استخدام البرمجة التربيعية لتكوين خطة إنتاجية لمصنع نسيج الحلة

م.م.علي خليل الزبيدي *

المستخلص

تعتبر البرمجة التربيعية (Q.P.) أحد الأساليب المهمة في عملية اتخاذ القرار وهي إحدى مسائل البرمجة غير الخطية (Non-Linear Programming) حيث دالة الهدف هي عبارة عن دالة غير خطية (تحوي على مربع متغير أو حاصل ضرب متغيرين) وقيود لا مساواة خطية.

يلجا صانع القرار إلى استخدام هكذا نوع من أنواع البرمجة عندما يكون ناتج احد متغيرات القرار يعتمد على المتغيرات الأخرى.

في هذا البحث سوف نناقش مسالة البرمجة التربيعية وكيفية تكوين الأنموذج ومن ثم التوصل إلى حله مع استخدامه لتكوين خطة إنتاجية لمصنع نسيج الحلة.

Abstract

Quadratic programming is important style in decision making problem and it case from Non-linear programming where function of target is Non-linear (some or all variables are square or include banging two variables) and Linear inequality constraints, the decision factor use this kind from programming when value of some variables depend on other variables.

in this research we discuss Quadratic programming problem (construction and solution) and use it in practical application on The Textile Factory Of Hula in Iraq.

* مدرس /وزارة التعليم العالي والبحث العلمي/جهاز الاشراف والتقويم العلمي

مقبول للنشر بتاريخ 2008/11/24

المقدمة

تعتبر البرمجة الرياضية (Mathematical Programming) أحد أهم أساليب بحوث العمليات في عملية أتحاذ القرارات الإدارية والاقتصادية وخاصة فيما يتعلق بالقرارات التي تمثل التخصيص الأمثل للموارد المحدودة في العملية الإنتاجية للحصول على أعلى ربح أو اقل كلفة للعملية الإنتاجية.

تنقسم البرمجة الرياضية بصورة عامة إلى نوعين من البرمجة برمجة خطية(Linear Programming) وبرمجة غير خطية (Nonlinear Programming) ويلجأ عامل القرار إلى أستخدام أي نوع من أنواع البرمجة حسب المشكلة موضوع البحث.

الميدان التطبيقي لهذا البحث هو مصنع نسيج الحلة الذي يتعرض الى خسارة في السنوات الأخيرة والسبب في ذلك يعود إلى قلة إنتاج المصنع مقارنة مع التكاليف العالية للمصنع وخاصة التكاليف الثابتة للمصنع والتي لا تتأثر بزيادة الإنتاج أو قلته لذلك تم اللجوء إلى استخدام أسلوب البرمجة التربيعية (Quadratic Programming) والتي هي احد أنواع البرمجة غير الخطية لتكوين خطة إنتاجية للمصنع وذلك لوجود علاقة عكسية ما بين كلفة الإنتاج وكمية الإنتاج .

1-1: هدف البحث Research Target

يتركز البحث على معرفة الكيفية التي يتكون بها أنموذج البرمجة التربيعية واستخدامه في عمل خطة إنتاجية لمصنع نسيج الحلة لتقليل الخسارة التي يتعرض لها المصنع.

2-1: البرمجة التربيعية(3,4) Quadratic Programming

يطلق مصطلح البرمجة التربيعية Q.P. على المسألة عندما تكون دالة الهدف (تعظيم ، تقليل) تربيعية (أي إن الدالة تحوي على مربع متغير أو حاصل ضرب متغيرين أو الاثنين معا") وقيود لا مساواة خطية .

إن الصيغة العامة لمسألة البرمجة التربيعية هي كالأتي :

$$Max \quad f(x_1,.....,x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jk} x_j x_k$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2...m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2.....n$$

أو ممكن إن تكون بالصيغة الآتية :

$$Min \quad f(x_1,....., x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{jk} x_j x_k$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,2....m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2.....n$$

حيث إن $p_{jk}=p_{kj}$ لكل k,j كما إن دوال الهدف التربيعية ممكن ان تكتب بصيغة المصفوفات كالأتي :

$$f(X) = c^T X + \frac{1}{2} X^T P X$$

حيث ان :

x,c : متجهات عمودية بـ n من العناصر .

p : مصفوفة مربعة شبه موجبة التعريف.

1-3: حل مسألة البرمجة التربيعية [3,4]

Quadratic Programming Problem Solution

هناك عدة طرائق لحل مسألة البرمجة التربيعية(Q.P.) نذكر منها :

1- الحل بواسطة حساب التفاضل Solution by differential calculus

نفرض وجود مسألة برمجة تربيعية (Q.P.) تحتوي على متغيـــرين للقـــرار x_1,x_2 ودالة الهدف (F) تكون دالة تعظيم فأن الحل يكون حسب الخطوات الآتية :

أ. حساب $\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2}$ ومن ثم مساواتها للصفر للحصول على قيم x_1,x_2 وهذا ما يسمى بالشروط الضرورية .

ب. الشروط الكافية لتعظيم دالة الهدف تتمثل بالاتي :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial {X_1}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial {x_2}^2} \end{vmatrix} \succ 0, \frac{\partial^2 F}{\partial {x_1}^2} \prec 0, \frac{\partial^2 F}{\partial {x_2}^2} \prec 0$$

2- شروط كن –تكر The kuhn-tucker conditions

نفرض مسألة برمجة بـــ n من متغيرات القرار و m من قيود اللامساواة

$$Max\ f(x_j)$$

$$s.t$$

$$g_i(x_j) \le 0 \qquad i = 1,2,\ldots m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,2,\ldots . n$$

المسألة ممكن إن تحور بواسطة إدخال متغيرات y_i جديدة وكالاتي :

$${y_i}^2 = -g_i(x_j)$$

لذلك فان المسألة في أعلاه تصبح بالصيغة :

$$Max\ f(x_j)$$

$$s.t$$

$$g_i(x_j) + {y_i}^2 = 0$$

$$x_j \ge 0$$

قيود المسألة أصبحت بصيغة المساواة وبواسطة إدخال m من المضاعفات λ فان دالة الهـدف تصبح بالصيغة :

$$L(x_j, y_i, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x_j) + y_i^2]$$

الشروط الضرورية لدالة الهدف هي :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(x_j)}{\partial x_j} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -[g_i(x_j) + y_i^2] \quad = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -2\lambda_i y_i \qquad\qquad = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

من المعادلة 3- أما $\lambda_i=0$ او $y_i=0$

اذا $y_i=0$ فهذا يعني ان $g_i(x_j)=0$ من المعادلة 2- ولذلك فان $\lambda_i g_i(x_j)=0$ اذا $y_i=0$

وبهذا فان الشروط الضرورية للتعظيم تصبح :

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(x_j)}{\partial x_j} = 0$$

$$g_i(x_j) \le 0$$

$$\lambda_i g_i(x_j) = 0$$

$$\lambda_i \ge 0$$

الشروط الضرورية تصبح كذلك شروطاً كافية للتعظيم إذا دالة الهدف مقعرة .

3. طريقة Dantzing

الحل في هذه الطريقة يتم بالاعتماد على طريقة السمبلكس .

نفترض مسألة البرمجة التربيعية الآتية:

$$Z = a^T X - \frac{1}{2} X^T B X$$

$$S.T$$

$$C^T X \le d$$

$$x \ge 0$$

صياغة جدول السمبلكس الأولي يكون كالأتي:

B.V.	B.V. value	X	Y	V	W
V	-a	-B	0	I	-C
Y	d	C^T	I	0	0

حيث:

v,y متغيرات أساسية

X,w متغيرات غير أساسية

ولتوضيح ما ورد في أعلاه نفترض المسألة الآتية :

$$Max\, Z = 5x_1 + 10x_2 + 4x_1x_2 - 2x_1^2 - 2x_2^2$$

$$s.t$$

$$x_1 + 2x_2 \le 6$$

$$x_j \ge 0$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

بإضافة متغيير الموازنة غير السالب y_3 وبأفتراض :

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2$$

فأن جدول السمبلكس يكون كالأتي:

B.V.	B.V. value	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3
v_1	-5	-4	4	0	1	0	-1
v_2	-10	4	-4	0	0	1	-2
y_3	6	1	2	1	0	0	0

الجدول في أعلاه جدول قياسي لعدم وجود زوج من المتغيرات (y_i,v_i) كلاهما أساسي أو غير أساسي.

y_2 هو المتغير الداخل لأن v_2 هو المتغير الذي يقابل القيمة الأكثر سالبية في عمودB.V. value ومن خلال قسمة عمودB.V. value على عمودy_2 فأن v_2 هو المتغير الخارج لانه يقابل اقل نسبة موجبة ناتجة من القسمة.

B.V.	B.V. value	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3
v_1	-15	0	0	0	1	1	-3
y_2	10/4	-1	1	0	0	-1/4	2/4
y_3	3	3	0	1	0	1/2	-1
v_1	-15	0	0	0	1	1	-3
y_2	17/6	0	1	1/3	0	-1/12	1/6
y_1	1/3	1	0	1/3	0	1/6	-1/3

الجدول في اعلاه غير قياسي لوجود, v_1 ، y_1 كمتغيرات اساسية لذلك يتم ادخال v_3 كمتغير اساسي:

B.V.	B.V. value	y_1	y_2	y_3	v_1	v_2	v_3
v_3	5	0	0	0	-1/3	-1/3	1
y_2	2	0	1	1/3	1/18	-1/36	0
y_1	2	1	0	1/3	-1/9	1/18	0

الحل الأمثل هو:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 2, \quad Z = 30$$

إضافة إلى ما تقدم فأن هناك العديد من الطرائق الأخرى لحل مسألة البرمجة التربيعية (Q.P.) .

4-1: مصنع نسيج الحلة [1] The Textile Factory Of Hula

تأسس مصنع نسيج الحلة عام 1967 باسم الشركة العامة للنسيج الناعم في الحلة برأس مال أسمي قدره 15 مليون دينار وبطاقة إنتاجية تبلغ 30 مليون متر سنويا" بالاعتماد على الألياف والغزول الصناعية المستوردة وهو يتخصص بإنتاج الأقمشة الحريرية .

في عام 1980 تقرر إنشاء معمل القديفة والجاكارد وهو يتخصص بإنتاج أقمشة الكوبلان والقديفة المستخدمة للستائر والدوشمة وهو المعمل الوحيد في العراق .

5.1: الجانب التطبيقي[1] Application Side

الجانب التطبيقي يمثل بناء أنموذج برمجة تربيعية للتخلص من الخسارة التي يتعرض لها المصنع للفترة من 2004-2006 أذا بلغ أجمالي خسارة المصنع للأعوام الثلاثة 749499000 دينار علما" إن هنالك أربعة أنواع للكلفة وهي:

- الكلف التحويلية وتشمل أجور العاملين والتكاليف الصناعية غير المباشرة بالإضافة إلى الصيانة والاندثار.
- كلف المواد الأولية المستعملة في الإنتاج
- الكلف التسويقية وتشمل كافة ما يتحمله المصنع من تكاليف نتيجة لقيامه بعملية البيع والتوزيع والإعلان والترويج للمنتجات بالإضافة إلى خدمات الزبون وخدمات ما بعد البيع
- كلف البحث والتطوير وتشمل كلف بحث وتطوير منتجات الشركة بالإضافة إلى ما تتحمله الشركة من رواتب وأجور للمهندسين والمدربين والعاملين في مجال البحث والتطوير.

إن الطاقة الإنتاجية للمصنع هي 21 مليون متر سنويا" ، نفترض إن مبيعات المصنع للفترة من 2004 إلى 2006 تمثل أنتاج المصنع خلال الفترة على اعتبار إن مخزون الإنتاج إن وجد لعام 2004 يمثل إنتاج لعام2005 وهكذا .

6.1 : بناء الأنموذج construct of model

إن الخسارة التي تعرض لها المصنع خلال فترة البحث هي نتيجة لقلة الإنتاج مقارنة مع التكاليف وبالذات التكاليف التحويلية التي تمثل أعلى التكاليف مقارنة مع التكاليف الأخرى وكذلك كلف البحث والتطوير من حيث إن مبلغ هاتين الكلفتين ثابت للسنة الواحدة أي إن قلة الإنتاج سوف يؤدي إلى زيادة في كلفة إنتاج المتر الواحد بيما زيادة الإنتاج سوف يؤدي إلى تقليل كلفة إنتاج المتر الواحد لذلك سوف نلجأ إلى بناء أنموذج برمجة تربيعية لمعرفة كمية الإنتاج المثلى وبالتالي معرفة كمية المواد الأولية المطلوبة للإنتاج وكذلك عدد المعارض التسويقية.

مما ورد في أعلاه نستنتج إن هنالك علاقة خطية عكسية بين كمية الإنتاج وكلفة الإنتاج من حيث إن كلفة الإنتاج تعتمد على كمية الإنتاج ويمكن تمثيل هذه العلاقة بالشكل الأتي:

$$c_i = a - b\chi_i$$

حيث أن : c : كلفة إنتاج المتر الواحد.

χ : كمية الإنتاج السنوي.

a,b : ثوابت.

1- المتغيرات Variables

χ_i : كمية الإنتاج السنوي i=1,2,3 .

p_i : سعر بيع المتر الواحد i=1,2,3 .

2- دالة الهدف Function of Target

تمثل تدنية عائد المصنع والسبب في ذلك يعود إلى إن المصنع يتعرض إلى خسارة وهدف البحث هو التخلص من هذه الخسارة بإيجاد كمية الإنتاج المثلى وكذلك سعر البيع وكلفة إنتاج المتر الواحد لكل سنة من السنوات الثلاثة قيد البحث:

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{3} \chi_i (p_i - c_i)$$

وبما أن :

c_1 = 434 دينار في حال أنتاج 21 مليون متر.

c_1 = 522 دينار في حال أنتاج 15323000 متر[1] وهو أنتاج المصنع لعام 2004.

c_2 = 453.2 دينار في حال أنتاج 21 مليون متر.

c_2 = 528 دينار في حال أنتاج 16350000 متر[1] وهو أنتاج المصنع لعام 2005.

c_3 = 449.1 دينار في حال أنتاج 21 مليون متر.

c_3 = 520 دينار في حال أنتاج 16542000 متر[1] وهو أنتاج المصنع لعام 2006.

فـــــــأن:

$c_1 = 766 - 0.00001585\ \chi_1$

$c_2 = 790 - 0.000016038\ \chi_2$

$c_3 = 780 - 0.00001575\ \chi_3$

القيم في أعلاه من استخراج الباحث بالاعتماد على دراسة المشكلة موضوع البحث لخلق التـــوازن مابين كمية الإنتاج وكلفة الإنتاج وهذه القيم مهمة جدا" لان الاعتماد على قيم بعيـــدة عـــن واقـــع المشكلة يؤدي إلى الوصول إلى نتائج غير منطقية.

وعلى هذا الأساس فان دالة الهدف تصبح كالأتي:

$$Min \quad Z = 0.00001585\chi_1^2 + 0.000016038\chi_2^2 + 0.00001575\chi_3^2 + \chi_1 p_1 + \chi_2 p_2 + \chi_3 p_3 - 766\chi_1 - 790\chi_2 - 780\chi_3$$

3- القيود Constraints

قيد المواد الأولية :

$$0.581242\chi_1 + 0.5456\chi_2 + 0.53787\chi_3 \geq 26724695$$

حيث 26724695 هي كمية المواد الأولية التي استخدمت في الإنتاج للسنوات الثلاثة.

قيد الطاقة التسويقية:

$$0.000003\chi_1 + 0.000003302\chi_2 + 0.000003445\chi_3 \geq 159$$

بلغ مجموع المعارض التسويقية 159 معرض للسنوات الثلاثة وقيمة (a_{ij}) في أعلاه تمثل ما يحتاجه المتر الواحد من معارض تسويقية .

قيود لتجنب الخسارة التي يتعرض لها المصنع: وهي تتمثل بقيود يكون فيها حاصل طرح سعر البيع من كلفة الإنتاج أكبر أو يساوي الصفر على أن لا يتجاوز سعر البيع السعر الذي اعتمده المصنع للبيع وكالاتي:

$$0.00001585\chi_1 + p_1 \geq 766$$
$$0.000016038\chi_2 + p_2 \geq 790$$
$$0.00001575\chi_3 + p_3 \geq 780$$

$$p_1 \leq 497$$
$$p_2 \leq 512$$
$$p_3 \leq 514$$

قيد الطاقة الإنتاجية: وهي تتمثل بقيود تمثل عدم تجاوز الإنتاج للطاقة الإنتاجية العظمى للمصنع وهي 21 مليون متر سنويا" وقد افترضنا إن المصنع لا يستطيع إنتاج أكثر من 20 مليون متر سنويا تحسبا" للظروف التي تحيط بالعملية الإنتاجية:

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3 \leq 20000000$$

6.1 : حل الأنموذج solution of model

باستخدام طريقة Dantzing وبالاستعانة بالبرنامج الإحصائي Win QSB تم التوصل إلى حل الأنموذج وكالاتي:

$$\chi_1 = 16971608$$
$$\chi_2 = 17333832$$
$$\chi_5 = 16888888$$

$$p_1 = 497$$
$$p_2 = 512$$
$$p_3 = 514$$

$$Z = -1936$$

من الحل في أعلاه نلاحظ إن قيمة الخسارة للمصنع هي 1936 دينار فقط للسنوات الثلاثة وذلك من خلال زيادة كمية الإنتاج والبقاء على ثبات سعر البيع الذي يبيع به المصنع وللحصول على هذه الخطة الإنتاجية فان المصنع بحاجة إلى 28405976 من المواد الأولية بالإضافة إلى 166 معرض تسويقي.

إما في حال رغبنا في عمل خطة إنتاجية لزيادة ربح المصنع فيتم ذلك عن طريق التحكم بقيود تجنب الخسارة من خلال تغير قيمة الجانب الأيمن للقيد(صفر) بالقيمة التي يرغب عامل القرار في إن يحصل عليها كربح من إنتاج المتر الواحد ولو افترضنا إن المصنع يرغب في إن يربح دينار واحد عن كل متر مع ثبات سعر البيع فان ذلك يؤدي إلى زيادة الإنتاج وبالتالي تقليل كلفة إنتاج المتر الواحد دينار واحد وأدناه حل الأنموذج باستبدال (صفر) بـ(1):

$$\chi_1 = 17034700$$
$$\chi_2 = 17396184$$
$$\chi_5 = 16952382$$

$$p_1 = 497$$
$$p_2 = 512$$
$$p_3 = 514$$
$$Z = 51384444$$

الخطة الإنتاجية في أعلاه توضح إن المصنع بحاجة إلى 28510820 من المواد الأولية بالإضافة إلى 167 معرض تسويقي للحصول على ربح أجمالي مقداره 51384444 دينار للسنوات الثلاث.

7.1: الاستنتاجات Concluding

1. تم استخدام البرمجة التربيعية لتخطيط الإنتاج لمصنع نسيج الحلة لوجود علاقة خطية عكسية مابين كمية الإنتاج وكلفة الإنتاج.
2. بين الجانب التطبيقي إنه بالإمكان التخلص من الخسارة التي يتعرض لها المصنع من خلال زيادة كمية الإنتاج لان الكلفة الأعلى ضمن تكلفة الإنتاج هي تكلفة سنوية ثابتة ولا تتأثر بكمية الإنتاج بحيث كلما زاد الإنتاج ارتفعت مبيعات المصنع مقارنة مع تكلفة الإنتاج بشرط توافر المواد الأولية المطلوبة وكذلك المعارض التسويقية وبالإمكان الاعتماد على نموذج البرمجة التربيعية لمعرفة كمية المواد الأولية وعدد المعارض التسويقية وسعر البيع لأي خطة إنتاجية مستقبلية.
3. بصورة عامة يجب استغلال اكبر قدر من الطاقة الإنتاجية للمصانع للتغلب على الكلفة السنوية الثابتة وبالتالي الحصول على الأرباح وخاصة مع توفر أسواق تصريف المنتوج في بلدنا الذي يعتمد بصورة كبيرة على الاستيراد لضعف وقلة المنتوج الوطني.

المصادر

1. العبيدي ، علي قاسم حسن ،2007، التحليل الاستراتيجي للدخل التشغيلي دراسة تطبيقية في الشركة العامة للصناعات النسيجية ، رسالة ماجستير ،كلية الإدارة والاقتصاد (جامعة بغداد).
2. Graves , Stephen -2003- Non Linear Programming.
3. Kwak , A.K – 1973 – .Mathematical Programming with business applications – MC Graw – Hill , Inc.
4. Liebrman & Hillier – 1990 – Introduction the operational Research – Holden – Day , Inc.

……..

……..

……