Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. 64, Part (2): 607-623
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

Tikrit Journal of Administrative and Economics Sciences
مجلة تكريت للعلوم الإدارية والاقتصادية
ISSN: 1813-1719 (Print)

Study the properties of Chen-Rayleigh distribution with application

Dhulfiqar Mhmood Munef* [A], **Moudher Khalid Abdalhammed** [B]

[A] College of Computer Science and Mathematics/ Tikrit University

[B] College of Administration and Economics/ Tikrit University

Keywords:
Rayleigh Distribution, Quantile function
Incomplete Moments, Chen-G

A R T I C L E I N F O

Article history:

Received	29 Oct. 2023
Accepted	03 Dec. 2023
Available online	31 Dec. 2023

©2023 THIS IS AN OPEN ACCESS ARTICLE UNDER THE CC BY LICENSE
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

*Corresponding author:
Dhulfiqar Mhmood Munef
College of Computer Science and Mathematics/University of Tikrit

Abstract: Today's world is characterized by speed and an increasing ability to innovate. Many phenomena have emerged that have data that require distributions that can accurately model their data, which makes it necessary to generate distributions that have the ability to do so. The research aims to expand the Rayleigh distribution by relying on the Chen-G family as one of those statistical distributions, by merging them together, to obtain a new distribution that we call (Chen-Rayleigh distribution (ChR)) with three parameters. The cumulative mass function and probability density have been extended to study their flexibility and suitability for modeling different types of data. Many of its statistical properties have been studied, such as the survival function, risk, moments surrounding the origin, and missing moments. I used the maximum likelihood estimation method to estimate the parameters of the proposed distribution, and to prove that it has good flexibility that enables it to model data with skewness with different tails, I used two sets of actual data programmed in the R program language, and compared their results with the Kumaraswamy Rayleigh (KuR) and Exponential Generalized Rayleigh (EGR) distributions.).), Weibull-Riley (WeR), Gompertz-Riley (GoR), Marshall Olkin-Riley (MoR), Rayleigh (R.) to evaluate the performance of the ChR distribution, and with several statistical parameters, such as (,--2L, AIC, CAIC , HQIC, BIC, W,A,K-S,P-Value), and through the results, the researchers concluded that the distribution (ChR) has an easy probability density function that can be easily managed and inferred and confirms the flexibility of the distribution, which makes it a candidate for use in several fields and for different phenomena.

Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. 64, Part (2): 607-623
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

دراسة خصائص توزيع تشن رايلي مع التطبيق

ذوالفقار محمود منيف
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
جامعة تكريت

مظهر خالد عبد الحميد
كلية الإدارة والاقتصاد
جامعة تكريت

المستخلص

اتسم عالم اليوم بالسرعة والقدرة المتنامية على الابتكار، فاستجدت العديد من الظواهر التي امتلكت بيانات تحتاج الى توزيعات يمكنها أن تنمذج بياناتها بدقة، مما يحتم توليد توزيعات لها القدرة على ذلك. يهدف البحث إلى توسيع توزيع رايلي بالاعتماد على عائلة Chen-G Family كأحد تلك التوزيعات الإحصائية، عن طريق دمجهما معا، للحصول على توزيعًا جديدًا نطلق عليه (Chen Rayleigh Distribution(ChR)) بثلاث معلمات. تم توسع دالة كتلته التراكمية وكثافته الاحتمالية، لدراسة مرونته ومدى ملائمته لنمذجة انواع البيانات. لقد تمت دراسة العديد من خواصه الاحصائية، كدالة لبقاء والمخاطرة والعزوم حول نقطة الأصل والعزوم الناقصة. وظفت طريقة تقدير الامكان الأعظم لتقدير معلمات التوزيع المقترح، ولأثبات تمتعه بمرونة جيدة تمكنه من نمذجة البيانات ذات الالتواءات بذيول مختلفة، استخدمت مجموعتين من البيانات الفعلية المبرمجة على لغة برنامج R، والمقارنة نتائجهما مع توزيعات (كوماراسوامي رايلي (KuR)، الأسي المعمم رايلي (EGR)، ويبول رايلي (WeR)، جومبيرتيز رايلي (GoR)، مارشال اولكين رايلي (MoR)، رايلي (R).) لتقييم أداء توزيع (ChR)، وبالعديد من المعايير الإحصائية، كـ (,-2L, AIC, CAIC, HQIC, BIC, W,A,K-S,P-Value)، إن خلال النتائج، توصل الباحثون إلى امتلاك توزيع (ChR)دالة كثافة احتمالية سهلة يمكن ادارتها والاستنتاج منها بسهولة، ويؤكد مرونة التوزيع والذي يجعله مرشحا للاستخدام في عدة مجالات ولمختلف الظواهر.

الكلمات المفتاحية: توزيع رايلي، عائلة تشين –جي، العزوم الناقصة، طريقة الامكان الأعظم.

1. المقدمة Introduction

في العقود الأخيرة، درس الباحثون إضافة معلمة (أو معلمات) جديدة لتوسيع التوزيعات الكلاسيكية والتقليدية المعروفة لزيادة مرونتها، بهدف إمكانية توسيع تطبيقها في مختلف المجالات، كالاقتصاد والبيئة والتمويل والتأمين وفي بحوث العمر كتطبيق لعلوم الطب والعلوم البيولوجية والفيزياء والهندسة، وذلك لبروز حاجة ملحة لأنواع موسعة من التوزيعات التقليدية (نظر 298, Khaleel, et.al.,2020) فجاء توليد العوائل الاحصائية كأداة مهمة لتطويع بيانات الظواهر الحديثة بتسهيل نمذجتها احصائيا، فيكون دورها المساهمة في توليد توزيعات يمكنها القيام بذلك بهدف تحليلها أو التنبؤ المستقبلي لسلوكها، وبناءً على ميزات وخصائص العائلة، يحدد الباحثون العائلة التي يمكن أن يكون لها دور في توليد التوزيع المناسب لدمجه مع التوزيع المطلوب توسيعه لوصف بيانات الظاهرة. هنا يمكن للمرء، من عدّ العائلة الاحصائية اشبه بخيمة تندرج تحتها مجموعة مختلفة من التوزيعات الاحتمالية، التي يمكنها نمذجة البيانات المختلفة، ولها القدرة على توليد توزيعات أخرى حسب نوع الظاهرة بناءً على المعلومات المتاحة، (Anzagra, et al., 2020: 2) حيث قاموا بتطوير عائلة سميت (Chen-G class distribution) من التوزيعات ودرسوا خواصها الإحصائية كالعوائل المبتورة. حيث اقترح (truncated inverse Waybill Rayleigh distribution [0, 1])،

وتمت دراسة خواصه ومرنته، في اشارة لأهمية العوائل في تطويع ما يمتلكه توزيع رايلي من خواص لدراسة وتحليل المختلف الظواهر (Khaleel, et al., 2022: 2933)، في حين إن الحبيب وآخرون اقترحوا العائلة (New Family of Truncated Nadarajah-Haghighi-G) ودرسوا خواصها (Al-Habib, et al., 2023: 312). ولأثبات قدرتها وعلى تعامل توزيعاتها مع الظواهر في العالم الحقيقي، أما حبيب وآخرون اقترحوا التوزيع (OJCA Rayleigh distribution) (Habib, et al., 2023: 195) في إشارة، لتوظيف توزيع رايلي من خلال تحسين خواصه بإضافة معلمة أو أكثر لجعله أكثر مرونة. في الواقع يعد التوسيع بشكل عام لأي توزيع بمثابة تعديل أو تعميم لصيغته الرياضية، يلجأ لها الباحثين عند الحاجة لمرونة أكبر لتناسب بشكل لتلائم بيانات الظواهر الجديدة، وذلك للمساعدة على نمذجة البيانات بدقة أكبر. يعد توزيع رايلي أحد التوزيعات الاحتمالية المستمرة وله القدرة على نمذجة البيانات في مختلف المجالات المذكورة في أعلاه. حيث إن توسيعه يزيد من طيف استخداماته في تحليل البيانات ونمذجتها في تلك المجالات عند تجدد الظواهر أو تطورها. لا يفوتنا أن نذكر، أن لهذا التوزيع عدة صيغ، منها ما يتم وصفه بمعلمة قياس (scale parameter) واحدة، يكون درها تحديد شدة التوزيع. في هذا السياق يشير توسيع توزيع رايلي إلى تعديل صيغته القياسية بزيادة المعلمات، والتي قد تلعب دورا في توفير مرونة جيدة تضمن تحديث قدرته على نمذجة طيف من البيانات الممثلة للظواهر المستجدة، هذا من جانب، من جانب آخر، سيكون لإضافة معلمات جديدة دور في توضيح خصائص التوزيع كالشكل والمرونة وما يتعلق بالالتواء.

في هذه الدراسة تم اقتراح توزيع جديد (ChR) باستخدام منهج (Anzagra, et al., 2020: 1) والذين قاموا بتطوير عائلة سميت (Chen-G class distribution) (Anzagra, et al., 2020: 1). والهادفة لتحسين مرونة التوزيعات الكلاسيكية من خلال توسيع توزيع رايلي على هذه العائلة ودراسة أغلب خواصه الاحصائية، وتطبيقه على بيانات لظواهر حقيقية. جاء الدافع الرئيس من وراء كتابة هذا البحث هو توسيع طيف قدرات توزيع رايلي في التعامل مع الالتواءات شبه المتماثلة، والذي بدوره يساعد على زيادة مرونة توزيع رايلي، ويعطيه افضلية في زيادة تطبيقاته ليشمل ظواهر يتمكن من نمذجتها بدقة، في حين كانت المساهمة العلمية فب سبر أغوار عالم البيانات وتحليلها من خلال توظيف عائلة (Chen-G class distribution) ودمجها بتوزيع رايلي لدراسة خواص التوزيع الموسع، والذي تكمن أهمية دراسته في امكانية زيادة مدى مرونته وقدرته على التعامل مع بيانات بالتواءات معينة يتم دراستها بعمق والمساعدة على نمذجة طيف من بيانات الظواهر التي استجدت تطبيقاتها في حياتنا اليومية نتيجة التقدم المتسارع.

نظمت هذه الورقة على النحو الآتي: في القسم الأول، ملخص ومقدمة ناقشت دور بعض العوائل في توليد للتوزيعات الاحتمالية علاوة على مشكلة وهدف الدراسة. في القسم 2، يتم مناقشة التوزيع المقترح (ChR). في القسم 3، يتم توسيع التوزيع (ChR) ودراسة أهم خواصه كـ (العزوم، والدالة المولدة للعزوم...الخ)، وطريقة تقدير الإمكان الأعظم لتقدير لمعلماته. فيما كرس القسم 4، لتوضيح سلوك التوزيع الجديد باستخدام مجموعتي بيانات حقيقيتين. وأخيرًا، في القسم 5 يتم تناول الاستنتاجات التوصيات التي خرج بها الباحثون.

2. **مشكلة البحث:** إن تعديلً صيغة النموذج الرياضي لتوزيع رايلي عن طريق كتابة المعلمة بصيغ عدة، قد يكون مناسب لأنواع مختلفة من البيانات. في هذا السياق، تبرز مشكلة البحث في عدم اليقين من

أن بيانات الظواهر الجديدة والتي يكون شكلها محددا يمكن حلة بإضافة معلمة جديد للموقع (location parameter)، والتي تساعد في التحكم في العديد من الخصائص للتوزيع، ويكون دورها تحريك منحنى التوزيع على المحور الأفقي، فيمكن استخدامها للتحكم بموقع القمة أو البداية لهذا المنحنى، أم يكون الحل بإضافة معلمة للتحكم في شكل التوزيع (shape parameter) والتي ستكون مسؤولة عن شكل الانحناء منحنى التوزيع. في الواقع، إن تغير قيمة المعلمات بصورة عامة سيئول لتوزيعات بسمات عدة، منها نوع التدبب وما يرافقه من ذيل طويل او قد يكون شبة متماثل. يساعد هذا السياق من توسيع لنمذجة المشاكل التي قد تتكون بياناتها ذات اشكال غير منتظمة كالتوزيعات ذات الذيول الثقيلة (heavy-tailed distributions)، والتي بدورها تستخدم لنمذجة البيانات غير القياسية.

3. **هدف البحث:** إن نوع الاستخدام المحدد للتوزيع والغرض منه يلعبان دورا في توسيع التوزيعات ومنها توزيع رايلي، فيكون توسيعه يأتي لتلبية احتياجات التحليل الإحصائي، أو ليلائم البيانات المتاحة بشكل أكثر دقة. باختصار إن الهدف الرئيس من توسيع توزيع رايلي هو لزيادة المرونة من خلال التحكم بمعلمات التوزيع القياسي لتلائم البيانات، والذي يتم عن طريق إضافة معلمات جديدة أو تعديل الشكل الرياضي للتوزيع القياسي، والتي تساعد على توليد نماذج عدة من منحنيات التوزيع، حيث تأخذ معلماته قيم مختلفة بهدف لتلبي متطلبات التحليل والنمذجة الإحصائية نتيجة تعدد الظواهر نتيجة التطور السريع في مختلف الميادين، وقد يكون هدف تعديل الانحراف القياسي للتوزيع لتعديل الانحراف القياسي للتوزيع عن طريق باستخدام توزيعات بعدة معلمات.

4. **توزيع (Rayleigh)**: يعد توزيع رايلي واحد من أهم التوزيعات الإحصائية، والذي يستخدم في مجالات عدة منها الموجات الصوتية الأمر الذي دعا العديد من الباحثين إلى الاهتمام به واجراء العديد من التوسيعات علية وتمت دراسته بعمق من قبل العديد من الباحثين، حيث قام Barrancoواخرون في عام 2021 بتعميم جديد لتوزيع GR، لنمذجة البيانات ذات القمم العالية، وأكدوا أن توزيعهم المقترح هو نسبة بين متغيرين عشوائيين مستقلين (a GR distribution and a power of the exponential distribution). واشتقوا بعض الحالات الخاصة كتوسيعات ذات معلمتين لتوزيعات رايلي، ونصف طبيعي وماكسويل ومربع كاي، (Barranco-Chamorro et al., 2021: 2).

قام .Ahmad واخرون بتوليد عائلة احصائية جديدة في عام 2023 وذلك بتوظيف وظيفة الجيب الزائد. والاستناد على توزيع رايلي كنموذج الأساسي لتلك لعائلة التوزيعات الجديدة (الجيب الزائد -رايلي الجديد). اجريت دراسة محاكاة لفحص وتقييم سلوك المقدرات التي تم تقديرها بطريقة الإمكان الأعظم/كما درست خواصه الكلاسيكية، استخدمت مجموعتين من بيانات حقيقية في تحليل البقاء ومجالات العمر لأثبات إمكانية التوزيع الإحصائية (Ahmad et, al., 2023: 1)، في حين قُدم توسيع جديد لتوزيع (An Extension of Exponentiated Rayleigh Distribution: Properties and Applications) على يد Bhat وآخرون تناولوا فيه توسيع توزيع رايلي الاسي الذي قدُم بواسطة (Surles and Padgett 2001) من خلال النظر في تحويل الطاقة لمتغير العشوائية الجديد ويشار إلى التوزيع على أنه توزيع رايلي للقدرة بواسطة (Bhat, Ajaz Ahmad, et. al., 2023: 1). بينما التوزيع المقترح، والذي قُدم على يد Haseeb وآخرون، هو توسيع لتوزيع (Moment Properties of Generalized Order Statistics Based on Modified Weighted Rayleigh Distribution) تناولوا فيه احصائيات الطلب

المعممة هي نموذج موحد لمخططات عشوائية مرتبة عدة مثل احصائيات الطلب وقيم التسجيل (Athar, H.,, et. al., 2023: 1). وفي ذات العام تم توسيع جديد بواسطة (El-Sayed A, et al., 2023) وهو توسيع Bayesian and Non-Bayesian Estimation for the Parameter of Bivariate Generalized Rayleigh Distribution Based on Clayton Copula under Progressive Type-II Censoring with Random Removal) حيث يدرس هذا البحث توزيع رايلي المعمم ثنائي المتغيرات على أساس كوبولا كلايتون وتسمى (Clayton_BGR) وظيفته تطبيق نظام الرقابة التدريجي من النوع الثاني مع ازالة العشوائيات على توزيع كلايتون BGR، كذلك مناقشة الأساليب على الرقابة التقدمية من النوع الثاني. كذلك تم دراسة محاكاة لمقارنة الأداء بين انظمة الرقابة. إن التوزيع المقترح من قبل Proloy وآخرون في عام 2023 هو توسيع لتوزيع (Exponential Transformed Inverse Rayleigh Distribution: Statistical Properties and Different Methods of Estimation) في حيث درسوا تعميم توزيع رايلي العكسي باستخدام تحويل DUS يسمى باسم اسي محول توزيع معكوس رايلي (ETIR)هناك بعض الخصائص الاحصائية لهذا التوزيع مثل الوضع، الكميات، اللحظة، وظيفة توليد اللحظة ومعدل الخطر (Proloy Banerjee, et al., 2023: 219). أن دالة كثافة الاحتمال ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع رايلي تعطى بالصيغ الأتية:

نعرف دالة التوزيع التراكمي cdf لتوزيع Rayleigh (Elgarhy, M. 2019: 1061) مع معلمة قياس (s):

$$G(x,s) = 1 - e^{-sx^2} \quad , x,s > 0 \qquad (1)$$

دالة كثافة الاحتمالية pdf لتوزيع (Rayleigh Elgarhy, M., 2019: 1061)

$$g(x,s) = 2sxe^{-sx^2} \qquad (2)$$

5. **عائلة Chen:** تعد العائلات تعميمات للتوزيعات الموجودة من قبل الباحثين. حيث تم تطوير عائلة التوزيعات التي سُميت عائلة Chen-G المقترحة من قبل (Anzagra et al., 2020: 1) كحجر زاوية في هذه الدراسة، والتي تم اثبات خصائصها الإحصائية مثل الدالة الكمية، العزوم، العزوم غير المكتملة، العشوائية، وتم دراسة مقدرات معلمات هذه العائلة. وُلِّد منها ثلاث توزيعات خاصة، تشين بور الثالث، تشين كوماراسوامي وتشين وبيول، بالرغم من أنه يمكن تعميم توزيعات أخرى لنمذجة، فان الباب يبقى مفتوحا لدراسة ظواهر يتم تنفيذ بيانتها على توزيعات يتم توسيعها على هذه العائلة لنمذجة مجموعة بياناتها حقيقية. ونعرف دالة التوزيع التراكمي cdf لعائلة chen –G family بالشكل (Anzagra et al., 2020: 2)

$$F(x,a,b) = A\left[1 - e^{a\left(1-e^{G(x,s)^b}\right)}\right] \qquad (3)$$

دالة كثافة الاحتمالية pdf لعائلة chen –G family بالشكل(Anzagra et. al, 2020,2)

$$f(x,a,b) = Aabg(x,s)\big(G(x,s)\big)^{b-1} e^{G(x,s)^b} e^{a\left(1-e^{G(x,s)^b}\right)} \qquad (4)$$

6. **التوزيع الجديد Chen Rayleigh:** للحصول على دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الجديد نقوم بتعويض معادلة دالة التوزيع التراكمي للتوزيع رايلي في معادلة دالة التوزيع التراكمي للعائلة تشن بعدها نحصل دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الجديد ChR

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

$$F(x,a,b) = A\left[1 - e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)}\right] \qquad (5)$$

وبعد التبسيط نحصل على دالة التوزيع التراكمي cdf لتوزيع ChR

$$F(x,a,b) = A\left[1 - £_{v,n,m,h}e^{-shx^2}\right] \qquad (6)$$

$$Let, £_{v,n,m,h} = \sum_{v,n,m,h=0}^{\infty} (-1)^{n+h}\frac{a^v n^m}{v!\,m!}\binom{v}{n}\binom{bm}{h}$$

لتوسيع دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الجديد Chen Rayleigh ذلك نقوم بتعويض دالة التوزيع التراكمي للتوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع رايلي في دالة الكثافة الاحتمالية للعائلة تشن

$$f(x,a,b) = 2Aabsxe^{-sx^2}\left(1 - e^{-sx^2}\right)^{b-1} e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b} e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)} \qquad (7)$$

وبعد التبسيط نحصل على دالة كثافة الاحتمالية pdf لتوزيع ChR

$$f(x,a,b) = \tilde{\text{E}}_{j,i,t,w}xe^{-sx^2(1+w)} \qquad (8)$$

$$Let,\ \tilde{\text{E}}_{j,i,t,w} = 2Aabs\sum_{j,i,t,w=0}^{\infty}(-1)^{i+w}\frac{a^j(1+i)^t}{j!\,t!}\binom{j}{i}\binom{bt+b-1}{w}$$

7. دالة البقاء Survival function **(**Safari, W. C., et al., 2021: 3**)**

تعطى دالة البقاء للتوزيع المقترح بالصيغة الاتية

$$S(x) = 1 - F(x)$$

$$S(x,a,b)_{ChR} = \mathbf{1} - A\left[\mathbf{1} - \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)}}\right],\quad x > 0, s, b, a > 0$$

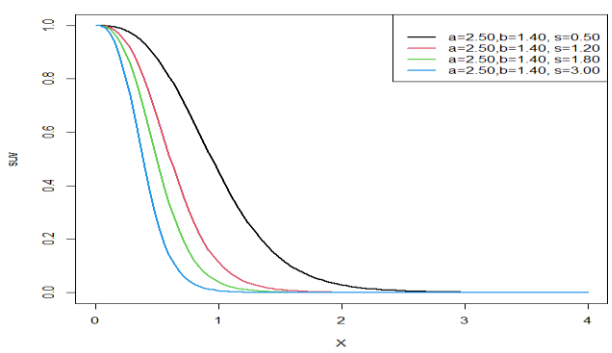
8. دالة المخاطرة Hazard function

(Feng, G. el at., 2010.4)إن دالة البقاء لأي توزيع احتمالي يمكن إيجادها وفق الصيغة الأتية

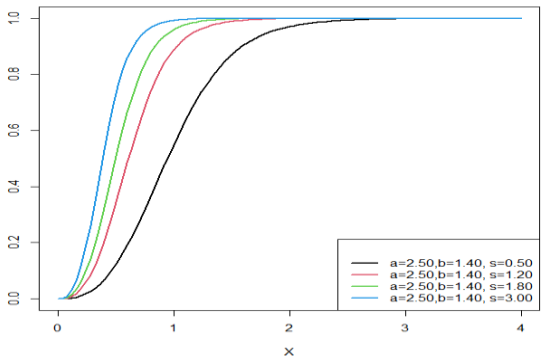
$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

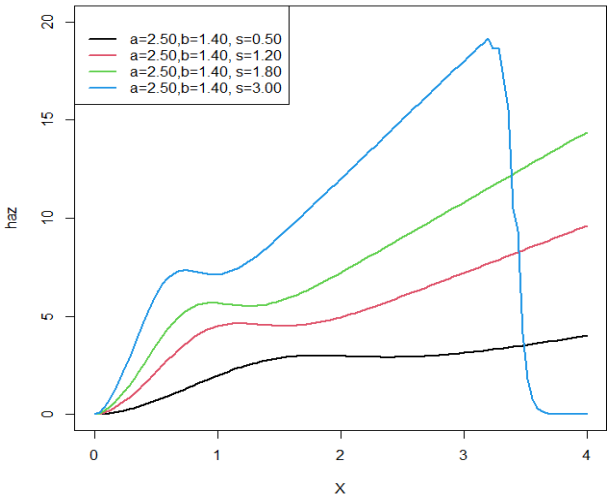
$$h(x,a,b)_{ChR} = \frac{2Aabsxe^{-sx^2}\left(1-e^{-sx^2}\right)^{b-1} e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b} e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)}}{1-A\left[1-e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)}\right]}$$



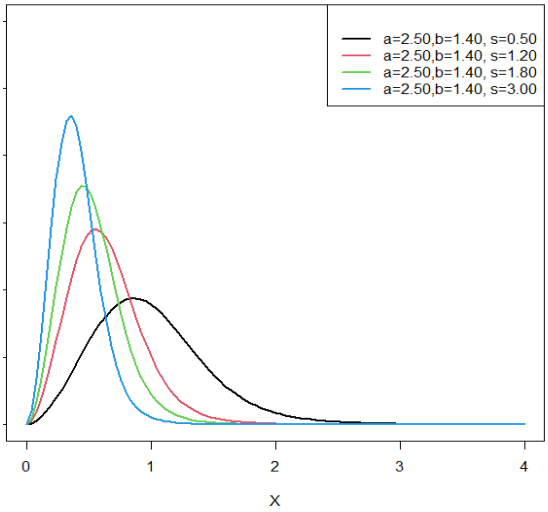
الشكل (b) شكل دالة survival لتوزيع ChR



الشكل (a) شكل دالة cdf لتوزيع ChR



الشكل (d) شكل دالة hazard لتوزيع ChR



الشكل (c) شكل دالة pdf لتوزيع ChR

9. الدالة التجزيئية Quintile function: الدالة التجزيئية بالرمز Q(X)، حيث إن x يمثل النسبة المئوية التي يطلب معرفتها، وبالتالي، تستخدم لحساب الكميات المعينة المطلوبة في تحليل البيانات وتوزيعها في العديد من الاستخدامات الإحصائية كتحليل الاحتمالات والبيانات الكبيرة وتحديد القيم القصوى وكما تستخدم في المحاكاة، وتمت دراسة هذه الخاصية من قبل الباحث (Hyndman, R. J. el at., 1996: 361), وهي تمثل معكوس دالة التوزيع التراكمي.

$$\boldsymbol{Q(u) = F^{-1}(x)}$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{s}\ln\left(1-\sqrt[b]{\ln\left(1-\frac{1}{a}\ln\left(1-\frac{u}{A}\right)\right)}\right)^{-1}}$$

10. **الخواص الإحصائية للتوزيع المقترح:** يهتم الباحثون والمحللون الاحصائيون في معرفة الخصائص الإحصائية للتوزيع المقترح، لدورًها الكبير في تحليل وفهم التوزيعات الاحتمالية، والتي تساعد في تحديد مدى ملائمته لتطبيق معين، ومن خلال فحص هذه الخصائص الإحصائية، يمكن للباحثين والمحللين الحصول على نظرة ثاقبة حول سلوك وشكل التوزيع المقترح، مما يساعدهم على اتخاذ قرارات مستنيرة عند تحليل البيانات، واستخلاص استنتاجات ذات معنى في مختلف المجالات المختلفة كالتمويل في الاقتصاد والبقاء في التجارب الطبية، والفشل في التجارب الهندسية...الخ. سيتم التطرق لبعض الخصائص الإحصائية لتوزيع (**ChR**.) المقترح.

11. **العزوم المكتملة حول نقطة الأصل moments about origin Complete:** تعرف **العزوم** المكتملة حولة نقطة الأصل بالصيغة الآتية.

$$\mu_r = E(x^r)_{ChR} = \int_0^{\infty} x^r\, f(x,a,b)_{ChR}\, dx = \int_0^{\infty} x^r\, \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w}\, x e^{-sx^2(1+w)}\, dx$$

$$\mu_r = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \int_0^{\infty} x^{r+1}\, e^{-sx^2(1+w)}\, dx$$

$$\mu_r = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \frac{1}{2\left(s(1+w)\right)^{\frac{r+2}{2}}} \Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

في الواقع، يتم حساب العديد من تلك المؤشرات من خلال تحديد قيمة القوة (r) التي يتم رفع القيم إليها كتمثيل لترتيب العزوم. حيث يمثل العزم الأول التي تمثل قيمة التوسط أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي، أما العزم الثاني حول نقطة الأصل أو ما يعرف بـ(Ex^2)، وهو يمثل الوسط لمربعات قيم المتغير العشوائي، اي مرفوع الى القوة الثانية، والذي يعطي فكرة عن تشتت البيانات التوزيع حول نقطة الأصل، فإذا كانت قيمته صغيره يعطي صوره عن درجة تشتت البيانات حول المتوسط، فإذا كانت قيمته كبيره يعطي صوره عن درجة تفاوت تشتت البيانات حولها. وهكذا للعزم الثالث والعزم الرابع. فمن خلال معادلة (؟) يمكن ايجاد تلك العزوم حسب تسلسلها الانف الذكر وكالآتي:

$$\mu_1 = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \frac{1}{2\left(s(1+w)\right)^{\frac{3}{2}}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \mu_2 = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \frac{1}{2\left(s(1+w)\right)^{2}} \Gamma(2)$$

$$\mu_3 = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \frac{1}{2\left(s(1+w)\right)^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \mu_4 = \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \frac{1}{2\left(s(1+w)\right)^{3}} \Gamma(3)$$

وبالاعتماد على معادلات μ_1 وμ_2 يمكن إيجاد التباين للوزيع المقترح وفق الصيغة الاتية

$$Var(X) = \mu_2 - (\mu_1)^2$$

12. **الدالة المولدة للعزوم (Moment Generating Function-(MGF)):** الدالة المولدة للعزوم لها أهمية كبيرة في مجال الإحصاء الرياضي عند تحليل توزيع العزوم لمتغير عشوائي، لدورها

الحيوي في توليد جميع العزوم أيا كانت للتوزيع الاحتمالي. وتكون الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المقترح (Curtiss,. et al., 1942: 430) بالصيغة:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x,a,b)dx$$

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \int_{0}^{\infty} x^r f(x,a,b)\, dx = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} E(x^r)$$

$$M_x(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \frac{\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}_{j,i,t,w}}{2\big(s(1+w)\big)^{\frac{r+2}{2}}} \Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

13. الدالة المميزة Characteristic function

يمكن إيجاد الدالة المميزة (Shephard, N. G., et al 1991.520) بالشكل

$$Q(t)_{ChR} = E\left(e^{itx}\right) = \int_0^{\infty} e^{itx} f(x,a,b)_{ChR} dx$$

$$Q(t)_{ChR} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(it)^r}{t!} \frac{\tilde{\tilde{\mathrm{E}}}_{j,i,t,w}}{2\big(s(1+w)\big)^{\frac{r+2}{2}}} \Gamma\left(1+\frac{r}{2}\right)$$

14. **العزوم الناقصة Incomplete Moments** تستخدم العزوم الناقصة لتحليل توزيع البيانات وتقدير شكلها، وتعد من أهم المقاييس الإحصائية كونها تعكس التواء البيانات نحو اليسار أو اليمين عن قيمة وسطها الحسابي، (Kamat, et al.,1953: 110) حيث يتم حسابها باستخدام الصيغة الآتية:

$$\mu_l(y) = E\left(X^l X_y\right) = \int_{-\infty}^{y} X^l f(x,a,b)_{ChR} dx$$

$$\mu_l(y) = E\left(X^l X_y\right) = \int_{0}^{y} X^l \tilde{\tilde{\mathrm{E}}}_{j,i,t,w} x e^{-sx^2(1+w)} dx$$

$$\mu_l(y) = \tilde{\tilde{\mathrm{E}}}_{j,i,t,w} \int_{0}^{y} X^{l+1} e^{-sx^2(1+w)} dx$$

ولغرض الحصول على قيمة dx سيتم تحويل الاستخدام $t = (v+n)(\varphi x^2)$ وعلى النحو الآتي:

نستخدم التحويل $t = (1+w)(sx^2)$ من خلال التبسيط نحصل قيمة X

$$\mu_l(y) = \frac{\tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w}}{2\left(s(1+w)\right)^{\frac{l+2}{2}}} \int_0^y t^{\frac{l}{2}} e^{-t} dt$$

$$\mu_l(y) = \frac{\tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w}}{2\left(s(1+w)\right)^{\frac{l+2}{2}}} \gamma\left(\frac{l+2}{2}, y\right)$$

15. الإحصاءات المرتبة Order Statistic: الإحصاءات المرتبة هي مفهوم يستخدم في الإحصاء ونظرية الاحتمالات لوصف قيمة متغير عشوائي ضمن مجموعة من قيمه المشاهدة أو نقاط البيانات المرتبة بترتيب تصاعديا أو تنازليا، ويمكن الحصول على الإحصاءات المرتبة من العلاقة:

$$f_{\tau,n}(x) = \frac{n!}{(\tau-1)!\,(n-\tau)!} f(x)[F(x,a)]^{\tau-1}[1-F(x,a,b)]^{n-\tau}$$

ومن ادراج دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح يمكن كتابة دالة كثافة الإحصاءات المرتبة للتوزيع المقترح بالشكل:

$$\boldsymbol{f_{\tau,n}(x,a,b)_{ChR} = D_{b,l,k,z,v,t}\, e^{-sx^2(1+w+p)}}$$

بحيث إن

$$\boldsymbol{D_{b,l,k,z,v,t}} = \sum_{b,l,r,t,i,p=0}^{\infty} (-1)^{b+l+t+p} \frac{n!\, A^b (al)^r t^i}{r!\, i!\, (n-1)!} \binom{r}{t} \binom{ib}{p} \binom{n-1}{b} \binom{b}{l} \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} x$$

من المعادلتين أعلاه عند التعويض بـ $\tau = 1$ نحصل على أصغر إحصاءه مرتبة عند التعويض بـ $n\tau =$ نحصل على أكبر احصاءه مرتبة لزيادة الاطلاع (Gupta, S. S. 1960: 244)

16. ريني انتروبيا Renyi Entropy: يعرف راينيي انتروبيا (Leonenko, & Seleznjev 2010,1984) بالشكل الآتي:

$$I_R(c) = \frac{1}{1-c} log \int_0^{\infty} f(x)^c dx \quad c > 0\,, c \neq 1$$

وبالتالي يمكن الحصول على ريني انتروبيا للتوزيع *Chen Rayleigh distribution*

$$I_R(c)_{ChR} = \frac{1}{2(1-c)\left(\left(cs(1+w)\right)^{\frac{c+1}{2}}\right)} \log \tilde{\tilde{E}}_{j,i,t,w} \left(\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)\right)$$

17. مقدرات الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation: لتقدير معالم توزيعنا الجديد سنستخدم طريقة الإمكان الأعظم كونها من أفضل طرق تقدير المعالم وذلك من خلال الاشتقاق الجزئي لدالة الإمكان الأعظم ((Barndorff,1983,16) في بداية الأمر سنأخذ عينه عشوائية $x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_n$ بحجمn من التوزيع الجديد ChR

$$f(x,a)_{ChR} = 2Aabsxe^{-sx^2}\left(1-e^{-sx^2}\right)^{b-1} e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b} e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx^2}\right)^b}\right)}$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

$$L = L(A, a, b, s, |x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x, a)_{ChR}$$

$$\boldsymbol{L = L(a, b, s, |x_i)}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\boldsymbol{2Aabsx_i e^{-sx_i^2}\left(1 - e^{-sx_i^2}\right)^{b-1} e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}} e^{a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}}\right)}} \right)$$

$$\boldsymbol{L(A, a, b, s, |x_i)}$$

$$= (\boldsymbol{2Aabs})^{n} \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{x_i}\, \boldsymbol{e^{-\sum_{i=0}^{n}(sx_i^2)}} \sum_{i=0}^{n} \left(\boldsymbol{1 - e^{-sx_i^2}}\right)^{b-1} \boldsymbol{e^{\sum_{i=0}^{n}\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}}} \boldsymbol{e^{\sum_{i=0}^{n} a\left(1-e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}}\right)}}$$

$$\mathrm{Ln}\, L = 2nln(A) + nln(a) + nln(b) + nln(s) + \sum_{i=0}^{n} \ln(x_i) - \sum_{i=0}^{n} (sx_i^2)$$
$$+ (b-1) \sum_{i=0}^{n} ln\left(1 - e^{-sx_i^2}\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(1 - e^{-sx_i^2}\right)^{b}$$
$$+ a \sum_{i=0}^{n} \left(1 - e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}}\right)$$

$$\frac{d \ln L}{da} = \frac{n}{a} + \sum_{i=0}^{n} \left(1 - e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{d \ln L}{db} = \frac{n}{b} + \sum_{i=0}^{n} ln\left(1 - e^{-sx_i^2}\right) + \sum_{i=0}^{n} \left(1 - e^{-sx_i^2}\right)^{b} \ln\left(1 - e^{-sx_i^2}\right)$$
$$- a \sum_{i=0}^{n} \left(1 - e^{-sx_i^2}\right)^{b} ln\left(1 - e^{-sx_i^2}\right) e^{\left(1-e^{-sx_i^2}\right)^{b}} \qquad (2)$$

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

$$\frac{d\ln L}{ds} = \frac{n}{s} - \sum_{i=0}^{n} {x_i}^2 + (b-1)\sum_{i=0}^{n} ln{x_i}^2 e^{-s{x_i}^2} + \frac{b{x_i}^2\left(1-e^{-s{x_i}^2}\right)^b}{e^{s{x_i}^2}-1}$$

$$- ab{x_i}^2\left(1-e^{-s{x_i}^2}\right)^{b-1} e^{\left(1-e^{-s{x_i}^2}\right)^b - s{x_i}^2} \qquad (3)$$

سنساوي المعادلات الثلاث الأخيرة 1,2,3 بالصفر لغرض الحصول على مقدرات الإمكان الأعظم

$$\frac{d\ln L}{da} = \frac{d\ln L}{db} = \frac{d\ lnL}{ds} = 0$$

ويتضح لنا بعد مساواتها بالصفر من الصعب ايجاد حلول لهذا المعادلات يدويا لذلك سوف نلجأ إلى الطرق العددية لايجاد حلول تقريبية ويتم ذلك من خلال البرامج الحاسوبية لكي نوجد مقدرات الامكان الاعظم مثل برنامج R.

الجانب العملي

استخدمت البيانات الفعلية لدراسة سلوك التوزيع ChR بواقع مجموعتين من البيانات الحقيقية، لبيان مدى قدرت التوزيع المقترح على نمذجة أنواع مختلفة من الظواهر مقارنة بالتوزيعات الأخرى. وللوصل لهذا الهدف وظفت عدة معايير إحصائية كـ (AIC,W,A,K-S,P-value,-2L، CAIC، BIC، HQIC) لتقييم أداء توزيع ChR مع التوزيعات الاتية (الأسي المعمم رايلي (EGR)، كوماراسوامي رايلي (KuR)، ويبول رايلي (WeR)، جومبيرتيز رايلي (GoR)، رايلي (R)، مارشال اولكين رايلي (MoR).

البيانات الأولى: لبيانات الأولى. مجموعة البيانات الأولى مثلت على عمر معين لجهاز قدمها (Cordeiro, et al., 2014)

0.0094, 0.0500, 0.4064, 4.6307, 7.1645, 7.2316, 8.2616, 9.2662, 9.3812, 9.5223, 9.8783, 10.4791, 11.0760, 11.3250, 11.5284, 11.9226, 12.0294, 12.5381, 12.8049,13.4615,13.8530, 5.1741, 5.8808, 6.3348, 10.4077, 10.0192, 9.9346, 12.1835, 12.0740, 12.3549

البيانات الثانية: مثلت مجموعة البيانات أوقات فشل 84 لوح زجاجي للقمرات الأمامية للطائرات قيم مجموعة البيانات هي: ((El-Bassiouny, et. al, (2015)

0.040, 1.866, 2.385, 3.443, 0.301, 1.876, 2.481, 3.467, 0.309,1.899, 2.610, 3.478, 0.557, 1.911, 2.625, 3.578, 0.943, 1.912,2.632, 3.595, 1.070, 1.914, 2.646, 3.699, 1.124, 1.981, 2.661,3.779,1.248, 2.010, 2.688, 3.924, 1.281, 2.038, 2.82,3, 4.035, 1.281, 2.085, 2.890, 4.121, 1.303, 2.089, 2.902, 4.167, 1.432,2.097, 2.934, 4.240, 1.480, 2.135, 2.962, 4.255, 1.505, 2.154,2.964, 4.278, 1.506, 2.190, 3.000, 4.305, 1.568, 2.194, 3.103,4.376, 1.615, 2.223, 3.114, 4.449, 1.619, 2.224, 3.117, 4.485,1.652, 2.229, 3.166, 4.570, 1.652, 2.300, 3.344, 4.602, 1.757,2.324, 3.376, 4.663.

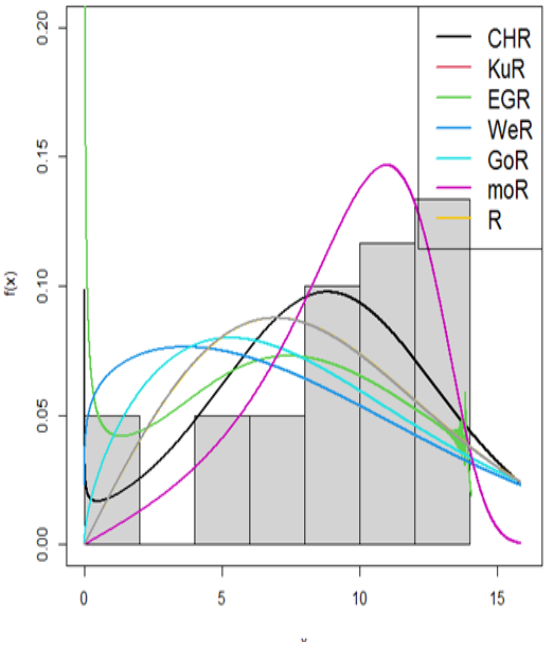
Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, Vol. 19, No. 64, Part (2): 607-623
Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

الجدول (1): الوصف الإحصائي للبينات الأولى والثانية

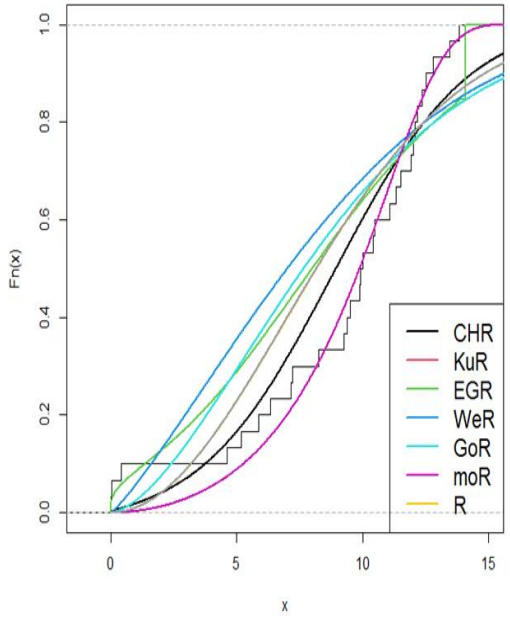
	Var	n	mean	median	min	max	skew	kurtosis
البيانات الأولى	X1	30	9.04	9.98	0.01	13.85	-1.05	0.16
البيانات الثانية	X2	85	2.56	2.38	0.04	4.66	0.09	- 0.69

الجدول (2): قيم K-S, A, W P-value للبيانات الأولى

Distribution	W	*A*	K-S	p-value
ChR	0.29422	1.8587	0.1987	0.1629
KuR	0.28722	1.8268	0.2574	0.0305
EGR	0.61928	3.5575	0.3102	0.00461
WeR	0.67828	3.8431	0.27853	0.0150
GoR	0.21607	1.4195	0.0994	0.8993
MoR	0.61576	3.5411	0.2572	0.0307
R	0.61697	3.5470	0.25812	0.0298



الشكل (e) منحنيات دوال الكثافة للتوزيع المقترح مع التوزيعات الأخرى للبينات الأولى



الشكل (f) منحنيات دوال التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح مع التوزيعات الأخرى للبينات الأولى

الجدول (3): قيم مقدرات المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم وقيم المعايير الإحصائية للبيانات الأولى

Distribution	MLEs	-2L	AIC	CAIC	BIC	HQIC
ChR	â = 2.378, b̂ = 0.307, ŝ = 0.014	80.20	166	167	170	167
KuR	â = 0.105, b̂ = 0.051, ŝ = 0.177	81.37	168	169	172	170
EGR	â = 1.081, b̂ = 0.577, ŝ = 0.577	89.71	185	186	189	186
WeR	â = 0.811, b̂ = 1.265, ŝ = 0.013	92.72	191	192	195	192
GoR	â = 0.029, b̂ = 0.146, ŝ = 0.104	85.93	177	178	182	179
MOR	â = 1.008, b̂ = 0.010	93.52	191	191	193	191
R	= 0.0104ŝ	93.55	189	189	190	189

الجدول (4): قيم K-S، A، W, P-value للبيانات الثانية

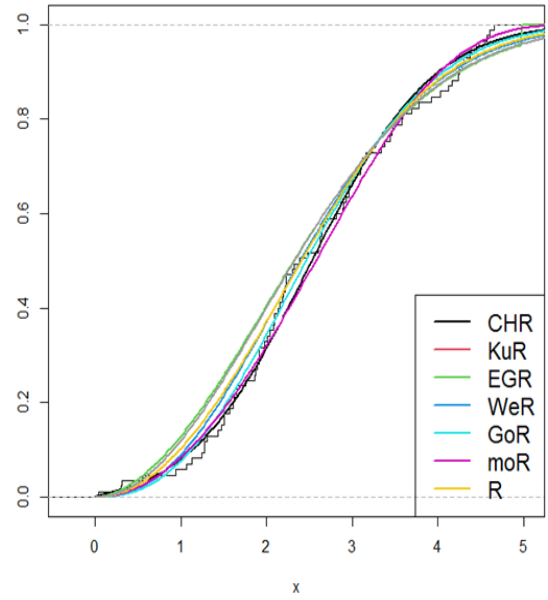
Distribution	W	A	K-S	*p*-value
ChR	0.0628	0.47204	0.07775	0.68299
KuR	0.0596	0.6102	0.1180	0.1868
EGR	0.0692	0.69352	0.08023	0.64439
WeR	0.0583	0.58617	0.05347	0.96822
GoR	0.8011	0.60885	0.08058	0.63897
MOR	0.0573	0.57715	0.08303	0.60101
R	0.0685	0.68627	0.11329	0.22531

الجدول (5): قيم مقدرات المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم وقيم المعايير الإحصائية للبيانات الثانية

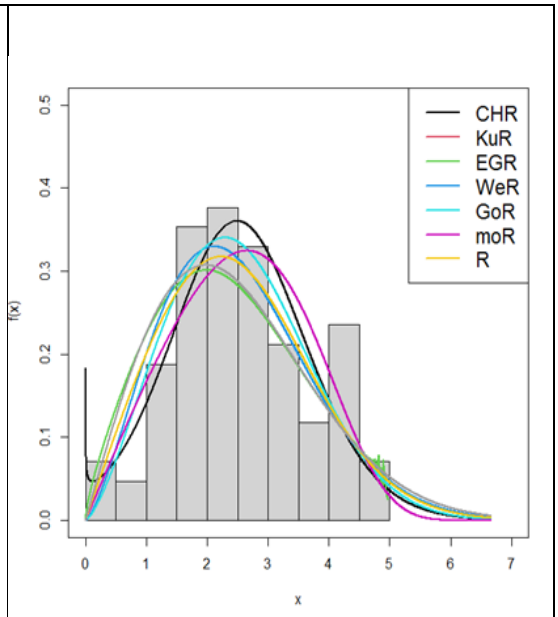
Distribution	MLEs	*-2L*	AIC	CAIC	BIC	HQIC
ChR	= 2.719, $\hat{b}$ = $\hat{a}$ 0.285, $\hat{s}$ = 0.187	128.29	262	262	269	265
KuR	= 0.849, $\hat{b}$ = $\hat{a}$ 0.083, $\hat{s}$ = 1.515	132.97	271	272	279	274

Doi: www.doi.org/10.25130/tjaes.19.64.2.32

Distribution	MLEs	-2L	AIC	CAIC	BIC	HQIC
EGR	$= 3.592, \hat{b} = \hat{a}$ 1.194, $\hat{s} = 0.039$	132.47	270	271	278	273
WeR	$= 1.196, \hat{b} = \hat{a}$ 0.730, $\hat{s} = 0.088$	131.28	268	268	275	271
GoR	$= 0.272, \hat{b} = \hat{a}$ 0.183, $\hat{s} = 0.315$	129.08	264	264	271	267
MOR	$= 1.446, \hat{b} = \hat{a}$ 0.154	131.31	266	266	271	268
R	$= 0.128\hat{s}$	133.21	268	268	270	269



الشكل (h) منحنيات دوال التوزيع التراكمي للتوزيع المقترح مع التوزيعات الأخرى للبيانات الثانية



الشكل (g) منحنيات دوال الكثافة للتوزيع المقترح مع التوزيعات الأخرى للبيانات الثانية

الاستنتاجات والتوصيات

نظرا لأهمية نمذجة البيانات وللحاجة الماسة لإيجاد توزيعات أكثر مرونة من التوزيعات التقليدية تمكن الباحثون من توسيع توزيع باستخدام عائلة (Chen-G Family) ليكون التوزيع المقترح هو ((Chen Rayleigh (ChR) ودرست مختلف الخواص الإحصائية وطبقت صيغته على بيانات مختلفة بواقع مجموعتين (اقتصادية وهندسية) في إشارة إلى قدرته على التعامل مع مختلف البيانات والتي على شاكلتها، أظهرت المجموعة الأولى تفوق التوزيع المقترح على بعض التوزيعات التي قورنت به، وتخلفه في بعض المعايير لحساب التوزيعات التي تقترب البيانات من نمذجتها بدقة وتم دمجها مع رايلي مسبقا، في إشارة إلى قوة التحدي الذي اثبته التوزيع المقترح، في

إشارة إلى أن البيانات كانت تأخذ الالتواء وقوة تعاملها معه من توزيع وشيه التماثل من ويبل، هنا كان للتوزيع المقترح قوه على المنافسة، في مجموعتي البيانات، في إشارة إلى مرونته في التعامل مع البيانات الهندسية كانت أكثر في البيانات الاقتصادية. يمكن أن يعزى سبب ذلك، إلى أن تركيب توزعين على العائلة G Family يخلق تذبذبا في سلوك المعلمات وتأثير قيم المتغير(البيانات) التي تؤثر على قدرت التوزيع على النمذجة. عموما اثبت التوزيع مرونة جيدة وقابيلة على التعامل مع طيف من مختلف الظواهر، كما أتضح من الأشكال قدرة التوزيع على نمذجة البيانات ذات الشكل شبه المتماثل أو قليلة الالتواء إلى اليمين، واتضح ذلك من نوع الالتواء عند فحص الالتواء والتفرطح، عند القيام برسم والأشكال المرافقة للبيانات، وكما اتضح من الجداول المرفقة أيضا، يوصي الباحثون بدراسة الخواص الأخرى للتوزيع المقترح، فضلا عن دراسة تطبيقه على بيانات في مجالات مختلفة، وكذلك دراسة تركيبه مع عوائل الـOdd كونها تختص بدراسة سلوك الخواص الفردية للتوزيعات والتي قد توسع طيف التطبيقات الإحصائية في نمذجة البيانات.

المصادر

1. Ahmad, A., Alsadat, N., Atchade, M. N., ul Ain, S. Q., Gemeay, A. M., Meraou, M. A., & Hussam, E., (2023), New hyperbolic sine-generator with an example of Rayleigh distribution: Simulation and data analysis in industry. Alexandria Engineering Journal, 73, 415-426.
2. Athar, H., Fawzy, M. A., & Alharbi, Y. F., (2023), Moment Properties of Generalized Order Statistics Based on Modified Weighted Rayleigh Distribution. European Journal of Statistics, 3, 1-1.
3. Banerjee, P., & Bhunia, S., (2022), Exponential Transformed Inverse Rayleigh Distribution: Statistical Properties and Different Methods of Estimation. Austrian Journal of Statistics, 51(4), 60-75.
4. Barndorff-Nielsen, O., (1983), On a formula for the distribution of the maximum likelihood estimator. Biometrika, 70(2), 343-365.
5. Barranco-Chamorro, I., Iriarte, Y. A., Gómez, Y. M., Astorga, J. M., & Gómez, H. W., (2021), A generalized Rayleigh family of distributions based on the modified slash model. Symmetry, 13(7), 1226.
6. Bhat, A. A., & Ahmad, S. P., (2023), An Extension of Exponentiated Rayleigh Distribution: Properties and Applications. Thailand Statistician, 21(1), 209-227.
7. Cordeiro, G. M., Ortega, E. M., & Silva, G. O., (2014), The Kumaraswamy modified Weibull distribution: theory and applications. Journal of Statistical Computation and Simulation, 84(7), 1387-1411
8. Curtiss, J. H., (1942), A note on the theory of moment generating functions. The Annals of Mathematical Statistics, 13(4), 430-433.
9. El-Bassiouny, A. H., Abdo, N. F., & Shahen, H. S., (2015). Exponential lomax distribution. International Journal of Computer Applications, 121(13)
10. Elgarhy, M., (2019), On the exponentiated Weibull Rayleigh distribution. Gazi University Journal of Science, 32(3), 1060-1081.

11. El-Sherpieny, E. S. A., Almetwally, E. M., & Muhammed, H. Z., (2023), Bayesian and non-bayesian estimation for the parameter of bivariate generalized Rayleigh distribution based on Clayton copula under progressive type-II censoring with random removal. Sankhya A, 85(2), 1205-1242.
12. Feng, G., (2010), Time course and hazard function: A distributional analysis of fixation duration in reading. Journal of eye movement research, 3(2). Anzagra, L., Sarpong, S., & Nasiru, S., (2020), Chen-G class of distributions. Cogent Mathematics & Statistics, 7(1), 1721401.
13. Gupta, S. S., (1960), Order statistics from the gamma distribution. Technometrics, 2(2), 243-262. Al-Habib, K. H., Khaleel, M. A., & Al-Mofleh, H., (2023), A New Family of Truncated Nadarajah-Haghighi-G Properties with Real Data Applications. Tikrit Journal of Administrative and Economic Sciences, 19(61, 2), 311-333.
14. Habib, K. H., Salih, A. M., Khaleel, M. A., & Abdal-hammed, M. K., (2023), OJCA Rayleigh distribution, Statistical Properties with Application. Tikrit Journal of Administration and Economics Sciences, 19(Special Issue part 5).
15. Hyndman, R. J., & Fan, Y., (1996), Sample quantiles in statistical packages. The American Statistician, 50(4), 361-365.
16. Kamat, A. R., (1953), Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications. Biometrika, 40(1/2), 20-34.
17. Khaleel, M. A., Abdulwahab, A. M., Gaftan, A. M., & Abdal-hammed, M. K., (2022), A new [0, 1] truncated inverse Weibull rayleigh distribution properties with application to COVID-19. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 13(1), 2933-2946.
18. Khaleel, M. A., Al-Noor, N. H., & Abdal-Hameed, M. K., (2020), Marshall Olkin exponential Gompertz distribution: Properties and applications. Periodicals of Engineering and Natural Sciences, 8(1), 298-312.
19. Leonenko, N., & Seleznjev, O., (2010), Statistical inference for the ϵ-entropy and the quadratic Rényi entropy. Journal of Multivariate Analysis, 101(9), 1981-1994.
20. Safari, W. C., López-de-Ullibarri, I., & Jacome, M. A., (2021), A product-limit estimator of the conditional survival function when cure status is partially known. Biometrical Journal, 63(5), 984-1005. Gilchrist, W., (2000), Statistical modelling with quantile functions. CRC Press.
21. Shephard, N. G., (1991), From characteristic function to distribution function: a simple framework for the theory. Econometric theory, 7(4), 519-529.