

استكشاف مقدرات لحصينة للوحة السيطرة للمتباہلات المفرطة Hotelling-T²

م. عائدة هادي صالح

* أ.م.د. حمزة اسماعيل شاهين

المستخلص

غالباً ما تستخدم لوحة السيطرة Hotelling-T² التقليدية في عملية السيطرة الاحصائية متعددة المتغيرات وكما هو معروف أن هذا النوع من لوحات السيطرة تكون حساسة جداً عند وجود مشاهدات شاذة في بيانات الوجه الاول (Phase I) للوحة السيطرة عند استخدامها لحساب حدود السيطرة . تم في هذا البحث استخدام لوحة السيطرة Hotelling-T² الحصينة للمشاهدات المفردة من خلال الاعتماد على مقدرات حصينة وكفؤة لمعلمتي الموقع \bar{y} والقياس \sum تعرف بمقدرات أصغر محدد تباين مشترك معاد الأوزان (RMCD) وبيان أي من لوحتي T² التقليدية والحصينة أكثر كفاءة في الكشف عن الانحرافات عن متوسط العملية الانتاجية وذلك عن طريق رسم كلا اللوحتين .

Abstract

To monitor a multivariate process classical Hotelling's T^2 control chart is often used. However , it is well known that such control charts are very sensitive to the presence of outlying observations in the historical phase I data used to set up its control limits .

In this paper we used a robust Hotelling's T^2 type control chart for individual observations based on robust and efficient estimators of location and scatter known as re weighted minimum covariance determinant (RMCD) estimators .

1- المقدمة وهدف البحث

تعتبر عملية السيطرة الاحصائية على نوعية وجودة المنتوج احدى أهم الأدوات التي تستخدمها إدارة أية شركة أو مؤسسة في إتخاذ القرارات المناسبة لضمان مستوى مقبول من النوعية والجودة في منتوج معين (3)

ومن أشهر أساليب عملية السيطرة الاحصائية على نوعية المنتوج لوحات السيطرة (Control Charts) والتي تعتبر بمثابة الضوء الأحمر الذي يضئ عند وجود عيب ما في منتوج معين قد يؤدي الى حدوث إنحراف ما في العملية الانتاجية ، فهي تظهر سبب هذا الإنحراف مما يساعد في علاجه وانتظام العملية الانتاجية من جديد .

ولوحات السيطرة تقسم الى نوعين ، لوحات سيطرة للصفات ، ولوحات سيطرة للمتغيرات والتي سوف يتم التركيز عليها في بحثنا هذا ، ومن أهم لوحات السيطرة للمتغيرات هي لوحة Hotelling-T² . وقد أثبت الباحثون Steiner و Variyath Chenaori (4) ، أن استخدام هذا النوع من لوحات السيطرة يؤدي الى ظهور مشاهدات تكون غير طبيعية في الوجه الاول (Phase I) للوحة السيطرة قد

* الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .

** الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .

مقبول للنشر بتاريخ 2013/2/4

تؤدي إلى تضخيم حدود السيطرة (Control Limits) ويقلل من قوة عملية الكشف عن المشاهدات التي تسبب الاحرافات عن متوسط العملية الانتاجية .

وكما هو معلوم أن احصاءة T^2 تعتمد بشكل رئيس على مقدري معلمتي الموقع μ والقياس Σ وهذين المقدرين يتصفان بالتحسّن الشديد اتجاه وجود الشوافذ في البيانات (8).

وقد أثبت الباحثان Hotelling-T² و Woodall & Sullivan (9)، أن لوحة السيطرة على المقدرات التقليدية لمعلمتي الموقع والقياس تكون ذات تأثير ضعيف في الكشف عن الاتحرافات عن موجة متوسط العمليات الانتاجية في حالة وجود مشاهدات شاذة في البيانات.

إن هذا البحث يهدف بالدرجة الأساس إلى استخدام لوحة سيطرة Hotelling-T² حصينة ذات تأثير فعال وقوى في الكشف عن الاتحرافات في العملية الإنتاجية بالاعتماد على مقدرات حصينة وكفؤة لمعلمي الموقع μ والقياس Σ تعرف بمقدرات أصغر محدد تبادل مشترك معاد الأوزان (RMCD) *

وكذلك يهدف البحث إلى بيان أي من لوحتي Hotelling-T² التقليدية والمحصينة أكثر كفاءة ودقة في الكشف عن الاحرافات عن طريق رسم هاتين اللوحتين .

ولقد تم استخدام الدوال الجاهزة في برنامج Matlab (معلمات الموقع) ومصفوفة التباين والتبابن المشترك (معلمة القياس) باستخدام مقدرات أصغر محدد تباين مشترك معاد الأوزان (RMCD).

2- لوحة السيطرة Hotelling-T² التقليدية

تعتبر لوحة Hotelling-T² من أشهر لوحات السيطرة متعددة المتغيرات في عملية المراقبة والسيطرة على موجة المتوسط للعملية الاتجاهية.

وبافتراض ان موجه المشاهدات \underline{X}_j اذ

يتبع التوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات بموجة المتوسط \bar{u} ومصفوفة التباين المشترك Σ ، وعند استخدام لوحة Hotelling- T^2 للسيطرة على نوعية المنتوج من خلال فحص عدة صفات (متغيرات) في آن واحد ، فإنه يتم حساب حد أعلى للسيطرة فقط (Upper Limit) (Upper Limit) وهو عبارة عن قيمة T^2 بمستوى معنوية α ودرجة حرية $(p, n-p)$ إذ أن (5)

حيث أن :

P : عدد المتغيرات (الصفات) .

n : حجم العينة.

α : مستوى المعنوية.

والقيمة الحرجية لـ T^2 تستخرج من جداول خاصة تعرف بجدائل Hotelling-T² أو يمكن ان تستخرج من جداول F وحسب الصيغة الآتية :

ويمكن إعادة كتابة صيغة الحد الأعلى للسيطرة كالتالي :

و هذا الحد الأعلى هو الحد الذي يسمح بالوصول اليه بالنسبة للمشاهدات قيد الاختبار حيث ان عبور هذه المشاهدات للحد المذكور يجعلها خارج حدود السيطرة .

(Re-weighted minimum covariance determinant estimators) مختصر للمصطلح (RMCD) *

وللرغم فحص كل مشاهدة فيما إذا كانت تحت السيطرة أم لا ، يتم حساب قيمة احصاء \bar{A} لكل مشاهدة j كالتالي :

اُذْ اَنْ :

\bar{x} : موجة المتوسط للعينة حيث

S : مصفوفة التباین والتباين المشترک للعينة اذ

$$S = (n-1)^{-1} \sum (\underline{x}_j - \bar{\underline{x}})(\underline{x}_j - \bar{\underline{x}})'$$

$$= \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \dots & s_{pp} \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots \quad (7)$$

والفرضية التي يتم اختبارها هي أن :

- H_0 : عملية الانتاج في حدود السيطرة .
- H_1 : عملية الانتاج خارج حدود السيطرة .

وتقى مقارنة قيمة احصاء $T_{(j)}^2$ في الصيغة (5) لكل مشاهدة مفردة j مع حد السيطرة بالصيغة (4) وبالتالي ترفض الفرضية H_0 إذا كانت :

$$T_{(j)}^2 > UCL$$

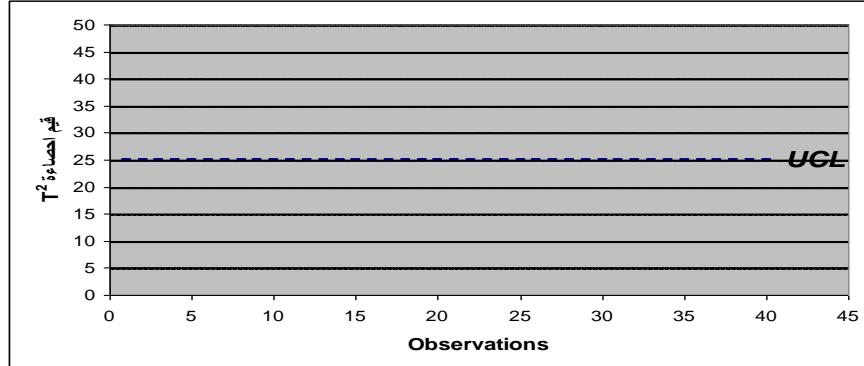
لجميع قيم j إذ ان (n, \dots, n)
وتقيل الفرضية H_0 إذا كانت :

$$T_{(j)}^2 < UCL$$

($j = 1, \dots, n$) اذ ان الجميع قيم j

وهذا يعني أن عملية الاتاج في حدود السيطرة وخلاف ذلك ترفض H_0 وهذا يعني أن العملية الاتاجية خارج حدود السيطرة .

ويمكن رسم هذه اللوحة لمشاهدات العينة بحجم (n) وقيم احصاءة T^2 -Hotelling لجميع المشاهدات وكما مبين أدناه :



3- مقدرات أصغر محدد تباين مشترك معاد الأوزان (RMCD)

عندما يكون موجة المتغير العشوائي X يتبع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات إذ أن

$$\underline{\mathcal{X}}_j \sim N_p(\mu, \Sigma)$$

يكون التقدير التقليدي لمعلم الموضع μ هو موجة الوسط الحسابي \bar{x} وتقدر معلمة القياس \sum

يمصروففة التباین والتباين المشترك

وهذين المقدرين من المعروف عنهما يتصفان بخصائص المقدرات الجيدة فضلاً عن أنهما يتمتعان بخاصية التغایر المتساوي (**Affine Equivariance**) (8). ولكن نقطة الاهيارات (**Breakdown**)

، وهذا يعني أن وجود قيمة شاذة واحدة ضمن البيانات يفقد هذين المقدرين $\left(\frac{1}{n}\right)$ لهم تساوي Point)

خصائصها الجيدة ولذلك برزت الحاجة الى طرائق تقدير حصينة كبديل للطرائق التقليدية تتصف هذه الطرائق الحصينة بكونها قليلة التحسس اتجاه وجود الشواز وتحمّل مقدراتها بنفس خصائص مقدرات الطرائق التقليدية (6) .

وقد اقترح الباحثان Van Zomeren و Rousseeuw (7) مقدرات حصينة لمعلمتي الموقع والقياس للتوزيع الطبيعي متعدد المتغيرات تعرف بمقدرات أصغر محدد تبادل مشترك معاد الأوزان . (RMCD)

وتعتمد هذه المقدرات على ايجاد مقدرات أولية لموجة المتوسط \bar{x}_0 ومصفوفة التباين والتباين المشترك S_0 وذلك من خلال عينة جزئية من المشاهدات بحجم $(ny) = h$ ، إذ أن \sum يعبر عنها بـ

المشترك من بين بقية محددات العينات الجزئية الأخرى والتي عددها مساوٍ إلى توافق n المشتركة من العينة الجزئية تمثل أصغر محدد لمصفوفة النهاية $\gamma \leq 0.5$) و (n) عدد المشاهدات ، وهذه العينة الجزئية تمثل أصغر محدد لمصفوفة النهاية

و هذان المقدار يكوازن كالياتم :

$$S_0 = C_p \left\{ \frac{1}{h} \sum_{j=1}^h (\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_0)(\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_0)' \right\} \dots \dots \dots (9)$$

حیث اُن :

: يمثل عامل الاتساق ويحسب كالتالي : C_p

إذ أن $\chi^2_{p,\alpha}$ تمثل قيمة مربع كاي الجدولية بدرجة حرية p ومستوى معنوية α .
واعتماداً على هذين المقدرين يتم حساب وزن لكل مشاهدة في العينة وعلى النحو الآتي:

$$W_j = \begin{cases} 1 & \text{if } \sqrt{(\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_0)' S_0^{-1} (\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_0)} \leq \chi^2_{p,\alpha} \\ 0 & \text{if } O.W \end{cases} \dots \dots \dots \quad (11)$$

إذ يعطى وزن يساوي 1 للمشاهدة غير الشاذة وصفر للمشاهدة الشاذة ، ويتم حساب مقدرات (RMCD) بالاعتماد على المشاهدات غير الشاذة وحسب الصيغ الآتية :

$$\bar{x}_{RMCD} = \frac{\sum_{j=1}^h W_j x_j}{\sum_{j=1}^h W_j} \dots \dots \dots (12)$$

$$S_{RMCD} = C_p \left\{ \frac{\sum_{j=1}^h W_j (\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_{RMCD})(\underline{x}_j - \bar{\underline{x}}_{RMCD})'}{\sum_{j=1}^h W_j} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

وتتصف هذه المقدرات بخاصية الاتساق (Consistent) للمعلمتين μ و \sum على التعابق وكذلك بخاصية التغير المتساوي أي أن استخدام وحدات قياس مختلفة أو أي تحويلات خطية لا يغير من أداء طريقة التقدير (8). وهذه المقدرات تمتلك نقطة انهايار تصل إلى $(\gamma - 1)$ ويمكن أن تمتلك أعلى نقطة انهايار تصل إلى 50% عندما يكون حجم العينة الجزئية h مساو إلى $[n + p + 1] / 2$ ونقطة الانهايار هي أصغر نسبة مئوية من البيانات الملوثة تجعل التقدير يتحطم الحد المعقول (ينهار) (2).

4- لوحة السيطرة Hotelling-T² الحصينة

لـغرض جـعـل لـوـحة السـيـطـرـة فـي الصـيـغـة (5) لـوـحة سـيـطـرـة حـصـينـة يتم استـبـال مـوجـه مـتوـسط العـيـنة \bar{X} وـمـصـفـوفـة التـبـاـين وـالتـبـاـين المـشـترـك S لـلـمـعـلـمـيـن $\underline{\mu}$ و \sum فـي الصـيـغـة المـذـكـورـة بـمـقـدـرـي RMCD وكـالـاتـي (4) :

وللرغم فحص كل مشاهدة فيما إذا كانت تحت السيطرة أم لا ، تتم مقارنة احصاءة T_{RMCD}^2 الحصينة لكل مشاهدة z مع حد السيطرة بالصيغة (4)، وبالتالي ترفض الفرضية H_0 القائلة أن عملية الاتاج في حدود السيطرة إذا كانت :

$$T_{RMCD}^2(j) > \frac{p(n-1)}{(n-p)\alpha} F_{(p,n-p)\alpha} \quad . \quad (j=1,\dots,n)$$

5- الجانب التطبيقي

١-٥ : وصف البيانات

استندت الدراسة على بيانات تخص الفحص الكهربائي لمضخات الماء تم الحصول عليها من المنشأة العامة للصناعات الكهربائية . وقد كانت الموصفات النوعية المعتمدة في هذا الفحص هي :

X_1 : يمثل مقاومة المحرك بوحدة الاوم .

X_2 : يمثل فولتية المحرك بوحدة الأمبير .

X_3 : يمثل قدرة المحرك بوحدة الواط .

وشملت الدراسة عينة بحجم (40) مضخة وتم تسجيل نتائج الفحص الكهربائي لها وعرضت البيانات كما في الجدول رقم (1).

جدول رقم (1)
نتائج فحص مقاومة وفولتية وقدرة المحرك للمشاهدات

t	X_1	X_2	X_3	t	X_1	X_2	X_3
1	93.2	64	0.30	21	90.0	60	0.38
2	92.2	60	0.35	22	89.0	53	0.44
3	93.6	58	0.36	23	91.0	55	0.39
4	102.0	58	0.32	24	91.0	56	0.36
5	100.0	52	0.38	25	92.0	50	0.34
6	102.0	63	0.45	26	90.4	53	0.35
7	105.0	68	0.38	27	92.1	52	0.40
8	102.0	66	0.39	28	92.0	52	0.41
9	103.0	56	0.36	29	92.5	62	0.44
10	98.0	56	0.35	30	93.1	54	0.37
11	103.0	57	0.39	31	94.0	62	0.39
12	104.7	56	0.37	32	88.3	56	0.36
13	102.0	61	0.30	33	110.1	60	0.41
14	104.0	80	0.32	34	92.3	60	0.40
15	102.0	56	0.33	35	87.8	58	0.38
16	91.2	64	0.37	36	91.2	60	0.39
17	89.6	53	0.40	37	93.0	60	0.36
18	96.0	29	0.42	38	115.8	58	0.36
19	91.0	53	0.44	39	95.4	50	0.34
20	91.0	53	0.43	40	120.0	56	0.36

5-2 : اختبار تحقق شرط التوزيع الطبيعي
 تشرط الطائق الحصينة لتقدير معلمتي الموقع والقياس التحقق من ان شرط التوزيع الطبيعي قد تم اخترافه سواء أكان لكل متغير على حد أم للمتغيرات الثلاثة المدروسة مشتركة .
 وقد أختبرت البيانات في الجدول (1) باستخدام اختبار كولمكروف-سميرنوف بالاعتماد على البرنامج الاحصائي الجاهز (SPSS 17) وأظهرت النتائج أن متغيرات الدراسة مقاومة المحرك (X_1) وفولتية المحرك (X_2) لا تتوزع توزيعاً طبيعياً في حين قدرة المحرك (X_3) تتوزع توزيعاً طبيعياً . والجدول (2) يبين نتائج الاختبار .

جدول رقم (2)
نتائج اختبار البيانات للتوزيع الطبيعي

Variables	Kolmogorov-Smirnov		
	Statistic	d.f	Sig.
X_1	0.213	40	0.000
X_2	0.160	40	0.011
X_3	0.083	40	0.200

5-3 : اختبار وجود أو انعدام القيم الشاذة
 فيما يخص عينة البحث فقد أظهرت نتائج طريقة (Box-and-whisker Plot) باستعمال البرنامج الاحصائي الجاهز (SPSS 17) وجود قيم شاذة لمتغيرين فقط هما X_1 و X_2 في حين المتغير الثالث X_3 لم تظهر فيه قيم شاذة .

4-5 : تطبيق لوحة Hotelling- T^2 التقليدية
 تم حساب قيمة احصاء T^2 لكل مشاهدة حسب الصيغة (5) وكانت النتائج كما في الجدول (3)

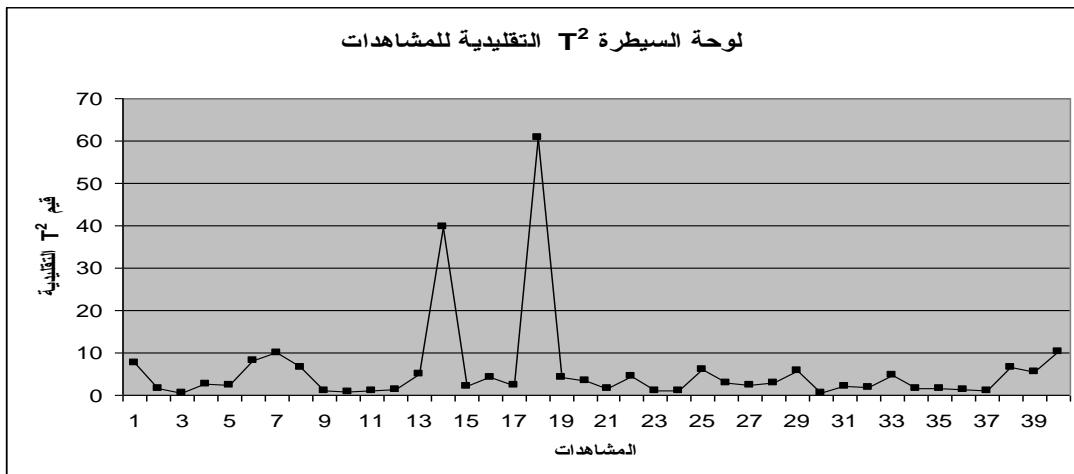
جدول رقم (3)
قيم T^2 للمشاهدات بالطريقة التقليدية

Obs.	T_j^2	Obs.	T_j^2
1	7.6337	21	1.5089
2	1.5089	22	4.505
3	0.4503	23	0.93
4	2.6395	24	0.9948
5	2.2581	25	5.9591
6	8.1463	26	2.8694
7	9.8785	27	2.4928
8	6.6641	28	2.8113
9	1.0462	29	5.6935
10	0.7237	30	0.6513
11	0.9896	31	2.1917
12	1.3619	32	1.7136
13	5.0708	33	4.7438
14	39.806	34	1.4766
15	2.2073	35	1.5081
16	4.2589	36	1.3698
17	2.2474	37	1.0564
18	60.8506	38	6.5957
19	4.1817	39	5.6064
20	3.3311	40	10.196

وتم رسم لوحة السيطرة T^2 التقليدية كما في الشكل (1)

شكل رقم (1)

من خلال الشكل (1) يتبين أن المشاهدات (14) و(18) خارجة عن الحد الأعلى للسيطرة وهذا يعني أن العملية الاتجاهية خارج حدود السيطرة



5-5 تطبيق لوحة Hotelling-T² الحصينة

بالنظر لاختلاف وحدات القياس لمتغيرات الدراسة (X_1) والذي يمثل مقاومة المحرك يقاس بوحدة الأول ، (X_2) والذي يمثل فولتية المحرك يقاس بوحدة الأمبير ، و (X_3) والذي يمثل قدرة المحرك ويقاس بوحدة الواط ، فقد تم تطبيق صيغة T^2 Hotelling – T^2 على بيانات هذه المتغيرات دون إجراء تحويل البيانات الى الصيغة القياسية لأن صيغة T^2 Hotelling – T^2 وفق المعادلة (5) تعتمد على مصفوفة التباين والتبابين المشترك المقدرة (\hat{R}) .

تم حساب قيمة احصاء T_{RMCD}^2 الحصينة لكل مشاهدة حسب الصيغة (14) وكانت النتائج كما في الجدول (4).

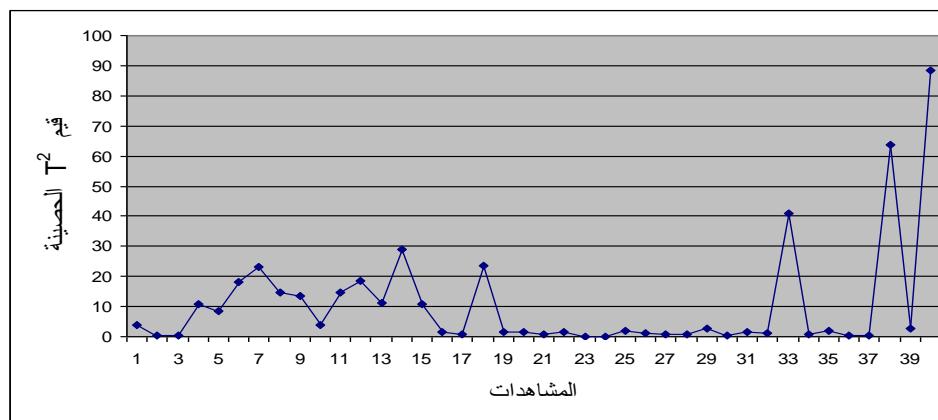
جدول رقم (4)
قيم T_{RMCD}^2 الحصينة للمشاهدات

Obs.	T_{RMCD}^2	Obs	T_{RMCD}^2
1	3.878	21	0.713
2	0.543	22	1.720
3	0.437	23	0.130
4	10.715	24	0.137
5	8.320	25	2.020
6	17.996	26	1.172
7	23.220	27	0.687
8	14.694	28	0.826
9	13.581	29	2.697
10	4.006	30	0.381
11	14.781	31	1.533
12	18.372	32	1.249
13	11.142	33	41.009
14	28.931	34	0.602
15	10.804	35	1.891
16	1.591	36	0.420
17	0.799	37	0.472
18	23.543	38	63.869
19	1.405	39	2.741
20	1.389	40	88.593

وتم رسم لوحة السيطرة T_{RMCD}^2 الحصينة كما في الشكل (2).

شكل رقم (2)

لوحة السيطرة T_{RMCD}^2 الحصينة



يلاحظ من الشكل (2) أن المشاهدات 6 ، 7 ، 11 ، 12 ، 14 ، 18 ، 33 ، 38 ، 39 ، 40 خارجة عن الحد الأعلى للسيطرة وهذا يعني أن العملية الانتاجية خارج حدود السيطرة .

6- الاستنتاجات والتوصيات

1-6 : الاستنتاجات

في ضوء نتائج الجانب التطبيقي تم التوصل الى مايلي :

- 1- أن مقدار أصغر محدد تباين مشترك معد الأوزان (RMCD) أعطى تفوقاً واضحاً للوحة السيطرة T^2 الحصينة في الكشف عن أكبر عدد ممكن من تلك المشاهدات الخارجية عن حدود السيطرة على النوعية .
- 2- كشفت لوحة السيطرة T^2 الحصينة وجود (11) مشاهدة خارجة عن حدود السيطرة في حين لوحة السيطرة T^2 التقليدية كشفت أن هناك مشاهدين فقط هما خارج حدود السيطرة .
- 3- أن لوحة السيطرة T^2 الحصينة تكون أكثر ملائمة من لوحة السيطرة T^2 التقليدية عند وجود قيم شاذة ضمن بيانات متغيرات السيطرة على النوعية مما يعطيها الأهمية في استخدامها كوسيلة للسيطرة على النوعية وجودة المنتوج .
- 4- أعتمد في بيان فعالية لوحة السيطرة الحصينة على طريقة حساب الانحراف في متوجه متوسط العملية الحسابية وذلك لأن البيانات المستخدمة في التحليل هي عبارة عن مشاهدات وليس عينات .

2- التوصيات

نوصي بالتوسيع بتطبيق لوحات السيطرة الحصينة من قبل ادارات الشركات والمؤسسات المسؤولة عن اتخاذ القرارات المناسبة لضمان مستوى مقبول من النوعية وجودة المنتجاتها .

7- المصادر

- 1- الياسين ، دريد حسين بدر (2009) ، "استخدام بعض طرائق التمييز الحصينة لتشخيص أمراض سرطان الدم (اللوكيميا)" ، رسالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .
- 2- رشيد ، ظافر حسين ، خمو ، خلود يوسف ، حميد ، رند سليم (2001) ، "استخدام بعض طرائق التمييز الحصينة في تشخيص اعراض قرحة الاثني عشر" ، بحث منشور ، مجلة العلوم الاقتصادية والادارية ، كلية الادارة والاقتصاد ، جامعة بغداد .
- 3- عليوي ، ميعاد فاضل (1992) ، "استخدام اسلوب متعدد المتغيرات في السيطرة على النوعية في المجال الصناعي" ، رسالة ماجستير في الاحصاء ، كلية الادارة والاقتصاد ، الجامعة المستنصرية .
- 4- Chenouri , S.E , Variyath , A.M and Steiner , S.H (2007) , " *Multivariate Robust Control Chart for individual Observations* " , [http:// Wis-Kuleuven.be/stat/papers/rismca.pdf](http://Wis-Kuleuven.be/stat/papers/rismca.pdf) .
- 5- Cheng , L.M , Away , Y and Hasan , M.K (2008) , " *The algorithm and design for real-Time Hotellings' T² and MEWMA Control Chart in MSPC* " Email : Mclaubee @ yahoo.com , Yumaldi , Khatim @ftsm , ukm.my .
- 6- Haber , P.J , (1981) , " *Robust Statistics* " , John Wiley and Sons .
- 7- Rousseeuw , P.J. and Van Zomeren , B.C. (1990) , " *Unmasking Multivariate Outliers and leverage Point* " , J.A.S.A , 85 . pp633-639 .
- 8- Rousseeuw , P.J. and Katrin , V.D. (1999) " *Afast algorithm for Minimum Covariance Determinant Estimators* " , Techomatratics 41, pp.912-223 .
- 9- Sullivan , J.H. and Woodall , W.H. (1996) , " *A Comparison of Multivariate Control Charts for Individual Observations* " , Journal of quality technology 28,pp. 398-408 .