تقدير مُعَولية النظام لبيانات العمليات التصادفية باستخدام المحاكاة

أ.د.احسان كاظم القرشي*   م. ماجد جاسب عبدالله**

المستخلص

المعولية هي احتمال إن النظام أو أحد مكوناته سوف يقوم بوظيفته المطلوبة لمدة من الزمن عند الاستعمال تحت ظروف تشغيلية ملائمة ومن خلال الدراسات والبحوث وجد أنه من السهل حساب معولية أي نظام بسيط باستخدام الطرائق التحليلية المعروفة ، ولكن مع كبر حجم النظام وزيادة تعقيدة تصبح الطرائق التحليلية غير مجدية لتقدير معولية هذه الأنظمة المعقدة والكبيرة هذا من جهة ومن جهة اخرى صعوبة الطرائق التحليلية لمن ليس لديه إلمام بالرياضيات والإحصاء.

التغيرات التي تطرأ على حالة النظام مثلا(يعمل - عطل بسيط - عطل تام) مع الزمن تكون مشابه لسلوك العمليات التصادفيه (سلاسل ماركوف)التي تتغير مع الزمن وعليه يمكن تمثيل حالة النظام كسلسلة ماركوف يمكن تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقاليه لها ومن ثم حساب التوزيع على المدى البعيد لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية ومن ثم تقدير معولية هذا النظام .و تم باستخدام المحاكاة لتوليد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وحساب التوزيع المستقر منه تم حساب معولية النظام .

Abstract

The reliability is the probability of no failure in the system or one of its components to doing its job for interval time when using it under suitable operating conditions. By studies and researches we found that easy to comput the reliability of any simple system by using famous analytic methods , but with large system and increasing complexity become this methods without any benefit to estimate the reliability of such system from one hand ,and from another, difficult of this methods for those who haven't any experience with Math and Statistic.

The changes that happen on the state of the system like (work, simple failure and complete failure) with time become as behavior of Stochastic Process (Markov Chains) that changing with time, we can represent the state of the system like Markov Chains and we can estimate the transitions probability matrix and then computed the equilibrium distribution of transitions probability matrix and then estimate the reliability of the system. We use the simulation to generating the transitions probability matrix and then computed the equilibrium distribution and then estimate the reliability of the system.

المقدمة:

منتصف القرن الماضي ظهرت المعولية (التي تشير إلى الوثوق بالشيء والاعتماد عليه) وازداد الاهتمام بها بعد الانتشار الواسع للصناعة وازدياد التعقيدات الميكانيكية، الكهربائية والالكترونية في المعدات

* رئيس جامعة القادسية .
** هيئة التعليم التقني/ معهد تقني عمارة .
مقبول للنشر بتأريخ 2012/10/9

وكانت البحوث قبل ذلك تقتصر على السيطرة النوعية وصيانة المكائن علماً ان نظرية المعولية (Reliability Theory) تتعامل مع أعمار المُعدات والمكائن ونظرية البقاء (Survival Theory) تتعامل مع احتمالات البقاء ومتوسط الحياة واحتمال أن يكون عمر الخليه او الكائن الحي أكبر من زمن معين وهما يشتركان في قياس طول الحياة سواء أكان للماكنة أو للكائن حي.

ومن خلال الدراسات والبحوث وجد أنه من السهل علينا حساب معولية أي نظام بسيط باستخدام الطرائق التحليلية المعروفة لدينا ، ولكن مع كبر حجم النظام وزيادة تعقيدة تصبح الطرائق التحليلية غير مجدية لتقدير معولية هذه الأنظمة المعقدة والكبيرة هذا من جهة ومن جهة اخرى صعوبة الطرائق التحليلية لمن ليس لديه إلمام بالرياضيات والإحصاء ، وكما هو معروف ان معظم الانظمة هي انظمة معقدة كانظمة الاتصالات والطاقة والانظمة الالكترونية والميكانيكية وغيرها من الانظمة الموجودة في مختلف مجالات الحياة.

ومما تقدم فان التغيرات التي تطرأ على حالة النظام(يعمل - عطل بسيط - عطل تام) مع الزمن تكون مشابه لسلوك العمليات التصادفية التي تتغير مع الزمن وعليه يمكن تمثيل حالة النظام كعملية تصادفية يمكن تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لها ومن ثم حساب التوزيع المستقر لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية ومن ثم تقدير معولية هذا النظام .

الجانب التطبيقي تمثل بالمحاكاة باستخدام برنامج (Matlab-7.10) لتوليد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وحساب التوزيع المستقر منه تم حساب معولية النظام .

هدف البحث

يهدف البحث إلى تقدير معوليه النظام باستخدام سلاسل ماركوف و من خلال الخطوات التالية:

1- استخدام المحاكاة لتوليد مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.
2- حساب التوزيع على المدى البعيد لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية.
3- تقدير معولية النظام.

مفهوم المعولية (Reliability)

المعولية هي احتمال ان النظام او احد مكوناته سوف يقوم بوظيفته المطلوبة لمده من الزمن عند الاستعمال تحت ظروف تشغيلية ملائمة وهو بذلك احتمال عدم الفشل لمده من الزمن .ويمكن ان تعرف المعوليه بالاعتماد على الزمن او أي مقياس اخر مثلاً لكل كيلو متر او لكل عدد ن الوحدات او لكل دفعة انتاج اوغيرها، من التعريف اعلاه يتبين ان للمعولية دلالة على نوع من الاداء يكون فيه الجهاز ناجحاً أي لا يفشل خلال فترة الخدمة المعدة لاجله .ويتبين لنا من خلال هذه التعريف هنالك اربعة عوامل ترتبط بالمعولية هي:

1- القيمةالعددية Numerical value: قيمة احتمال إنجاز الاداء لأي جزء من النظام خلال مدة زمنية معينة.
2- أداء المنتج المطلوب Performance Function هي أمكانية أداء المنتج او المعدة الغرض الذي صمم من أجله، على سبيل المثال تصميم المصعد الكهربائي لرفع حمل متوقع قدره (1.5) طن. إن أية زيادة بعد ذلك تعد تجاوزاً على مواصفات التصميم.
3-الظروف البيئية المحيطة Environmental conditions هي الظروف المحيطة الواجب توفيرها أثناء تشغيل المنتج او المركبة مثلا بعض المركبات قد صممت للعمل داخل البنايات لكنها تتعرض إلى العطل خارجها أوفي حالة تعرضها إلى أشعة الشمس، الرياح، الأمطار، الرطوبة......الخ.
4-العمر التشغيلي Operating life هو العمر المتوقع لعمل المركبة او المعدة اوالمدة الزمنية لقدرة المنتج على أداء وظيفته.

وتُعرف دالة المعولية رياضياً كالآتي :

$$R(t) = \Pr(T > t)$$

حيث أنّ T متغير عشوائي يرمز الى المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل، او هو وقت الاشتغال حتى حدوث الفشل.فهو يمثل الزمن المتراكم لحياة نظام معين خلال تلك المدة، ولغرض ايجاد علاقة بين الدالة الاحتمالية ودالة المعولية نفرض ان زمن الحياة T للنظام يتوزع حسب دالة التوزيع التجميعيه F(t) ، وبما ان:

$$R(t) = 1 - F(t)$$
$$= 1 - P(T \le t)$$

ومن خصائص دالة المعولية R(t) ما يأتي:

1. ان الدالة R(t) موجبة لجميع قيم (t) ضمن المدة [0, t].

2. ان الدالة R(t) مستمرة لجميع قيم (t) ضمن المدة [0, t].

3. ان الدالة R(t) دالة متناقصة لجميع قيم (t).

4. ان الدالة R(t) قيمها تقع بين الصفر والواحد وذلك لان $R(\infty)=0$ و $R(0)=1$

قياس المعولية: The Measuring of Reliability

إن المؤشرات التي يمكن من خلالها قياس المعولية يعبر عنها كالاتي:

1- متوسط الوقت بين العطلات (MTBF) (Mean Time Between Failures)

هو معدل الوقت بين العطلات التي تحدث في المركبة او أحد أجزائها القابلة للتصليح وغير القابلة للتصليح، وكلما ارتفعت قيمة هذا المتوسط كلما زادت الاتاحية(Availability) للمركبات وكان مؤشراً على ارتفاع كفاءة ملاك الصيانة، ويمكن أيجاد (MTBF) كمايلي:

$$MTBF = E(T) = \int_0^\infty tf(t)dt) = \int_0^\infty R(t)dt$$

إذ ان: t: أوقات الفشل

f(t) دالة الكثافة الاحتمالية لأوقات الفشل .

وهناك تباين الزمن حتى حدوث الفشل (VTTF) Variance Time to Failure

$$Var(\mathrm{T}) = \mathrm{E}(\mathrm{T}^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{T})]^2$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{T}^2 \frac{\mathrm{d}}{dt}[1-\mathrm{R(t)}]\,\mathrm{dt} - [\int_0^\infty \mathrm{R(t)}\,\mathrm{dt}]^2$$

2- متوسط وقت التصليح (Mean Time to Repair)(MTTR)

هو متوسط الوقت اللازم لتصليح المركبة بعد حدوث العطل، وكلما إرتفعت قيمة هذا المتوسط كان ذلك مؤشراً على انخفاض الاتاحية(Availability) للمركبات وانخفاض كفاءة ملاك الصيانة.

3- معدل الفشل (Failure rate)

هو إحتمالية إدامة عمل مركبة معينة الى حين حدوث العطل ويستعمل مفهوم معدل الفشل للتميز بين مختلف التوزيعات ويسمى في دراسات المعولية بمعدل الخطورة (Hazard rate)

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$$

4- الاتاحية (Availability)

وهي النسبة بين متوسط الوقت بين العطلات (MTBF) الى مجموع (متوسط لوقت بين العطلات فضلاً عن متوسط وقت التصليح).

$$Availability = \frac{MTBF}{MTBF + MTTR}$$

5- المعولية (Reliability)

من المؤشرات أعلاه يمكن قياس دالة المعولية كما في الصيغة التالية:

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)}$$

حيث:

$R(t)$ دالة المعولية

$f(t)$ دالة الكثافة الاحتمالية لأوقات الفشل

$h(t)$ معدل الفشل

نظم المُعَولية (Reliability Systems)

النظام هو مجموعة من العناصر المرتبطة بصورة مباشرة أو غير مباشرة وتكمن اهمية معولية الأنظمة من خلال اهتمامها بالعلاقات الداخلية فيما بين معولية المُعدة (المفردة) الواحدة وأخرى داخل نظام معين وتأثير هذه العلاقات على معولية النظام إذ من الضروري معرفه نمط سلوك المعدات داخل النظام ومن ثم تأثيرها الأحتمالي في سلوك هذا النظام ، وأنواع نظم المعولية :-

1- النظام المتسلسل (المتوالي) Series System
2- النظام المتوازي Parallel System
3- النظام بـ r من المركبات من ضمن k من المركبات r out of k Components
4 - النظام الاحتياطي (المترادف) Standby System
5- النظام المعقد Complex System
6-النظام الفائض Redundant System (Mixed serves parallel system)

العمليات التصادفية (Stochastic Processes)

إن العملية التصادفية هي عبارة عن ظاهرة تتغير بتغير دليل معين (كالزمن أو السُمك او أي دليل اخر) والتي لايمكن إيجاد قيمها النظرية بدقة تامة، بل لها مدى معين من القيم الممكنة والمتعلقة بتوزيع احتمالي يصف قيمتها عند كل قيمة من الدليل. تعرّف العمليات التصادفية بأنها عبارة عن مجموعة من المتغيرات العشوائية $\{x_t \ , \ t \geq 0\}$ مؤشرة بالزمن ، كما يمكن تعريفها بأنها عبارة عن متسلسلات من المتغيرات العشوائية تولدت بواسطة القوانين الاحتمالية . يرمز للعملية التصادفية بالرمز (x_n) ، حيث (n) تشير إلى الزمن المتقطع (........ , 1 , 0 = n) ، أو يرمز لها بـ (x_t) عندما يكون الزمن مستمراً $(t \geq 0)$.

وعليه فإن العملية (x_t) تسمى العملية التصادفية والقيم التي تفترض بواسطة العملية تسمى الحالات (States) ، ومجموعة القيم الممكنة تسمى فضاء الحالة (State Space) ، وإن مجموعة القيم الممكنة للمعلمة (T) المؤشرة (Index Parameter) تسمى فضاء المعلمة (Parameter Space) والتي يمكن أن تكون مستمرة أو متقطعة ، وتدل المعلمة (T) عادة على الزمن .

ويصنف فضاء الحالة إلى محدود (Finite) أو متقطع (Discrete)، إذا احتوى على أعداد محدودة من الحالات أو على أعداد غير محدودة معدودة من الحالات، أو انه نتج عن فضاء الحالة المحدود بمتغير استجابة غير مشروط {X(t)}. والصنف الثاني لفضاء الحالة هو غير المحدود أو المستمر، حيث يقال لفضاء الحالة غير المتقطع إنه مستمراً إذا كان متغير الاستجابة {X(t)} لفضاء الحالة يقع ضمن فترة معينة.

وكما هو الحال في فضاء الحالة، فان فضاء المعلمة يقسم إلى قسمين رئيسيين هما:
فضاء المعلمة المتقطع (Discrete Parameter Space)، حيث أن مشاهدات العملية التصادفية تكونت بفضاءات جزئية متساوية (Equally Subspace) ضمن فضاء المعلمة T، وبعبارة أخرى، يقال للمعلمة بأنها متقطعة إذا كان فضاء المعلمة T مجموعة محدودة أو غير محدودة قابلة للعد $T=\{t;\ t=0,\pm 1,\pm 2,\dots\}$. أما فضاء المعلمة المستمر Continuous Parameter Space ففيه تكونت مشاهدات العملية التصادفية بفضاءات متصلة ضمن فضاء المعلمة T، أي أن وقوع فضاء المعلمة T يكون ضمن المدة $T=\{t:\ -\infty<t<\infty\}$.

عمليآت ولعدم إمكانية مشاهدة العملية التصادفية بشكل متواصل لاحتوائها على عدد غير محدود من المشاهدات، يجب تحديد نوعية النماذج التي يمكن تطبيقها، فالنماذج بفضاء المعلمة المستمر تستخدم لأية نوعية من البيانات وهي الأكثر صعوبة من النماذج بفضاء المعلمة المتقطع التي تتطلب مشاهدات بفضاءات متساوية.

عمليات ماركوف (Markov Processes)

عند دراستنا لأية ظاهرة أو نظام فأننا نسعى غالباً إلى استنتاج ومعرفة حالة النظام عند نقطة زمنية معطاة، ولتكن t_1، عن طريق معرفتنا بحالة هذا النظام عند أية نقطة زمنية مبكرة سابقة لها t_o ولا يُعتمد على جميع تاريخ النظام (System History) قبل النقطة الزمنية t_o.

وبعبارة أخرى فان حالة النظام عند النقطة الزمنية الحالية t_1 تكون مستقلة (Independent) عن جميع حالات النظام الأخرى قبل النقطة الزمنية t_o، بل تعتمد فقط على حالة النظام السابقة لها، أي عند

النقطة الزمنية t_o. فالعمليات التصادفية التي تمثل مشاهدات (Observations) من أنظمة تحقق هذا الشرط تسمى بعمليات ماركوف (Markov Processes).

ويقال عن العملية التصادفية ذات المعلمة المتقطعة $\{X_t;\ t=0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ أو ذات المعلمة المستمرة $\{X(t),\ t\geq 0\}$ بأنها عملية ماركوف إذا حققت الخاصية الآتية :

$$P\{X_{(t+1)}=j\,|\,X_{(t)}=i, X_{(t-1)}=i_{t-1}, X_{(t-2)}=i_{t-2},\ldots,X_{(t_o)}=i_o\}$$

$$=P\{X_{(t+1)}=j\,|\,X_{(t)}=i\}$$

أي أن التوزيع الشرطي (Conditional Distribution) للمتغير $X_{(t+1)}$ معطى جميع قيمه الماضية والحاضرة تعتمد فقط على القيمة الحالية منه $X_{(t)}$ ولا تعتمد على أية قيمة أخرى من الماضي. وتعرف هذه الخاصية بخاصية ماركوف (Markov Property). وكما هو واضح فان هذه الخاصية تتضمن السببية الاحتمالية (Probabilistic Causality).

وتصنّف عمليات ماركوف تبعاً لفضاء الحالة (متقطع-مستمر) وفضاء المعلمة (متقطع-مستمر) .

أن عملية ماركوف بفضاء الحالة المتقطع تمثل سلسلة ماركوف (Markov Chain) بغض النظر عن وصف فضاء المعلمة إن كان متقطعاً أم مستمراً، وغالبا ما تستخدم مجموعة الأعداد الصحيحة $S=\{0,1,2,\ldots\}$ كفضاء حالة لتمثيل سلاسل ماركوف.

وإن سلسلة ماركوف يرمز لها اختصاراً (MC)، وهي نوع خاص من عمليات ماركوف يمكن تمثيلها بفضاء الحالة المتقطع وفضاء المعلمة المتقطع أو المستمر، وهي عبارة عن متتابعة من المتغيرات العشوائية (Sequence of Random Variables) $\{X_t;\ t=0,1,2,\ldots\}$ تحقق خاصية ماركوف وان الانظمة التي تمتلك تلك الخاصية تسمى بسلاسل ماركوف.وقد عرّفت سلسلة ماركوف بأنها عملية عشوائية متقطعة الزمن يتميز كل متغير عشوائي (X_t) فيها بارتباطه بالمتغير السابق له مباشرة (X_{t-1}) وبتأثيره على المتغير اللاحق (X_{t+1}) فقط، ومن هنا اطلق على هذه العملية اسم "سلسلة" لتعلق كل متغير بجواره المباشر فقط.

ويعامل تطور سلسلة ماركوف بسلسلة من الانتقالات بين قيم معينة للعملية، والتي تسمى بحالات (States) السلسلة، حيث تتمتع هذه الحالات بخاصية تقول بان القانون الاحتمالي للتطور المستقبلي للسلسلة عند حالة معينة يعتمد فقط على تلك الحالة ولا يعتمد على كيفية وصول السلسلة إلى هذه الحالة، وقد يكون عدد الحالات الممكنة محدوداً (Finite) أو غير محدودٍ وقابلا للعد (Countable Infinite) .

الاحتمالات الانتقالية (Transition Probabilities)

من المعروف أن سلسلة ماركوف (MC) بنيت أساساً على انتقال الظاهرة من حالة إلى أخرى ضمن فضاء الحالة S تحكمها في ذلك قوانين احتمالية معينة تسمى بالاحتمالات الانتقالية (Transition Probabilities)، وهذه الاحتمالات تصف الانتقال لسلسلة ماركوف من حالة إلى أخرى خلال فترة زمنية معينة، ويرمز للاحتمالية الانتقالية من الحالة i عند أية لحظة زمنية t بغض النظر عن الحالة السابقة للحالة i (التاريخ المسبق) إلى الحالة j عند الزمن t+1 (بعد خطوة واحدة) بالرمز P_{ij} المتمثل بالصيغة الاتية:

$$P_{ij}=P\{X_{t+1}=j|X_t=i\}$$

ولجميع قيم $i,j\in I$ حيث أن I هي مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers). وهذا الوصف يلائم فضاء معلمة سلسلة ماركوف المتقطع الذي يمكن تمثيله بالأعداد الصحيحة $\{0,1,2,\ldots\}$، وفي حالة كون فضاء المعلمة لسلسلة ماركوف مستمراً يُصبح الانتقال بين الحالات عبر الكثافات الانتقالية (Transition Densities) بدلاً من الاحتمالات الانتقالية.

وبناءً على ذلك توضع الاحتمالات الانتقالية في مصفوفة تربيعية أبعادها n×n تسمى بالمصفوفة الانتقالية، ويشترط في هذه المصفوفة تحقيق الشرطين الآتيين:

1- إن كل عنصر من عناصر هذه المصفوفة يجب أن لا يكون سالباً، أي $P_{ij}\geq 0$.

2- إن مجموع عناصر كل صف فيها يجب أن يساوي الواحد الصحيح، أي $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=1$.

والتمثيل الآتي هو لمصفوفة الاحتمالات الانتقاليه (Transfer Matrix) أبعادها n×n.

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2j} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ p_{i1} & p_{i2} & \cdots & p_{ij} & \cdots & p_{in} \\ \vdots & & & & & \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

وكل عنصر من عناصر (P_{ij}) يُعبر عن احتمال انتقال الظاهرة من الحالة i إلى الحالة j خلال وحدة زمنية واحدة (خطوة واحدة). ويمكن تعميم هذه الحالة، فعند إيجاد انتقال الظاهرة من الحالة i إلى الحالة j بعدد من الخطوات أو الوحدات الزمنية، لتكن k، فان رمز مصفوفة الانتقال هو $P^{(k)}$ ، ويمكن البرهنة على أن $P^{(k)}=P^k$. وتعّد مصفوفة الانتقال إحدى المكونات الرئيسة لنموذج ماركوف.

وتصنف سلاسل ماركوف وفق معايير عدة منها طبقاً لحالات ماركوف (Markov States) إلى محدودة (منتهية) وغير محدودة، أو طبقا لاحتمالات الانتقال فيما إذا كانتمستقرة وغير مستقرة، أو طبقا للدليل الذي غالباً ما يكون الزمن فيما إذا كان مستمراً أم متقطعاً، وتُعرّف سلاسل ماركوف المحدودة وغير المحدودة بالآتي:

تكون العملية التصادفية $\{X_t;\ t=0,1,2,\ldots\}$ سلسلة ماركوف محدودة الحالة إذا امتلكت عدداً محدوداً من الحالات (Finite Number of States) ، وحققت خاصية ماركوف (Markov Property)، وكان لها احتمالات انتقالية مستقره (Stationarity Transition Probabilities)، وامتلكت احتمالية ابتدائية(Initial Prob.) هي $[P\{X_o=i\}]$ ولجميع قيم i .

ويقال لسلسلة ماركوف $\{X_t\}$ إنها محدودة بـ k من الحالات، إذا كان عدد القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية $\{X_t;\ t=0,1,2,\ldots k\}$ محدوداً ومساوياً إلى k. وفي حالة عدم تحقق شرط واحد على الأقل من الشروط المتوفرة في سلسلة ماركوف المحدودة فيقال عن السلسلة بأنها غير محدودة الحالة (Infinite Markov Chain).

أن الاحتمالات الانتقالية تمثل معلمات لذا يستوجب تقديرها ، تستخدم طريقة الإمكان الأعظم لتقدير الاحتمالات الانتقالية(p_{ij}) للسلسلة الزمنية الجزئية (القصيرة) (Micro Data) حيث يكون انتقال الظاهرة لهذا النوع من السلاسل معلوم (ملاحظ) أو يمكن القول هي نوع من البيانات التي يمكن معرفة كيفية الانتقال (الانتقال المعلوم) من الحالة (i) في الوقت (t) إلى الحالة (j) في الوقت (t+1) ، أما عندما يكون الانتقال من حالة إلى أخرى في السلسلة الزمنية مجهول يتم استخدام طرق أخرى للتقدير مثل طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) او طريقة المربعات الصغرى العامة (GLS) .

وعلى افتراض أن هناك عينة مكونة من المشاهدات على شكل سلاسل ماركوف في حالة الثبوتية (ergodic) ، وعلى فرض أن العدد $n_i(0)$ يمثل العناصر المشاهدة في الحالة (i)عند الوقت (t = 0) ، حيث تشير العناصر المشاهدة إلى سلسلة من الحالات عند الوقت (t = 0 , 1 , 2 , ... , T) ، وعليه فإن عملية ماركوف في حالة الاستقرارية تعطى بالشكل الآتي :

$$p_r\ (x_0\,, x_1\,,\,......, x_T\,) = p_r\ (x_0\,) \prod_t p_r\ (x_t\ / \ x_{t-1}\,)$$

ليكن $n_{ij}(t)$ تمثل عدد العناصر المشاهدة لكل ($x_t = s_j \quad , \quad x_{t-1} = s_i$) ، وإن : $n_{ij} = \sum_t n_{ij}\ (t)$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}} \geq 0$$

إذ يمثل $\hat{p}_{ij}$ تقدير الإمكان الأعظم عندما تكون الاحتمالات الانتقالية مستقرة ، أما عندما تكون الاحتمالات الانتقالية غير مستقرة فنتبع الصيغة التالية :

$$\hat{p}_{ij}\ (t) = \frac{\sum_{t=1}^{T} n_{ij}\ (t)}{\sum_t \sum_j n_{ij}\ (t)}$$

الجانب التطبيقي :

تعرف المحاكاة بانها عملية تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي باستخدام نماذج معينة، وكثيرا ما نجد في الواقع الحقيقي ان هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم النموذج يحقق لنا قدرا من الادراك للعملية الاصلية او الواقع الحقيقي من خلال محاكاة النموذج، لقد تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استخدام الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع ذي مديات تفوق الامكانات المعقولة في التطبيق العملي .

ان اول مراحل استخدام اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الى عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي

الممثل للظاهرة المدروسة باحجام مختلفة من العينات وبتكراره بعدد كبير من المرات بدلا من ان تسحب من المجتمع الحقيقي. وبذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلولا تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلا لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها من خلال مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها.

وصف تجربة المحاكاة الخاصة بالبحث:

1- برنامج المحاكاة كتب باستخدام البرنامج (Matlab-7.10) لتوليد مصفوفة عشوائية بثلاث مراحل كل مرحلة تم فيها توليد قيم صف من صفوف المصفوفة بالاعتماد على مصفوفة تمثل معلومات عن حالات النظام والانتقالات بين هذه الحالات التي تمثل العملية التصادفية بفضاء حالة هو حالات النظام (يعمل -1 وعطل بسيط-2 وعطل تام -3)، و تم توليد الارقام العشوائية باستخدام الدالة (rand) والتي تولد ارقام عشوائية ضمن الفئة [0,1] .

2- بناء مصفوفة الانتقالات(F_{ij}) بابعاد(3*3) ومنها تم بناء مصفوفة الاحتمالات الانتقالية(P_{ij}).

3- حساب التوزيع المستقر للمصفوفة (P_{ij}) بالاعتماد على المتجه الاولي (0 0 1).

4- حساب معولية النظام من متجه التوزيع المستقر.

بناء أنموذج ماركوف يتم اولاً بايجاد عدد تكرارات الانتقال بين حالات النظام من خلال حساب عدد الانتقالات من الحالة (i) الى الحالة (j) في خطوة واحدة ثم يتم بناء مصفوفة الانتقالات ذات الخطوة الواحدة

$$F_{ij}=\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{pmatrix}$$

ومن مصفوفة الانتقالات F يمكن تقدير مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P ولكل صف بقسمة كل عنصر في الصف على مجموع الصف :

$$P_{ij}=\begin{cases} F_{ij} / \sum_{i=1}^{m} F_{ij} \, if \, \sum_{i=1}^{m} F_{ij} \rangle 0 \\ 0 \, if \, \sum_{i=1}^{m} F_{ij} = 0 \end{cases}$$

(m=3)اذا كانت حالات النظام هي (يعمل - عطل بسيط - عطل تام)

$$P_{ij}=\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix}$$

التوزيع المستقر(The Equilibrium distribution) لسلسلة ماركوف المحددة يمكن ايجاده اذا كانت السلسلة تتكون من حالات عودة - موجبة (positive recurrent) وغير دورية (aperiodic) وبذلك تكون السلسلة تمتلك توزيع مستقر (خاصية الثبوتية) (ergordic).

فاذا كان لدينا متجه التوزيع الاولي الاتي: $X^{(0)}=(1 \quad 0 \quad 0)^T$ **فان :**

$$X^{(1)}=P_{ij}X^{(0)}$$

$$X^{(2)}=P_{ij}X^{(1)}$$

$$X^{(3)}=P_{ij}X^{(2)}$$

$$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}=\pi$$

فاننا نحصل على مصفوفة التوزيع المستقر والتي هي عبارة عن مصفوفة متطابقة الصفوف يمكن تمثيلها بمتجه هو متجه التوزيع المستقر ومنه يمكن حساب المعولية R :-

$$\pi_i \geq 0 \ \& \sum_{i=1}^{m} \pi_i = 1$$

$$P\pi = \pi \rightarrow \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\pi_j = \pi_i .$$

$$\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

$$R = \pi_1 + \pi_2$$

اذ ان π هومتجه التوزيع المستقر و π_1 احتمال ان النظام في الحالة الاولى(يعمل) و π_2 احتمال ان النظام في الحالة الثانية (عطل بسيط) و π_3 احتمال ان النظام في الحالة الثالثة (عطل تام) .

نتائج البرنامج:

بالاعتماد على مصفوفة تمثل معلومات عن حالات النظام والانتقالات بين هذه الحالات التي تمثل العملية التصادفية بفضاء حالة هو حالات النظام (يعمل -1 وعطل بسيط-2 وعطل تام -3)،

$$P = \begin{bmatrix} .35 & .35 & .3 \\ .35 & .35 & .3 \\ .35 & .35 & .3 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الانتقالات كانت كما يلي:

$$F = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

نكون مصفوفة الاحتمالات الانتقالية

$$P = \begin{bmatrix} 0.4000 & 0.3000 & 0.3000 \\ 0.3000 & 0.5000 & 0.2000 \\ 0.5000 & 0.2000 & 0.3000 \end{bmatrix}$$

فاذا كان لدينا متجه التوزيع الاولي الاتي: $X^{(0)} = (1 \quad 0 \quad 0)^T$ ومنه نجد متجه التوزيع المستقر

ومنه نجد معولية النظام

$$\pi = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$$

$$\pi = (0.3925 \quad 0.3416 \quad 0.2659$$

$$R = \pi_1 + \pi_2$$

$$R = 0.3925 + 0.3416 = 0.7341$$

الاستنتاجات

1- امكانية تقدير دالة المعولية باستعمال توزيع المدى البعيد لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية لسلسلة ماركوف

2- امكانية تقدير دالة البقاء في الانظمة الحياتية باستعمال مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.

3 - برنامج (Matlab-7.10) يحتوي على دوال تساعدنا على توليد بيانات سلاسل ماركوف .

التوصيات

1- استعمال سلاسل ماركوف في حساب دالة المعولية او الدوال اخرى التي تم عرضها في البحث والمتعلقة بالمعدات والمكائن وكفاءتها .

2- دراسة سلاسل ماركوف في حساب معولية باستخدام طرائق اخرى لتقدير الاحتمالات الانتقالية.

3 - اجراء دراسات تطبيقية في حقل العمل للمقارنة بين النتائج التطبيقية و المحاكاة .

المصادر

1- الربيعي، فاضل محسن-1991-المدخل الى النماذج الاحتمالية (مترجم) -مطابع دار الحكمة - بغداد - العراق.
2-العذاري، فارس مسلم و الوكيل ،علي عبدالحسين-1991-العمليات التصادفية-مديرية مطابع التعليم العالي - الموصل -العراق .
3- الزيادي ، صفاء كريم كاظم -2003 - استخدام سلاسل ماركوف وبرمجة الاهداف في تخطيط القوى العاملة مع التطبيق - رسالة ماجستير في الإحصاء- كلية الإدارة والاقتصاد/الجامعةالمستنصرية

4-Cinler,E.-1975-Introduction to Stochastic Process-Prentice-Hall,Inc.-NewYork-U.S.A.

5-Ching,W.K.&Ng,M.K.-2006-Markov Chains models, algorithms and applications - Springer Science +Business Media, Inc.- NewYork-U.S.A.

6-Ebeling,C.E.-1997-An Introduction to Reliability and maintainability Engineering-The McGraw-Hall ,Inc. -Singapore.

7-Matlab (7.10.0)-2010 -The Language of Technical Computing-The MathWorks,Inc- Usa.

ملحق (1) البرنامج

```
clc
clear
a=zeros(3,3)
for i=1:10
x1=rand
if x1<.35,a(1,1)=a(1,1)+1
 elseif x1>.7
   a(1,3)=a(1,3)+1
else
   a(1,2)=a(1,2)+1
end
x2=rand
if x2<.35,a(2,1)=a(2,1)+1
 elseif x2>.7
   a(2,3)=a(2,3)+1
else
   a(2,2)=a(2,2)+1
end
x3=rand
if x3<.35,a(3,1)=a(3,1)+1
 elseif x3>.7
   a(3,3)=a(3,3)+1
else
   a(3,2)=a(3,2)+1
end
 end
a
s=sum(a,2)
a(1,:)=a(1,:)/s(1);
a(2,:)=a(2,:)/s(2);
a(3,:)=a(3,:)/s(3);
a
x=a
xi=[1 0 0];
for k=1:5
   xi=xi*x
   x^k
end
xi
Re=xi(1)+xi(2);
Re
```

....
....
....