استنباط قاعدة للتكامل العددي

فؤاد حمزة عبد الشريفي ابتسام عبد الواحد الجزائري صابرين حاكم ملك
كلية العلوم-جامعة بابل
fouadhamza55@yahoo.com ibtisamalasady1@yahoo.com sabrinahakim54@gmail.com

الخلاصة

الهدف الرئيس من هذا البحث هو استنباط قاعدة جديدة لإيجاد قيم التكاملات الأحادية المحددة عددياً لدوال مستمرة، ومع كونها مستمرة فهي معتلة المشتقة أو معتلة في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل .وتم ايجاد صيغ الخطأ لها إذ قمنا باستنتاج هذه الطريقة من قاعدتي شبه المنحرف و سمبسون. فضلا عن ذلك، تم تحسين النتائج بالاعتماد على حدود التصحيح وباستعمال تعجيل رومبرك، فتوصلنا إلى انه يمكننا الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات المحددة، حيث أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً مقارنة مع قاعدة شبه المنحرف .

الكلمات المفتاحية: تكاملات أحادية، تعجيل رومبرك، صيغ الخطأ، قاعدة شبه المنحرف.

Abstract

The main objective of this research is, to devise a new base to find a single integrals numerically specified values of continuous functions, continuous but diseased derivative or diseased in one or more points of integration area. It also found fault with formulas, as we have the conclusion of this method of trapezoidal and Simpson bases. In addition, the results have been improved based on the boundaries of the patch and using accelerate of Romberg, so we concluded that it can rely on this method of integrals specific account, where given the relatively high accuracy results in a few partial periods compared with the trapezoidal rule.

Keywords: single integrals, accelerate of Romberg, fault with formulas, trapezoidal rule.

1- المقدمة

التّحليل العدديّ ومنه التكامل العددي هو أحد فروع الرّياضيات الذي يربط بين الرياضيات التحليلية و الحاسب الآلي. و للتكامل العددي أهمية كبيرة في التطبيقات الهندسية والفيزيائية. ففي الآونة الأخيرة استخدام التكامل العددي في طب الأسنان حيث استخدم أطباء الأسنان بعض الطرائق العددية لإيجاد المساحة السطحية للمقطع العرضي لقناة جذر السن. واستخدم الباحثون الكثير من الطرائق العددية المختلفة لحساب قيم التكاملات الأحادية والمحددة في فترات تكاملها وحسنوا النتائج بطرق تعجيلية متعددة .عادة ما نحصل على نتيجةٍ تقريبيّة أو حل تقريبي باستخدام هذه الطرق .وهذا يعني وجود نسبة خطأ علينا حسابها، إذًا تتلخّص مهمّة التحليل العددي عموما والتكامل العددي على وجه الخصوص في إيجاد الحل التقريبي لمسألة ما و تقويم الخطأ. وبما إن ذاكرة الحاسوب لا يمكنها تخزين أو تمثيل الأعداد فيها بشكل كامل نظرا لمحدوديتها . لذلك وجب علينا بناء طرائق عددية لإيجاد نواتج صحيحة بأقل عدد ممكن من المراتب ، أي بأقل عدد ممكن من البتات.

2- استنباط القاعدة الجديدة لحساب التكاملات العددية.

سنستنبط القاعدة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون وذلك بإيجاد الوسط الحسابي للقاعدتين وكما يلي :

نص قاعدة شبه المنحرف

$$I = \int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{f_a + f_b}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f_i\right) + \mathrm{E}(h) \qquad \cdots (1)$$

أما نص قاعدة سمبسون:

$$I=\int_a^b f(x)dx=h\left(\frac{f_a+f_b}{3}+\frac{4}{3}\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{n-1}f_i+\frac{2}{3}\sum_{i=2,4,6,\cdots}^{n-2}f_i\right)+\mathrm{E}(h)\qquad\cdots(2)$$

$f_i=f(a+ih)$ و $f_b=f(b)$, $f_a=f(a)$ و n عدد الفترات الجزئية من الفترة $[a,b]$

حيث:

$$h=\frac{b-a}{n}$$

وصيغة الخطأ في قاعدة شبه المنحرف بالنسبة للدوال المستمرة في فترة التكامل هي على التوالي

$$E(h)=ah^2+bh^4+ch^6+\cdots\qquad\cdots(3)$$

حيث a , b , c , $\cdots$ ثوابت .

أما صيغة الخطأ بالنسبة للدوال المستمرة ولكنها معتلة المشتقة أو الدالة المعتلة عند النهاية السفلى أو العليا لفترة التكامل فهي:

$$E(h)=\left(a_1h^2\frac{d}{dx}+b_1h^3\frac{d^2}{dx^2}+c_1h^4\frac{d^3}{dx^3}+\cdots\right)f(x\mp h)+ah^2+bh^4+ch^6+\cdots\cdots(4)$$

صيغة الخطأ بالنسبة للدوال المستمرة والمعتلة المشتقة أو الدالة ذاتها معتلة عند النهايتين السفلى و العليا لفترة التكامل فهي :

$$E(h)=\left(a_1h^2\frac{d}{dx}+b_1h^3\frac{d^2}{dx^2}+c_1h^4\frac{d^3}{dx^3}+\cdots\right)f(x\mp h)+\cdots\cdots(5)$$

والآن من اجل استنباط القاعدة الجديدة نأخذ الوسط الحسابي للقاعدتين فنحصل على:

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{h}{12}\left(5(f_a+f_b)+14\sum_{i=1,3,5,\cdots}^{n-1}f_i+10\sum_{i=2,4,6,\cdots}^{n-2}f_i\right)+\mathrm{E}(h)\cdots(6)$$

ملاحظات:

١. إن صيغ الخطأ بالقاعدة الجديدة لا تختلف عنها في قاعدة شبه المنحرف.
٢. سنهمل قيمة الدالة عند نقطة الاعتلال.
٣. استعملنا لغة الماتلاب لبناء برنامج المحاكاة .

3- تعجيل رومبرك

إذا كانت كل من $G(h)$ و $G(h/2)$ قيمتين تقريبيتين متتاليتين للتكامل المحدد في احدى القواعد المذكورة وكانت حدود التصحيح هي:

$$E(h) = ah^r + bh^s + ch^t + \cdots$$

فإننا نجد قيمة تقريبية جديدة G ونضعها في العمود الجديد عندما $k = r$ وثم نكون عمود ثالث عندما $k = s$ وذلك بأخذ قيمتين تقريبيتين متتاليتين من العمود الثاني وهكذا

$$G = \frac{[2^k G(h/2) - G(h)]}{2^k - 1} \qquad ; k = r, s, t, \cdots\cdots (7)$$

الصيغة (7) هي صيغة تعجيل رومبرك

إنّ القيمة النهائية من جدول رومبرك تتحدد تبعاً للدقة المطلوبة التي نسميها Eps والتي يكون فيها الخطأ النسبي كالآتي :

$$\left|\frac{G_2 - G_1}{G_1}\right| \le Eps;\ G_1 \neq 0$$

إذ G_1, G_2 قيمتان تقريبيتان للتكامل المحدد بإحدىٰ القواعد المذكورة.

4-الأمثلة

ت	التكامل	القيمة الحقيقية مقربة لثلاث عشرة مرتبة عشرية
1	$\int_1^2 \ln x \ dx$	0. 3862943611199
2	$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	1.0471975511965
3	$\int_0^1 -x^2 \ln x \ dx$	0. 11111111111111
4	$\int_0^1 \sqrt[4]{\frac{1}{1-x}}\ dx$	1. 33333333333333
5	$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\ \ dx$	0. 39269908169897

5- خوارزمية العمل

الشكل التالي يوضح الخوارزمية التي استنبطت لتنفيذ فكرة البحث.

```
a;b;R=1 (initialization of integral's limits)
for j=1:8
    n=2^j
h=(b−a)/n;sum1=0;sum2=0;
for i=1:2:(n−1)
    sum1=sum1+((a+i*h)−(a+i*h)^2)^.5
end
for i=2:2:(n−2)
    sum2=sum2+((a+i*h)−(a+i*h)^2)^.5
end
f1=5*((a−a^2)^.5+(b−b^2)^.5)
f2=(14)*sum1
f3=(10)*sum2
I=h/12*(f2+f3)
FC=I
R=R+1;
end
k=[k's values];k1=2
for i=2:8
    G(k1,1)=((2^k)*(FC(i))−FC(i−1))/((2^k)−1)
    k1=k1+1
end
```

6- النتائج

1-الدالة $f(x) = \ln(x)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $[1,2]$ لذا فإنّ صيغ الخطأ تكون كما في المعادلة (3)وعليه فنعوض عنkفي تعجيل رومبرك بالقيم $2,4,6,\cdots$ ونلاحظ من الجدول (1−1) أنّ قيمة التكامل باستعمال قاعدة شبه المنحرف تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية عند $n = 64$ بينما القيمة باستعمال القاعدة الجديدة تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية عند $n = 16$ ونلاحظ في الجدول. (2−1) في حين عند استعمال تعجيل رومبرك تكون مطابقة للقيمة الحقيقية عند $n = 64$ للقاعدتين.

N	قيم شبه المنحرف	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$
2	0.3760193491941					
4	0.3836995094094	0.3862595628146				
8	0.3856439099521	0.3862920434663	0.3862942088431			
16	0.3861316377449	0.3862942136758	0.3862943583564			
32	0.3862536733330	0.3862943518623	0.3862943610748	0.3862943611179	0.3862943611194	
64	0.3862841887387	0.3862943605406	0.3862943611192	0.3862943611199	0.3862943611199	0.3862943611199

الجدول (1−1)

N	قيم القاعدة الجديدة	$k=2$	$k=4$	$k=6$	$k=8$	$k=10$
2	0.3809269756798					
4	0.3849795361120	0.3863303895894				
8	0.3859679767092	0.3862974569083	0.3862952613962			
16	0.3862129257103	0.3862945753774	0.3862943832753	0.3862943693369		
32	0.3862740125977	0.3862943748934	0.3862943615278	0.3862943611826	0.3862943611507	
64	0.3862892746397	0.3862943619870	0.3862943611266	0.3862943611202	0.3862943611200	0.3862943611199

الجدول (1−2)

2− الدالة $f(x)=1/\sqrt{4-x^2}$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $[-1,1]$ لذا فإنّ صيغ الخطأ تكون كما في المعادلة (3) وعليه فنعوض عن k في تعجيل رومبرك بالقيم $2,4,6,\cdots$. ونلاحظ من الجدولين (1 و2−2) أنّ قيمة التكامل بإستعمال القاعدتين تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية عند $n=16$ في حين عند إستعمال تعجيل رومبرك مع القاعدتين تكون مطابقة للقيمة الحقيقية عند $n=128$ للقاعدة الجديدة بينما حصلنا على إثنتي عشرة مرتبة صحيحة بقاعدة شبه المنحرف.

n	قيم قاعدة شبه المنحرف	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
2	1.0773502691896						
4	1.0550729140891	1.0476471290556					
8	1.0491927173694	1.0472326517961	1.0472050199788				
16	1.0476981178602	1.0471999180238	1.0471977357723	1.0471976201500			
32	1.0473228062144	1.0471977023325	1.0471975546198	1.0471975517443	1.0471975514761		
64	1.0472288720751	1.0471975606954	1.0471975512529	1.0471975511995	1.0471975511973	1.0471975511970	
128	1.0472053818621	1.0471975517911	1.0471975511975	1.0471975511966	1.0471975511966	1.0471975511966	1.0471975511966

الجدول (1−2)

n	قيم القاعدة الجديدة	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
2	1.0644585576580						
4	1.0513600215724	1.0469938428772					
8	1.0482126845827	1.0471635722528	1.0471748875445				
16	1.0474490179420	1.0471944623951	1.0471965217379	1.0471968651378			
32	1.0472602542735	1.0471973330506	1.0471975244277	1.0471975403434	1.0471975429912		
64	1.0472132163853	1.0471975370892	1.0471975506917	1.0471975511086	1.0471975511509	1.0471975511588	
128	1.0472014668266	1.0471975503071	1.0471975511883	1.0471975511961	1.0471975511965	1.0471975511965	1.0471975511965

الجدول (2−2)

3- الدالة $f(x) = -x^2 \ln x$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $(0,1]$ ولكنها معتلة بالنقطة $x = 0$ (النهاية السفلى للتكامل) لذا فإنّ صيغ الخطأ تكون كما في المعادلة (4) وعليه فان قيم k تكون $2,3,3,4,6,\cdots$.نلاحظ من الجدولين (1-3)و(2-3) أنّ قيمة التكامل بإستعمال قاعدة شبه المنحرف تكون صحيحة لأربع مراتب عشرية عند $n = 128$ بينما حصلنا على أربع مراتب عند $n = 64$ بالقاعدة الجديدة في حين عند استعمال تعجيل رومبرك مع القاعدتين تكون النتيجة مطابقة للقيمة الحقيقية عند $n = 128$ بإستعمال القاعدتين

n	قيم قاعدة شبه المنحرف	K=2	K=3	K=3	K=4	K=6	K=8
2	0.0866433975700						
4	0.1054378396160	0.1117026536314					
8	0.1097502358012	0.1111877011963	0.1111141365627				
16	0.1107781989501	0.1111208533330	0.1111113036383	0.1111108989348			
32	0.1110288043386	0.1111123394681	0.1111111232017	0.1111110974250	0.1111111106577		
64	0.1110906500729	0.1111112653177	0.1111111118677	0.1111111102486	0.1111111111035	0.1111111111105	
128	0.1111060103395	0.1111111304283	0.1111111111584	0.1111111110571	0.1111111111110	0.1111111111111	0.1111111111111

الجدول(1-3)

n	قيم القاعدة الجديدة	K=2	K=3	K=3	K=4	K=6	K=8
2	0.1010839638317						
4	0.1085702466237	0.1110656742210					
8	0.1104689684988	0.1111018757905	0.1111070474432				
16	0.1109495261416	0.1111097120225	0.1111108314842	0.1111113720615			
32	0.1110705719033	0.1111109204906	0.1111110931289	0.1111111305067	0.1111111144030		
64	0.1111009576953	0.1111110862927	0.1111111099787	0.1111111123858	0.1111111111778	0.1111111111266	
128	0.1111085703839	0.1111111079468	0.1111111110402	0.1111111111918	0.1111111111122	0.1111111111112	0.1111111111111

الجدول(2-3)

4- الدالة $f(x) = 1/\sqrt[4]{1-x}$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $[0,1)$ ولكنها معتلة بالنقطة $x = 1$ (النهاية العليا للتكامل) لذا فإنّ صيغ الخطأ تكون كما في المعادلة (4) وعليه فان قيم k تكون $0.75,2,4,6,\cdots$. نلاحظ من الجدولين (1-4) و(2-4) أنّ قيمة التكامل بإستعمال قاعدة شبه المنحرف تكون صحيحة لمرتبة عشرية واحدة عند $n = 128$ بينما حصلنا على مرتبة عشرية واحدة عند $n = 64$ بالقاعدة الجديدة في حين عند إستعمال تعجيل رومبرك مع القاعدتين تكون مطابقة للقيمة الحقيقية عند $n = 128$ باستعمال القاعدتين

n	قيم قاعدة شبه المنحرف	K=0.75	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
2	0.8446035575014						
4	1.0444976522998	1.3376865593315					
8	1.1620373258118	1.3344352570492	1.3333514896217				
16	1.2315921673493	1.3336097281468	1.3333345518460	1.3333334226609			
32	1.2728657100863	1.3334024903077	1.3333334110280	1.3333333349735	1.3333333335816		
64	1.2973860799189	1.3333506262378	1.3333333382145	1.3333333333602	1.3333333333346	1.3333333333336	
128	1.3119607212841	1.3333376567885	1.3333333336388	1.3333333333338	1.3333333333333	1.3333333333333	1.3333333333333

الجدول(1−4)

n	قيم القاعدة الجديدة	K=0.75	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
2	0.9020374837516						
4	1.0778133347663	1.3356275022808					
8	1.1816272713971	1.3338933733355	1.3333153303537				
16	1.2431846409389	1.3334721399964	1.3333317288834	1.3333328221187			
32	1.2797446338758	1.3333679506679	1.3333332208917	1.3333333203589	1.3333333282675		
64	1.3014728082244	1.3333419822261	1.3333333260789	1.3333333330913	1.3333333332934	1.3333333333132	
128	1.3143898281783	1.3333354952137	1.3333333328762	1.3333333333294	1.3333333333331	1.3333333333333	1.3333333333333

الجدول(2−4)

5− الدالة $f(x)=\sqrt{x-x^2}$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في الفترة $(0,1)$ ولكنها معتلة المشتقة بالنقطتين $x=0,1$(النهايتين السفلى و العليا للتكامل) لذا فإنّ صيغ الخطأ تكون كما في المعادلة (4) وعليه فإن قيم k تكون $\cdots, 1.5,2.5,3.5,4.5$. نلاحظ من الجدولين(1−5)و(2−5) أنّ قيمة التكامل باستعمال قاعدة شبه المنحرف تكون صحيحة لثلاث مراتب عشرية$n=128$ بينما حصلنا على ثلاث مراتب عند $n=64$بالقاعدة الجديدة في حين عند استعمال تعجيل رومبرك مع القاعدتين تكون مطابقة للقيمة الحقيقية عند $n=128$ بإستعمال القاعدتين .

n	قيم قاعدة شبه المنحرف	K=1.5	K=2.5	K=3.5	K=4.5	K=5.5	K=6.5
2	0.2500000000000						
4	0.3415063509461	0.					
8	0.3744636335128	0.	0.				
16	0.3862273930446	0.3926612067705	0.3926982783398	0.			
32	0.3904066297285	0.3926923301686	0.3926990135211	0.3926990848030	0.3926990827679		
64	0.3918878028596	0.3926978833442	0.3926990758177	0.3926990818579	0.3926990817218	0.3926990816981	
128	0.3924121140975	0.3926988694353	0.3926990811857	0.3926990817062	0.3926990816992	0.3926990816987	0.3926990816987

الجدول(1−5)

n	قيم القاعدة الجديدة	K=1.5	K=2.5	K=3.5	K=4.5	K=5.5	K=6.5
2	0.2916666666667						
4	0.3567574094371	0.3923567187503					
8	0.3799565139406	0.3926445255050	0.3927063283314				
16	0.3881880196333	0.3926899795863	0.3926997402700	0.3926991015026			
32	0.3911031691758	0.3917291603248	0.3926991360513	0.3918721142501	0.3926990763559		
64	0.3921346650482	0.3926988088735	0.3926990862005	0.3926990813671	0.3926990815474	0.3926990816647	
128	0.3924994993038	0.3926990337838	0.3926990820804	0.3926990816809	0.3926990816954	0.3926990816988	0.3926990816987

الجدول(2−5)

7 – المناقشة والاستنتاجات

نستنتج من النتائج اعلاه انه عند حساب التكاملات الأحادية ذات التكاملات المستمرة بقاعدتي شبه المنحرف والقاعدة الجديدة حصلنا على قيم صحيحة لعدة مراتب عشرية مقارنة مع القيم المضبوطة للتكاملات وباستعمال عدد قليل من الفترات الجزئية دون استعمال عملية التعديل الخارجي عليها إذ حصلنا على أربع مراتب عشرية في المثالين الأول والثالث وكان عدد الفترات الجزئية للحصول على المراتب الأربعة بالقاعدة الجديدة اقل بكثير من عددها بقاعدة شبه المنحرف وعلى ثلاث مراتب عشرية في المثالين الثاني والخامس وأيضا كان عدد الفترات الجزئية بالقاعدة الجديدة اقل وهذا يدل على أفضلية الطريقة .

وقد تبيّن من الجداول اعلاه أنّه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدتين المذكورتين أعطت نتائج أفضل من حيث الدقة (عدد المراتب العشرية الصحيحة) وسرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات المضبوطة إذ حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية في جميع الأمثلة بالقاعدة الجديدة أما بقاعدة شبه المنحرف فحصلنا على نتائج مطابقة لأربع أمثلة حيث كانت نتيجة المثال الثاني صحيحة لإثنتي عشرة مرتبة وهذا يدل على إمكانية الاعتماد على هذه القاعدة لإيجاد التكاملات الأحادية.

المصادر

الطائي ، علية شاني ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2005 .

ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .

محمد ، صلاح جاسم " طرق التكامل العددي بين الاشتقاق والتطبيق في مجال طب الأسنان (معالجة الصور الطبية) " بحث منشور في مجلة كلية بغداد للعلوم الاقتصادية العدد 23 لسنة 2010.

Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009

Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration", BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , 1975 .

Sastry S. S., "Introductory Methods of Numerical Analysis", New Delhi, pp 5-7, 2008

Shanks J. A., "Romberg Tables for Singular Integrands" compute J.15, pp. 360, 361, 1972.