدول (2) يوضح دوال الخسارة المستخدمة في هذا البحث ومايقابلها من مقدرات طريقة بيز القياسية لدالة المعولية لإنموذج الإجهاد والمتانة .

جدول(2)
دوال الخسارة ومايقابلها من مقدرات بيز القياسية

مقدر بيز القياسي	الصيغة	دالة الخسارة
$\widehat{R_{SB}}(\theta_1,\theta_2) = E\{R(\theta_1,\theta_2)\mid\pi(\theta_1,\theta_2\mid x,y)\}$	$L\{\hat{R}(\theta_1,\theta_2),R(\theta_1,\theta_2)\} = \{\hat{R}(\theta_1,\theta_2),R(\theta_1,\theta_2)\}^2$	مربع الخطأ
$\widehat{R_E}(\theta_1,\theta_2) = E[\{R(\theta_1,\theta_2)\}^{-p}\mid\pi(\theta_1,\theta_2\mid x,y)]^{-\frac{1}{p}}$	$L\{\hat{R}(\theta_1,\theta_2),R(\theta_1,\theta_2)\} = \{\frac{R(\theta_1,\theta_2)}{\hat{R}(\theta_1,\theta_2)}\}^p - Pln\left\{\frac{\hat{R}(\theta_1,\theta_2)}{R(\theta_1,\theta_2)}\right\} - 1$	الانتروبي العامة

وسيتم إيجاد مقدر بيز القياسي لدالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة بإفتراض أن دالة التوزيع السابق المعلوماتية المرافقة الطبيعية المشتركة (Joint Natural Conjugate Prior Disrtibution) للمعلمتين العشوائيتين المستقلتين هي الدلة المشتركة لتوزيعي كاما المستقلين بالمعلمات الفوقية (α_1,β_1)و(α_2,β_2) على التوالي ، وذلك إستنادا الى دالة الامكان المشتركة لمشاهدات عينتين عشوائيتين مستقلتين بحجم n و m لمتغيري المتانة والإجهاد على التوالي , وصيغتها التناسبية هي :

$$L(x_1,x_2,\dots x_n,y_1,y_2,\dots y_n\mid\theta_1,\theta_2) \propto \frac{\theta_1^n\theta_2^m}{(1+\theta_1)^n(1+\theta_2)^m}e^{-\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j} \qquad .....(13)$$

حيث إن الصيغة التناسبية لدالة التوزيع السابق المرافقة الطبيعية المشتركة تكون :

$$\pi(x,y\mid\theta_1,\theta_2) \propto \theta_1^{\alpha_1-1}\theta_2^{\alpha_2-1}e^{-\beta_1\theta_1}e^{-\beta_2\theta_2} \qquad ....(14)$$

لذلك فإن الصيغة التناسبية لدالة التوزيع اللاحق المشتركة وفقا لصيغة بيز العكسية ستكون :

$$\pi(\theta_1,\theta_2\mid x,y) \propto \frac{\theta_1^{2n+\alpha_1-1}\theta_2^{2m+2-1}}{(1+\theta_1)^n(1+\theta_2)^m}e^{-\theta_1\sum_{i=1}^{n}x_i}e^{-\theta_2\sum_{j=1}^{m}y_j} \qquad ....(15)$$

وبالإعتماد على الجدول (2) فإن صيغتي مقدر طريقة بيز القياسية لدالة المعولية لانموذج ليندلي للاجهاد والمتانة باستخدام دالتي خسارة مربع الخطأ والانتروبي العامة ستكون وعلى التوالي وفقا للمعادلتين الاتيتين:

$$\widehat{R_{BS}}(\theta_1,\theta_2)=\frac{\iint_0^\infty \frac{R(\theta_1,\theta_2)\theta_1^{2n+\alpha_1-1}\theta_2^{2m+\alpha_2-1}}{(1+\theta_1)^n(1+\theta_2)^m} e^{-\theta_1(\beta_1+\sum_{i=1}^n x_i)} e^{-\theta_2(\beta_2+\sum_{j=1}^m y_j)} d\theta_1 d\theta_2}{\int_0^\infty \frac{\theta_1^{2n+\alpha_1-1}}{(1+\theta_1)^n} e^{-\theta_1(\beta_1+\sum_{i=1}^n x_i)} d\theta_1 \int_0^\infty \frac{\theta_2^{2m+2-1}}{(1+\theta_1)^m} e^{-\theta_2(\beta_2+\sum_{j=1}^m y_j)} d\theta_2} \quad \text{.....(16)}$$

$$\widehat{R_{BG}}(\theta_1,\theta_2)=$$
$$\left[\frac{\iint_0^\infty \frac{\{R(\theta_1,\theta_2)\}^{-p}\theta_1^{2n+\alpha_1-1}\theta_2^{2m+\alpha_2-1}}{(1+\theta_1)^n(1+\theta_2)^m} e^{-\theta_1(\beta_1+\sum_{i=1}^n x_i)} e^{-\theta_2(\beta_2+\sum_{j=1}^m y_j)} d\theta_1 d\theta_2}{\int_0^\infty \frac{\theta_1^{2n+\alpha_1-1}}{(1+\theta_1)^n} e^{-\theta_1(\beta_1+\sum_{i=1}^n x_i)} d\theta_1 \int_0^\infty \frac{\theta_2^{2m+2-1}}{(1+\theta_1)^m} e^{-\theta_2(\beta_2+\sum_{j=1}^m y_j)} d\theta_2}\right]^{-\frac{1}{p}} \quad \text{..(17)}$$

نلاحظ من خلال المعادلتين (16) و(17) صعوبة إيجاد مقدري طريقة بيز القياسية لدالة المعولية بصورة مباشرة لذلك سيتم إستخدام طريقة (Markov Chain Monte Carlo) وسنرمز لها (MCMC) ، بتوظيف إسلوب المعاينة (Importance Sampling) ، وهي من الطرائق التقريبية التي تمتاز بالحداثة والدقة في ايجاد التكاملات البيزية فضلاً عن سهولة استخدامها وقربها من الواقع.

4-2-2-1 طرائق سلسلة ماركوف مونت كارلو : (MCMC)

ظهرت في الاونة الاخيرة إهتمامات واسعة بطرائق (MCMC) لمعالجة مختلف المسائل العلمية والتقنية التي تتضمن تكامل دوال معقدة ومتعددة الأبعاد وحجوم عينات صغيرة ، والتي تفشل الطرائق المباشرة وطرائق التكامل التقريبية في حلها ، إذ تمثل طرائق (MCMC) الخيار الاخير كونها تقدم الحل لأي تكامل مهما كانت ظروفه ، وسميت بهذا الإسم لإعتمادها على مبدأ سلسلة ماركوف (Markov Chain) وطريقة (Carlo Monte) حيث يتم إستخدام قيم العينة السابقة لتوليد قيم عينة لاحقة عشوائياً وبإسلوب التكرار تتولد سلسلة من الإحتمالات الانتقالية بحث أن كل إحتمال انتقالي بين قيم العينة هو دالة بقيم العينة الأكثر حداثة . وتعتبر مسائل طرائق بيز وخاصة مسألة إيجاد حل تكاملات التوزيع اللاحق المعقدة نسبيا من اكثر المسائل شيوعا التي تستخدم فيها طرائق (MCMC) ، حيث يتم إيجاد التكامل لهذه المسائل إستناداً الى فكرة معاينة دالة التوزيع المستخدمة عند (n) من النقاط الموزعة عشوائياً داخل منطلق التكامل وهي فكرة مبنية على أساس نظرية القيمة الوسطى لحسبان التفاضل والتكامل ، حيث تزداد دقة هذه الطرائق بزيادة ابعاد التكامل وإن معدل التقارب يتناسب عكسيا مع الجذر التربيعي لحجم العينة ، كما أشار الباحث Gould(2002)[11] وتختلف أساليب وتقنيات المعاينة المستخدمة وفقاً لطرائق (MCMC) بإختلاف طبيعة التكامل المراد إيجاده فمنها المباشرة مثل اسلوب (Simple Sampling) ومنها غيرالمباشرة مثل (Gibbis Sampling) و (Importance Sampling) وغيرها من الطرائق[20] .

وفي هذا البحث سيتم إستخدام إسلوب المعاينة (Importance Sampling) ، ولتوضيح الية إحتساب التكامل التقريبي لمقدر بيز القياسي بموجب هذا الإسلوب ، لتكن ($x_1 , x_2 , \ldots , x_n$) عينة عشوائية لمشاهدات المتغير العشوائي (x) بدالة كثافة احتمالية $(x;\theta)$, ودالة إمكان $L(x;\theta)$, ودالة توزيع احتمالي سابق $\pi(\theta)$ للمعلمة θ ، ودالة توزيع احتمالي لاحق $\pi(\theta|x)$ ، وإن $g(\theta)$ هي دالة بالمعلمة θ ، فإذا كانت الصيغة العامة للتكامل لمقدر بيز القياسي للدالة $g(\theta)$ وليكن $g_B(\theta)$ وفقا للصيغة الاتية :

$$G=\widehat{g_B}(\theta)=E\{g(\theta|x)\}=\int_{\forall\theta} g(\theta)\pi(\theta|x)d\theta \quad \text{........(18)}$$

فإنه يمكن توليد المعلمات $\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n$ من دالة التوزيع الاحتمالي اللاحق مباشرةً ويكون الناتج التقريبي للتكامل بطريقة (MCMC) المباشرة كما ياتي :

$$\widehat{G}\approx\frac{\sum_{i=1}^n g(\theta_i)}{n} \quad \text{........(19)}$$

وإن متوسط مربعات الخطأ للتكامل التقريبي يكون :

$$MSE(\widehat{G})\approx\frac{\sum_{i=1}^n\{g(\theta_i)-\widehat{G}\}^2}{n} \quad \text{........(20)}$$

اما إذا كانت صيغة تكامل مقدر بيز القياسي بالشكل الاتي :

$$\int_{\forall\theta} g(\theta)\frac{p(\theta)}{q(\theta)}q(\theta)d(\theta) \qquad ,q(\theta)>0 \ \ if \ \ p(\theta)>0 \quad \text{........(21)}$$

وهي صيغة لايمكن من خلالها توليد المعلمات $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ بصورة مباشرة من التوزيع الاحتمالي اللاحق ، لذلك يتم إستخدام اسلوب (Importance Sampling) ، وذلك بتوليد المعلمات بشكل تقريبي من خلال إجراء تحويل على دالة التوزيع الاحتمالي اللاحق ، وإن الناتج التقريبي لهذا التكامل يكون :

$$\widehat{G} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(\theta_i)\frac{p(\theta_i)}{q(\theta_i)} \quad ,\theta_i \sim q(\theta_i) \qquad \dots\dots\dots(22)$$

ولما كانت صيغة التكامل لمقدر بيز القياسي لدالة المعولية هي :

$$\widehat{G} = \widehat{R_B}(\theta_1,\theta_2) = \frac{\iint_{\forall\theta_1\forall\theta_2} R(\theta_1,\theta_2)\pi(\theta_1,\theta_2)L(x,y|\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2}{\int_{\forall\theta_1}\pi(\theta_1)L(x|\theta_1)d\theta_1 \int_{\forall\theta_2}\pi(\theta_2)L(y|\theta_2)d\theta_2} \qquad \dots\dots\dots(23)$$

والتي يمكن كتابتها وفقاً للصيغة الاتية :

$$G = \frac{\iint_{\forall\theta_1\forall\theta_2} R(\theta_1,\theta_2)w(\theta_1,\theta_2)h(\theta_1,\theta_2)d\theta_1 d\theta_2}{\int_{\forall\theta_1} w(\theta_1)h(\theta_1)d\theta_1 \int_{\forall\theta_2} w(\theta_2)h(\theta_2)d\theta_2} \qquad \dots\dots\dots(24)$$

حيث ان $h(\theta_1,\theta_2)$ تسمى بدالة (Importance) وهي دالة يمكن من خلالها توليد المعلمتين θ_1 و θ_2 لتعطي قيم تقريبية لدالة التوزيع الاحتمالي اللاحق ، اي ان :

$$h(\theta_1,\theta_2) \propto \pi(\theta_1,\theta_2)\, L(x,y|\theta_1,\theta_2) \qquad \dots\dots\dots(25)$$

وان $w(\theta_1,\theta_2)$ هي دالة موزونة معرفة بالشكل الاتي :

$$w(\theta_1,\theta_2) = \frac{\pi(\theta_1,\theta_2)\, L(x,y|\theta_1,\theta_2)}{h(\theta_1,\theta_2)} \qquad \dots\dots\dots(26)$$

وبتعويض الدوال $h(\theta_1,\theta_2)$ ، $w(\theta_1,\theta_2)$ في المعادلة (24) ، وباستخدام المعادلة (22) وتكرار توليد θ_1 و θ_2 نحصل على التكامل التقريبي لمقدر بيز القياسي للدالة $R(\theta_1,\theta_2)$ لإنموذج ليندلي بإستخدام إسلوب (Importance Sampling) وهو :

$$\widehat{G} = \widehat{R_B}(\theta_1,\theta_2) \approx \sum_{i=1}^{n} R_i(\theta_{1i},\theta_{2i})W_i(\theta_{1i},\theta_{2i}) \qquad \dots\dots\dots(27)$$

حيث إن :

$$W_i(\theta_{1i},\theta_{2i}) = \frac{h(\theta_1,\theta_2)}{\sum_{i=1}^{n} h(\theta_{1i},\theta_{2i})} \qquad \dots\dots\dots(28)$$

$$h(\theta_1,\theta_2) = \frac{1}{(1+\theta_{1i})^n(1+\theta_{2i})^m} \qquad \dots\dots\dots(29)$$

وإن متوسط مربعات مربعات الخطأ للتكامل التقريبي يكون :

$$MSE(\widehat{G}) \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}\{\widehat{R_{Bi}}(\theta_{1i},\theta_{2i})-\widehat{G}\}^2}{n} \qquad \dots\dots\dots(30)$$

4- الجانب التجريبي : (Expremental Part)

في هذا الجانب سنقوم ببناء ووصف تجارب المحاكاة ، بإستخدام البرنامج (Mathematica9) ، وتضمنت المراحل الاتية :

المرحلة الاولى :

1- إختيار القيم الافتراضية للمعلمتين θ_1 و θ_2 وكما ياتي :

$$\theta_1 = (0.5, 1, 1.5, 2)$$
$$\theta_2 = (2, 2.5, 3, 3.5)$$

وعليه فإن هنالك (16) تجربة للمحاكاة .

2- إحتساب القيم الحقيقية لدالة معولية الإجهاد والمتانة وفقاً للمعادلة (5) .

3- إختيار حجوم العينات الإفتراضية لمشاهدات متغيري المتانة X , والإجهاد Y ، ولتكن ، (n=m=15 , 30 , 50)

المرحلة الثانية :

في هذه المرحلة سيتم توليد بيانات المتغيرين العشوائيين X و Y اللذان يتبعان توزيع ليندلي بالمعلمتين θ_1 و θ_2 على التوالي ، إعتماداً على قيم المعلمات وحجوم العينات المفترضة في المرحلة الاولى ، ووفقاً لطريقة (Monte Carlo) بإسلوب المعاينة (Accept-Reject) ، وذلك بإتباع الخطوات الأتية :

1- توليد المتغير العشوائي U_i الذي يتوزع توزيعاً منتظماً بالفترة(0,1) ، أي ان :

$$U_i \sim Uniform(0,1) \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

2- توليد المتغيرين العشوائيين W_i , V_i , إذ أن :

$$V_i \sim Exponential(\theta) \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

$W_i \sim Gamma(2,\theta) \qquad ,i=1,2,\dots,n$

3- فإذا كان $U_i \le \sigma = \frac{\theta}{\theta+1}$ ، فإن $x_i, y_j = v_i$ ، وخلافاً لذلك فإن $x_i, y_j = w_i$ ، حيث أن (i=1,2,…,n, j=1,2,….,m, n=m)

4- إن تكرار الخطوات (1-3) هو (K=1000) .

المرحلة الثالثة :

هذه المرحلة تتضمن تقدير دالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة وكما يأتي :

أ- تضمنت طريقة الإمكان الأعظم الخطوات الاتية:

1- باستخدام بيانات العينات ($x_1, x_2, \dots, x_n$) و ($y_1, y_2, \dots, y_m$) المولدة في المراحل السابقة يتم حساب $MLE(\widehat{\theta_1},\widehat{\theta_2})$ للمعلمتين θ_1 و θ_2 وذلك من خلال المعادلة (10) .

2- يتم توليد عينات البوتستراب $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ و $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ المستقلة التي تتبع توزيعي ليندلي بالمعلمتين $\widehat{\theta_1}$ و $\widehat{\theta_2}$ ومن ثم حساب $MLE(\widehat{\theta_1^*},\widehat{\theta_2^*})$ للمعلمتين θ_1 و θ_2, وايجاد مقدر البوتستراب إذ أن $\widehat{R}^*(\theta_1,\theta_2) = R(\widehat{\theta_1^*},\widehat{\theta_2^*})$.

3- بإعادة الخطوة (2) (B) من المرات حيث أن (B=5000) نحصل على مقدرات البوتستراب للدالة (R) ولتكن $(\widehat{R_1^*},\widehat{R_2^*},\dots,\widehat{R_B^*})$.

ب- ولإيجاد مقدرات طريقة بيز القياسية نتبع الخطوات الاتية :

1- توليد المعلمات θ_{21} و θ_{11} من دالة التوزيع اللاحق وكما يأتي :

$$\theta_{11} \sim Gamma(\theta_1; \alpha_1 + 2n - 1, \beta_1 + \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

$$\theta_{21} \sim Gamma(\theta_2; \alpha_2 + 2m - 1, \beta_2 + \sum_{j=1}^{m} y_i)$$

وبإفتراض أن المعلمات الفوقية$(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$ لدالة التوزيع السابق والمعرفة بالمعادلة (14) معلومة ، إذ تم اختيار قيمها الافتراضية الاتية :

$(\alpha_1 = 3, \beta_1 = 6, \alpha_2 = \beta_2 = 3)$.

2- تكرار الخطوة (1) , (K=1000) للحصول على $(\theta_{11},\theta_{21}),(\theta_{12},\theta_{22}),\dots,(\theta_{1K},\theta_{2K})$

3- إستخدام المعادلات (6) , (16) , (17) , (27) , (28) , (29) فإنه يمكن ايجاد مقدرات بيز $\widehat{R_{BEi}}(\theta_{1i},\theta_{2i})$ و $\widehat{R_{BSi}}(\theta_{1i},\theta_{2i})$ ، مع افتراض ان (P=-2) عند تطبيق دالة خسارة الانتروبي .

المرحلة الرابعة :

يتم في هذه المرحلة المقارنة ما بين طرائق التقدير وذلك بإستخدام المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) ووفقاً للمعادلتين (12) و (30) .

5- الاستنتاجات والتوصيات :

من خلال تنفيذ تجارب المحاكاة وبناءً على ما تم تحليله من نتائج الجانب التجريبي المبينة في الملحق فقد تم التوصل الى الإستنتاجات والتوصيات الآتية :

1- إن قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) تتناقص بزيادة حجم العينة ولجميع طرائق التقدير مع تقارب بين المقدرات وذلك يتطابق مع النظرية الإحصائية .

2- أفضلية واضحة لطريقة بيز القياسية في تقدير دالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة كلما كان حجم العينة صغير ، وأفضلية نسبية لطريقة الإمكان الأعظم كلما كبر حجم العينة .

3- الزيادة في دقة مقدر بيز القياسي بصورة عامة كلما إزدادت قيمة معلمة المتانة θ_1 مع أفضلية المقدربإستخدام دالة الإنتروبي بصورة خاصة , أذ نلاحظ تناقص واضح في قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) .

4- يوصي الباحثان بإعتماد طريقة بيز القياسية في تقدير دالة معولية إنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة في حالة حجوم العينات الصغيرة ، وإستخدام أوسع لدوال الخسارة المختلفة وأنواع اخرى من دوال التوزيعات السابقة.

5- يوصي الباحثان بإستخدام الطرائق العددية الأخرى في حل معادلات الإمكان غير الخطية كطريقة نيوتن - رافسن ومقارنتها مع إسلوب البوتستراب .

6- إستخدام طرائق تقريبية اخرى في ايجاد حل لتكاملات طريقة بيز القياسية المعقدة مثل تقريب ليندلي , كذلك توظيف دوال خسارة اخرى في إيجاد هذا المقدر .

7- تطوير وإشتقاق الطرائق الأخرى المستخدمة في تقدير دالة المعولية لإنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة كطريقة المربعات الصغرى وطريقة المقدر المنتظم ذي اقل تباين .

6- المصادر :

1-6 المصادر العربية :

1- ذنون ، باسل يونس ، (2008) . دراسة مقارنة بين الطرائق العددية الكلاسيكية وطرائق المونت كارلو، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية العدد(13)،ص(1-9) .

2- كاظم ، مريم حسون،(2003) . البوتستراب في تحليل نماذج الانحدار ، اطروحة دكتوراة ، كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .

3- عويد ، غزوان رفيق،(2012) . مقارنة مقدرات بيز لمعلمة ودالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دوال خسارة متزنة وغير متزنة ،رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية.

2-6 المصادر الاجنبية :

4- Al-Mutairi ,D.K., Ghitany ,M.E. & Kundu, D. ,(2009). inferences on stress-strength reliability from lindley distributions

5- Arnold,B.C., Balakrishnan.N,and Najaraja,H.N.,(2008). A first Course in Order Statisti. Philadelphia.

6- Awad,A.M., Gharraf,M.K.,(1986). Estimation of P(Y< X) in the Burr case, A comparative Study . Communications in Statistics Simulation V (15),P(389-403).

7- Bakouch,H.S, Al-Zahrani,B.M,(2012). An extended Lindley distribution. Journal of the Korian Statistical Society,V(41) ,P(75-85)

8- Church,J.D.,Harris,B., The estimation of reliability from stress-strength relationships. Technometrics V(12),P(49–54).

9- Efron, B., Tibshirani, R.J. (1998). An Introduction to Bootstrap. New York: Chapman & Hall .

10- Ghitany, M.E., Atieh, B., Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application, Mathematics and Computers in Simulation V(78),P(493–506).

11- Gould,H.,Tobochnik,J. and Christian,W.(2001).Numerical integration and Monte Carlo methods ,Addison Wesaley.

12- Jarrahiferiz,J.,Mohtashami,G.R and Rezaei,A.H., (2011). The proportional Likelihood ratio order for Lindley distribution.Communication of the Korian Statistical Society V(18),I(4),P(485-493).

13- Kotz, S., Lumelskii, Y., Pensky, M. (2003). The Stress-Strength Model and its Generaliza Tions, Theory and Applications. Singapore,World Scientific Press.

14- Krishnamoorthy, K., Mukherjee, S., Guo, H. (2007). Inference on reliability in two-parameter exponential stress-strength model. Metrika V(65),P(261–273).

15- Kundu, D., Raqab, M.Z. (2005). Comparison of different estimators of P[Y < X] for a scaled Burr type X distribution. Communications in Statistics-Simulation and Computation
V(34),P(465–483).

16- Krishna,H.,Kumar,K.,(2011).Reliability estimation in Lindley distribution with progressively type II right censored sample. Mathematics and Computers in Simulation V(82),P(281–294).

17- Lindley, D.V. (1958). Fudicial distributions and Bayes theorem. Journal of the Royal Statistical Society B .V(20),P(102–107).

18- Mazucheli,J.,Achar,A.J.,(2011).The lindley distribution applied to cometing risks lifetime data.Computer methods and programs in Biomedicine V(104),P(188-192).

19- Raqab, M.Z., Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of P[Y < X] for a scaled Burr type X distribution. Communications in Statistics-Simulation and ComputationV(34),P(465–483).

20- Michel,M.,Tim,S.,(2000).Approximating integrals via Monte Carlo and deterministic method.Oxford University press.

21- Zakerzadeh,H.,Dolati,A.,(2009).Generalized Lindley distribution.Jouranal of mathematical Extension,V(3),I(2),P(13-25).

الملحق

الجدول الاتي يبين قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE)لتقدير دالة المعولية لانموذج ليندلي للاجهاد والمتانة لجميع التجارب

Model (θ_1, θ_2)	(n,m)	MLE	$Bayes_S$	$Bayes_G$	Best
0.5 , 2	(15,15)	0.003951	0.002507	0.003144	$Bayes_S$
	(30,30)	0.001579	0.001248	0.002335	$Bayes_S$
	(50,50)	0.001106	0.001237	0.001228	MLE
0.5 , 2.5	(15,15)	0.002614	0.001521	0.001886	$Bayes_S$
	(30,30)	0.001047	0.000993	0.000802	$Bayes_E$
	(50,50)	0.000681	0.000889	0.000706	MLE
0.5 , 3	(15,15)	0.002452	0.001307	0.001186	$Bayes_S$
	(30,30)	0.000818	0.000582	0.000886	$Bayes_S$
	(50,50)	0.000502	0.000573	0.000166	$Bayes_E$
0.5 , 3.5	(15,15)	0.001294	0.000769	0.001103	$Bayes_S$
	(30,30)	0.000547	0.000430	0.000476	$Bayes_S$
	(50,50)	0.000349	0.000418	0.000354	MLE
1 , 2	(15,15)	0.010741	0.006805	0.010085	$Bayes_S$
	(30,30)	0.004765	0.003672	0.003855	$Bayes_S$
	(50,50)	0.003048	0.003219	0.003190	MLE
1 , 2.5	(15,15)	0.008259	0.005553	0.006168	$Bayes_S$
	(30,30)	0.003627	0.003097	0.003475	$Bayes_S$
	(50,50)	0.002477	0.004186	0.001139	$Bayes_E$
1 , 3	(15,15)	0.006929	0.004013	0.004351	$Bayes_S$
	(30,30)	0.003027	0.002429	0.003002	$Bayes_S$
	(50,50)	0.001942	0.003687	0.002116	MLE
1 , 3.5	(15,15)	0.005138	0.003435	0.006358	$Bayes_S$
	(30,30)	0.002273	0.002872	0.002034	$Bayes_E$
	(50,50)	0.001723	0.003205	0.001527	$Bayes_E$
1.5 , 2	(15,15)	0.012121	0.008332	0.009836	$Bayes_S$
	(30,30)	0.006475	0.006572	0.005883	$Bayes_E$
	(50,50)	0.004484	0.004571	0.003982	$Bayes_E$
1.5 , 2.5	(15,15)	0.115568	0.007475	0.156390	$Bayes_S$
	(30,30)	0.005638	0.004515	0.004430	$Bayes_E$
	(50,50)	0.003673	0.004161	0.004005	MLE
1.5 , 3	(15,15)	0.010362	0.006162	0.009856	$Bayes_S$
	(30,30)	0.005100	0.004366	0.005516	$Bayes_S$
	(50,50)	0.003966	0.004248	0.004110	MLE
1.5 , 3.5	(15,15)	0.008652	0.005477	0.006881	$Bayes_S$
	(30,30)	0.004275	0.004251	0.004159	$Bayes_E$
	(50,50)	0.003258	0.004186	0.003374	MLE
2 , 2	(15,15)	0.013345	0.009489	0.008590	$Bayes_E$
	(30,30)	0.006475	0.006319	0.005262	$Bayes_E$
	(50,50)	0.004252	0.003589	0.004656	MLE
2 , 2.5	(15,15)	0.013365	0.008682	0.011185	$Bayes_S$
	(30,30)	0.006611	0.005587	0.005009	$Bayes_E$
	(50,50)	0.003969	0.004383	0.004014	MLE
2 , 3	(15,15)	0.012269	0.007625	0.006153	$Bayes_E$
	(30,30)	0.006937	0.005747	0.004600	$Bayes_E$
	(50,50)	0.003774	0.004622	0.004149	MLE
2 , 3.5	(15,15)	0.010409	0.009425	0.008951	$Bayes_E$
	(30,30)	0.008284	0.007548	0.005226	$Bayes_E$
	(50,50)	0.003354	0.004285	0.003041	$Bayes_E$

....

....

....