استخدام بعض من الطرق اللامعلمية في تقدير دالة المعولية (دراسة مقارنة)

د.عبد الرحيم خلف راهي* زكريا يحيى الجمال*

المستلخص

في هذا البحث تم استخدام طريقتين من الطرق اللامعلمية وهما : طريقة كابلن – مييـر (Kaplan – Meier) والطريقة القياسية (Standard Method) لتقدير دالة المعولية والمقارنة بينهما لايجاد أمثل دالة معولية،حيث تم استخدام اختبار كولمكروف – سيمرنوف – (Kolmogorov Smirnov) لتحديد أي الطريقتين كانت أمثل. فضلا عن إيجاد حدود الثقة لهاتين الطريقتين.

تبين من خلال المقارنة الاحصائية أنه لايوجد فرق معنوي كبير بين طريقة كابلن – مييـر والطريقة القياسية.كذلك لا يمكن حساب التباين وحدود الثقة عندما يكون $r_j = 0$.

1. المقدمة

بدأ الاهتمام بموضوع المعولية (Reliability) منذ أكثر من نصف قرن وتحديدا بعد الحرب العالمية الثانية نتيجة للتطور التكنولوجي الذي حدث بعد ذلك الوقت.حيث جرت دراسات تهتم بهذا الموضوع للأجهزة الحربية والمعدات المعقدة كالأجهزة الإلكترونية. وقد توالت الدراسات والنظريات ليصبح موضوع المعولية موضوعا مستقلا له أسسه ونظرياته وتطبيقاته في الحياة العملية. حيث أن معرفة حالات فشل المعدات والمكائن من شانه أن يقلل كلف إنتاجها وصيانتها والتي تؤثر بدورها على خطة الإنتاج، فضلا عن فائدة تقدير المعولية يكمن في إمكانية التنبؤ

* استاذ مساعد/كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء/جامعة السليمانية

* مدرس مساعد/كلية الادارة والاقتصاد/قسم الاحصاء/جامعة السليمانية

بالعدد الكلي للمكائن العاملة والعاطلة في أي وقت وما يحتاج له من مستلزمات بهذه الحالة وتحديد عدد الفنيين لتشغيلها.

فمفهوم المعولية هو إمكانية الجهاز أو الماكنة على إنجاز العمليات من غير فشل (عطل). أما من الناحية الإحصائية فان المعولية هي عبارة عن احتمال أن الجهاز أو الماكنة تعمل لإنجاز عمل معين لفترة من الزمن حتى حصول العطل في هذه الماكنة.

وقد ازداد الاهتمام أخيرا بالطرائق اللامعلمية لأهميتها في تقدير دالة المعولية ودالة المخاطرة خاصة عندما لا تصلح المقاييس المعلمية لتقدير تلك الدوال لعدم توفر الشروط اللازمة لاستخدامها.

في هذا البحث استخدمت طريقتين من الطرق اللامعلمية وهما : طريقة كابلن – مييـر (Kaplan – Meier) والطريقة القياسية (Standard Method) لتقدير دالة المعولية والمقارنة بينهما لإيجاد دالة معولية مثلى حيث تم استخدام اختبار كولمكروف – سيمرنوف (Kolmogorov – Smirnov) لتحديد أي الطريقتين كانت أمثل، فضلا عن إيجاد حدود الثقة لهاتين الطريقتين.

في هذا البحث تم التطرق إلى بعض المفاهيم الأساسية منها دالة المعولية ، دالة الفشل ودالة المخاطرة. وفي المبحث الرابع تم التطرق إلى توزيع ويبل لما له من استخدامات كثيرة في تقدير دالة المعولية. أما المبحث الخامس والسادس فقد تم عرض طريقة كابلن – مييـر والطريقة القياسية. أما حدود الثقة التي احتسبت فقد عرضت من خلال المبحث السابع.

كما عرضت حالة تطبيقية استخدامت فيها الطريقتين لغرض تقدير دالة المعولية وعلى أساسه تمت المقارنة.

2- مفاهيم عامة (General Concept)

(2-1) دالة المعولية (Reliability Function)

تعرف دالة المعولية بأنها احتمال عدم فشل الماكنة حتى الوقت t حيث ($t > 0$). والمعنى الواسع للمعولية هي إنها مقياس للأداء. وهنا تقتضي الناحية العلمية بالإشارة إلى أن دالة المعولية لها نفس المفهوم الرياضي لدالة البقاء

(Survival Function)، حيث يستخدم هذا المصطلح في دراسات البقاء على قيد الحياة في مجتمع الكائنات الحية (1).

نفرض أن T عبارة عن متغير عشوائي غير سالب يمثل وقت الفشل (Failure Time) وله دالة كثافة احتمالية f(t) وكذلك دالة احتمالية تجميعية F(t) فإن :

$$R(t) = p(T > t) \quad , \quad 0 < t < \infty \qquad \text{.....(1)}$$

حيث أن : $R(t)$ تمثل دالة المعولية.

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (1) بالشكل التالي :

$$\begin{aligned} R(t) &= 1 - p(T \le t) \\ &= 1 - F(t) \end{aligned} \qquad \text{.....(2)}$$

(2-2) دالة الفشل (Failure Function)

يمكن تعريف دالة الفشل بانها احتمال فشل الماكنة خلال الفترة $\{t < T < t + \Delta t\}$ ، أي هي احتمال عدم نجاح الماكنة خلال الفترة نفسها ويرمز له بالرمز $f(t)$. وصيغة دالة الفشل تعطى بالشكل التالي:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_r(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \qquad \text{.....(3)}$$

انظر (2) .

(2-3) دالة المخاطرة (Hazard Function)

توضح دالة المخاطرة بأنها المعدل الفوري (Instantaneous Rate) لحدوث الفشل عندما T=t . أما التعريف الرياضي لدالة المخاطرة أو ما تسمى أحيانا بنسبة الفشل (Failure Rate) هو:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_r\left(t < T < t + \Delta t \middle| T > t\right)}{\Delta t}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} \qquad \text{.....(4)}$$

حيث أن $h(t)$ تمثل دالة المخاطرة.

3 – تقدير دالة المعولية
(Estimation of Reliability Function)

عند تقدير دالة المعولية سوف نلاحظ ان التقدير يتم عن طريق استخدام الطرق المعلمية مثل طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) أو طريقة التقدير غير المتحيز المنتظم ذو اقل تباين (uniformly minimum variance unbiased Estimation) وكذلك اقترح الباحث الخزرجي (1) التقدير باستخدام طريقة بيز (Bayes Method) .

وبما أن تقدير المعولية بالطرق المعلمية يتطلب معرف التوزيع الاحتمالي لنماذج الفشل (Failure Models) ، فان اغلب التوزيعات الشائعة الاستخدام في نماذج الفشل هو التوزيع الأسي (Exponential Distribution) وكذلك توزيع ويبل (Weibull Distribution) .

أما الجانب الآخر لتقدير دالة المعولية فهو استخدام الطرق اللامعلمية (Nonparametric Methods) وهو ما سوف نتناوله في بحثنا هذا. كما نعلم فان مفهوم اللامعلمية هو عدم وجود توزيع معروف (معلوم) للمتغير العشوائي.

إن أكثر الطرق استخداما في تقدير دالة المعولية بالطرق اللامعلمية هي طريقة كابلن- مبير(Kaplan-Meier). هنا استخدمنا هذه الطريقة مقارنة مع طريقة أخرى لامعلمية هي الطريقة القياسية (Standard Acturial Method) ولمزيد من الاطلاع على طرق تقدير دالة المعولية فهناك العديد من المصادر التي تبين الطرق المعلمية منها (Cohen,1965) ، (Li, T.E,1984) ، (Pugh,1963) .

4- توزيع ويبل (Weibull Distribution)

ينسب هذا التوزيع إلى العالم الفيزيائي السويدي Waloddi Weibull الذي اشتق هـذا التوزيع واستخدمه عام (1939) من خلال دراسة خصائص العدد المنتجة صناعيا، ويعتبر توزيـع ويبل أحد التوزيعات المهمة في اختبارات أمد الحياة ودراسة المعولية كونه أحد توزيعـات الفشـل الشائعة الاستخدام.

يمكن تعريف توزيع ويبل ذو المعلمتين رياضيا بالشكل التالي:

$$f(t,\theta,\beta)=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1}\exp(-\frac{t^{\beta}}{\theta})\ ,\ t>0,\ \theta,\beta>0 \quad \text{.....(5)}$$

حيث أن:

β : تمثل معلمة الشكل Shape Parameter .

θ : تمثل معلمة القياس Scale Parameter .

أما الدالة التوزيعية التجميعية F(t) فتكون:

$$F(t)=1-\exp(-\frac{t^{\beta}}{\theta}) \quad \text{.....(6)}$$

من خلال المعادلة (6) يمكن حساب دالة المعولية وعلى النحو التالي:

$$R(t)=1-F(t)$$

$$R(t)=\exp(-\frac{t^{\beta}}{\theta}) \quad \text{.....(7)}$$

أما دالة المخاطرة $h(t)$ فتكون :

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}$$

$$=\frac{\beta}{\theta}t^{\beta-1} \quad \text{.....(8)}$$

بناءا على ما تم تناوله سابقا فان هناك عدة من الطرق لتقدير دالة المعولية لتوزيع ويبل ومن هذه الطرق : طريقة الإمكان الأعظم وطريقة التقدير غير المتحيز المنتظم ذو اقل تباين. فان مقدر الإمكان الأعظم لدالة المعولية لتوزيع ويبل عندما تكون معلمة الشكل β معلومة هو:

$$\hat{R}(t) = \exp(-\frac{t^{\beta}}{\hat{\theta}}) \ , \ t \geq 0 \quad \text{.....(9)}$$

أما المقدر غير المتحيز المنتظم ذو أقل تباين لدالة المعولية لتوزيع ويبل أيضا عندما تكون معلمة الشكل معلومة هو:

$$\hat{R}(t) = \begin{cases} (1 - \dfrac{t^{\beta}}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta}})^{n-1} & t^{\beta} < \sum_{i=1}^{n} t_i^{\beta} \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \text{.....(10)}$$

5 – طريقة كابلن – ميير (Kaplan – Meier)

في عام (1958) اقترح الباحثان Kaplan & Meier طريقة لامعلمية لغرض تقدير دالة المعولية، فقد درس هذان الباحثان خصائص التقدير منها ان هذا التقدير هو متسق (Consistent) وكذلك غير متحيز (Unbiased) إلى $R(t)$. (2).

أن دالة تقدير المعولية باستخدام طريقة كابلن – ميير تعطى بالشكل الاتي:

$$\hat{R}(t_i) = \prod_{j=1}^{i} \left(\frac{n_j - r_j}{n_j} \right) \ , \ i = 1,2,.....,m \quad \text{.....(11)}$$

حيث أن:

m : هو العدد الكلي للفترات.

n_j : هو عدد المرات المتبقية من حالات الفشل في الفترة $(j-1)$.

r_j : عدد مرات الفشل للزمن j .

$$n_j = n - \sum_{j=0}^{i-1} S_j - \sum_{j=0}^{i-1} r_j \qquad , i = 1,2,..... m \quad .....(12)$$

حيث أن :

n : العدد الكلي للوحدات تحت التحليل.

S_j : تمثل عدد العطلات المؤقتة للزمن j .

في طريقة كابلن – مبير نلاحظ بان تقدير المعولية يحسب فقط للأوقات التي يظهر فيها فشل واحد أو اكثر. في حين أن عدد العطلات المؤقتة فإنها تستبعد عن عملية التشغيل وتضاف الى المجموع n_j . يعتبر مقدر كابلن – مبير ذات شكل طبيعي مقارب بوسط حسابي مقداره $R(t)$ ، أما التباين فهناك العديد من الطرق التي تقدر قيمة هذا التباين ومن أكثر الصيغ استخداما هي صيغة Greenwood (5) .

$$Var\left[\hat{R}(t)\right] = \left[\hat{R}(t)\right]^2 \sum_{j=1}^{t(j)\le t} \frac{r_j}{n_j(n_j - r_j)} \quad .....(13)$$

وهناك طريقة أخرى وهي التي قدمها الباحث (Peto, 1977) وهي:

$$Var\left[\hat{R}(t)\right] = \left[\hat{R}(t)\right]^2 \left[\frac{1 - \hat{R}(t)}{n_k}\right] \quad .....(14)$$

6 – الطريقة القياسية (Standard Acurial Method)

تختلف هذه الطريقة في تقدير دالة المعولية عن طريقة كابلن – مبير، حيث تستلزم هذه الطريقة تصحيح قسمة عدد الوحدات التشغيلية في الفترة الزمنية. في حين تفترض طريقة كابلن – مبير أن الوحدات العاطلة S_j في وحدة الزمن لا تدخل ضمن العمل ويتم حسابها ضمن n_j . في

حين الطريقة القياسية تفترض أن العطل S_j يظهر في وسط الفترة وله تأثير في تقليل العدد المتوفر من الوحدات في الفترة بمقدار نصف العطل في تلك الفترة أي:

$$n'_j = n_j - \frac{S_j}{2} \qquad \text{.....(15)}$$

وبتعويض المعادلة (15) في المعادلة (11) نحصل على :

$$\hat{R}(t_i) = \prod_{j=1}^{i}\left(1 - \frac{r_j}{n'_j}\right) \quad , i = 1,2,..... m \qquad \text{.....(16)}$$

المعادلة (16) تمثل تقدير دالة المعولية باستخدام الطريقة القياسية.

7 – حدود الثقة (Confidence Bounds)

يمكن حساب حدود الثقة للمعولية باستخدام الطرق اللامعلمية وهذه الحسابات تكون متشابهة إلى تلك المستخدمة في الطرق المعلمية. لكن المشكلة في الطرق اللامعلمية هو تقدير التباين وكما ذكرنا في المبحث الخامس فان اغلب ما يستخدم في تقدير التباين هو صيغة Greenwood الموضحة في المعادلة (13) أما الخطأ القياسي (Standard Error) فيكون :

$$Se_{\hat{R}} = \sqrt{Var\left(\hat{R}(t)\right)}$$

وبناءا على ذلك فان الحد الأعلى $UCB_{\hat{R}}$ والحد الأدنى $LCB_{\hat{R}}$ يكون على التوالي بالشكل التالي:

$$\left[LCB_{\hat{R}}, UCB_{\hat{R}}\right] = \left[\frac{\hat{R}(t_i)}{\hat{R}(t_i) + (1 - \hat{R}(t_i))\ .W} \quad , \quad \frac{\hat{R}(t_i)}{\hat{R}(t_i) + \frac{(1 - \hat{R}(t_i))}{W}}\right]$$

حيث أن :

$$W = \exp\left[z_{\alpha} \ , \ \frac{Se_{\hat{R}}}{\hat{R}(t_i)(1-\hat{R}(t_i))} \right]$$

وتجدر الملاحظة هنا بان مستوى المعنوية α يعبر عن الاحتمال من طرف واحد فقط.

8. حالة تطبيقية

في أثناء دراسة مبسطة في معمل أسمنت سرجنار في محافظة السليمانية تم وضع 55 وحدة خاصة بمكائن التكسير في حالة اختبار لكل 50 ساعة. الجدول (1) يوضح النتائج التي تم الحصول عليها :

الجدول (1)

يوضح النتائج الخاصة بالحالة التطبيقية

Start Time	End Time	No. of Failures (r_j)	No. of Suspensions (s_j)
0	50	2	4
50	100	0	5
100	150	2	2
150	200	3	5
200	250	2	1
250	300	1	2
300	350	2	1
350	400	3	3
400	450	3	4
450	500	1	2
500	550	2	1
550	600	1	0
600	650	2	1

8-1 تقدير دالة المعولية باستخدام طريقة كابلن – مير

لغرض استخدام طريقة كابلن– مير لتقدير دالة المعولية سوف نستخدم المعادلة (11)المبينة في المبحث الخامس . أما n_j فيتم حسابها بالرجوع الى المعادلة (12) من المبحث الخامس.

الجـــدول (2) يوضـــح النتـــائج النهائيـــة فـــي تقـــدير دالـــة المعوليـــة باســـتخدام طريقـــة كابلن – مبير .

جدول (2)

يوضح تقدير دالة المعولية باستخدام طريقة كابلن – مبير

End Time	r_j	s_j	n_j	$\frac{n_j - r_j}{n_j}$	$\hat{R}(t_i) = \prod_{j=1}^{i}\left(\frac{n_j - r_j}{n_j}\right)$
50	2	4	55	0.964	0.964
100	0	5	49	1	0.964
150	2	2	44	0.955	0.920
200	3	5	40	0.925	0.851
250	2	1	32	0.938	0.798
300	1	2	29	0.966	0.770
350	2	1	26	0.923	0.711
400	3	3	23	0.870	0.618
450	3	4	17	0.824	0.509
500	1	2	10	0.9	0.458
550	2	1	7	0.714	0.327
600	1	0	4	0.750	0.245
650	2	1	3	0.333	0.082

2-8 تقدير دالة المعولية باستخدام الطريقة القياسية

في حالة استخدام الطريقة القياسية لتقدير دالة المعولية سوف نستخدم المعادلة (16) المبينة في المبحث السادس . أما n'_j فيتم حسابها بالرجوع الى المعادلة (15) من المبحث الخامس. الجدول (3) يوضح النتائج النهائية في تقدير دالة المعولية باستخدام الطريقة القياسية .

جدول (3)

يوضح تقدير دالة المعولية باستخدام الطريقة القياسية

End Time	r_j	s_j	n'_j	$1-\frac{r_j}{n_j}$	$\hat{R}(t_i)=\prod_{j=1}^{i}\left(1-\frac{r_j}{n_j}\right)$
50	2	4	53	0.962	0.962
100	0	5	46.5	1	0.962
150	2	2	43	0.953	0.918
200	3	5	37.5	0.920	0.844
250	2	1	31.5	0.937	0.791
300	1	2	28	0.964	0.762
350	2	1	25.5	0.922	0.702
400	3	3	21.5	0.860	0.604
450	3	4	15	0.800	0.484
500	1	2	9	0.889	0.430
550	2	1	6.5	0.692	0.298
600	1	0	4	0.750	0.223
650	2	1	2.5	0.2	0.045

الجدول (4)

يوضح تقدير دالة المعولية باستخدام طريقة كابلن – مبير وكذلك تقدير دالة المعولية باستخدام الطريقة القياسية.

End Time	$\hat{R}_{ti}(KM)$	$\hat{R}_{ti}(S\tan dard)$
50	96.4 %	96.2 %
150	92 %	91.8 %
200	85.1 %	84.4 %
250	79.8 %	79.1 %
300	77 %	76.2 %
350	71.1 %	70.2 %
400	61.8 %	60.4 %
450	50.9 %	48.4 %
500	45.8 %	43 %
550	32.7 %	29.8 %
600	24.5 %	22.3 %
650	8.2 %	4.5 %

8-3 حدود الثقة لدالة المعولية المقدرة

لقد تناولنا في المبحث السابع كيفية حساب حدود الثقة (Confidence Bound) لدالة المعولية . الجدول (5) والجدول (6) يوضحان حدود الثقة لدالة المعولية المقدرة بطريقة كابلن – مييير والطريقة القياسية وعلى التوالي.

جدول (5) يوضح حدود الثقة لدالة المعولية المقدرة بطريقة كابلن – مييير

Failure Time	$\hat{R}_{ti}(KM)$	$Var\hat{(}R_{ti})$	$LC(\hat{R}_{ti})$	$UC(\hat{R}_{ti})$
50	0.964	0.000684	0.89022	0.9888
100	0.964	0	0	0
150	0.920	0.001484	0.8294	0.9645
200	0.851	0.00273	0.7435	0.918
250	0.798	0.00373	0.6793	0.8805
300	0.770	0.0042	0.6471	0.8593
350	0.711	0.0052	0.5799	0.8142
400	0.618	0.006417	0.4807	0.7378
450	0.509	0.007614	0.3686	0.64774
500	0.458	0.008493	0.31453	0.6087
550	0.327	0.010426	0.1846	0.4722
600	0.245	0.010854	0.11385	0.4504
650	0.082	0.0057	0.0168	0.3175

جدول (6) يوضح حدود الثقة لدالة المعولية المقدرة بالطريقة القياسية

Failure Time	$\hat{R}_{ti}(S\tan dard)$	$Var\hat{(}R_{ti})$	$LC(\hat{R}_{ti})$	$UC(\hat{R}_{ti})$
50	0.962	0.0007	0.8862	0.9879
100	0.962	0	0	0
150	0.918	0.0016	0.8246	0.963
200	0.844	0.003	0.73202	0.9147
250	0.791	0.004	0.6691	0.8762
300	0.762	0.0045	0.636	0.8544
350	0.702	0.0054	0.5693	0.8079
400	0.604	0.0068	0.46411	0.7287
450	0.484	0.0082	0.3404	0.63103
500	0.430	0.0091	0.2847	0.5885
550	0.298	0.0104	0.1599	0.4863
600	0.223	0.01	0.1	0.4258
650	0.045	0.0036	0.00473	0.3191

9- النتائج والاستنتاجات

من خلال الحالة التطبيقية التي تناولناها في بحثنا هذا في تقدير دالة المعولية باستخدام طريقة كابلن – مييز والطريقة القياسية حصلنا على ما يأتي:

1- من خلال جدول المقارنة (جدول (4)) وباستخدام اختبار كولمكروف – سيمرنوف (Kolmogorov – Smirnov) لتحديد أي الطريقتين كانت أمثل. كانت قيمة الاختبار (0.392) وعند اجراء المقارنة كانت قيمة P value تساوي (0.998) وبمقارنة هذه القيمة مع مستوى المعنوية (α =0.01) ، لاحضنا بانه لاتوجد فروق معنوية كبيرة بين الطريقتين. أي يمكن القول بان كلتا الطريقتين لهما نفس الامثلية.

2- من خلال الجدول (5) نلاحظ بان قيمة التباين لكل وقت فشل تعتمد على عدد الفشل r_j ومع هذا فان قيمة التباين لا تتساوى عندما يكون r_j متساوي لأحد أوقات الفشل بسبب أن قيمة التباين لكل وقت فشل تعتمد على ما يضاف لها من خلال المقدار $\sum_{j=1}^{t(j)\le t} \frac{r_j}{n_j(n_j-r_j)}$

3- نلاحظ من خلال الجدول (6) أن التباين وحدود الثقة هنا تم حسابهم بعد تصحيح n_j .

4- لا يمكن حساب التباين وكذلك حدود الثقة عندما يكون $r_j = 0$ بسبب أن حساب التباين وحدود الثقة تعتمد على المقدار $\frac{r_j}{n_j}$.

10 – المصادر

1- الخزرجي، أحمد عبد علي، 2001، " مقارنة طرائق تقدير المعولية للبيانات الكاملة باستخدام المحاكاة مع تطبيق عملي" ، رسالة ماجستير، جامعة الموصل، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، قسم الإحصاء.

2- العذاري، فارس مسلم و جابر، عدنان شمخي، 1987 ، " استخدام طريقة كابلن – مييـر لتقدير معولية مكائن قسم المربيات / معمل تعليب كربلاء" ، مجلة تنمية الرافدين، العدد العشرون، ص (397-432).

3- Cohen, 1965, " Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Dist. Based on Complete and on Censored Samples", Technometrics, Vol.7, No.4, PP. 579-588.

4- Ebeling, C.E., 1997, " An Introduction to Reliability and Maitamability Engineering", McGraw-Hill.

5- Greenwood, M., 1926, " The Errors of Sampling of Survivorship tables", Reports on Public Health and Statistical Subjects, 33, PP.1-26

6- Kalbfleisch, J.D. & Prentice, R.L., 2002, 2ed ed., " The Statistical Analysis of Failure Time Data" , John Wiley & Sons. New York.

7- Kaplan, E.L, & Meier, P., 1958, " Nonparametric Estimation from Incomplete Observations", JASA, 53, PP.457-481.

8- Li, T.F., 1984, " Empirical Bayes Approach to Reliability Estimation for the Exponential Dist.", IEEE Tranl. Reliab., Vol.33, PP.233-236.

9- Peto, R. et al, 1977, " Design and Analysis of Randomized Clinical Trials Requiring Prolonged Observation of each Patient", British Journal of Cancer, 53, PP. 1-39.

10-Pugh, E.L., 1963, " The Best Estimation of Reliability in Exponential Case ", Operation Research , Vol.11, PP.57-65.

.....

.....

.....