

محاكاة تقدير معلمات توزيع معكوس كما النصف دائري المحول مع بعض الخصائص

Simulated estimation parameters of an inverse gamma distribution of a semicircular transformer with some properties

أ. د. مهدي وهاب نصر الله

Dr.. Mahdi Wahab Nasrallah

جامعة كربلاء-كلية الادارة والاقتصاد

University of Karbala - College of

Administration and Economics

mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq

عمار محمد جاسم

Ammar Mohammed Jassim

جامعة كربلاء-كلية الادارة والاقتصاد

University of Karbala - College of

Administration and Economics

ammar.m@s.uokerbala.edu.iq

المستخلص : في هذا البحث , تم تقدير معلمات توزيع معكوس كما النصف الدائري المحول (HCTIG) باستعمال طريقة الامكان الاعظم (Maximum Likelihood method) وطريقة العزوم (Moments Method) باستعمال محاكاة مونت-كارلو عن طريق برنامج ماتلاب MatLab بافتراض ثلاثة مجاميع من القيم الافتراضية لـ (α, β) هي $\alpha = 0.1, 2, 6$ و $\beta = 0.2, 0.1, 8$, واحجام عينات مختلفة (25, 50, 75, 100) اذ تم توليد بيانات المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع HCTIG وتم تقدير معلمات التوزيع باستعمال الطريقتين , وكذلك تمت المقارنة بين توزيع كما المعكوس النصف دائري المحول وتوزيع كما الاعتيادي باستعمال معايير المقارنة AIC و BAIC و AICc و HQIC , وكذلك ايجاد بعض خصائص التوزيع المحول مثل الدالة التوزيعية والعزوم والدالة الاحادية (Unimodality function) . وتم التوصل من خلال تجارب المحاكاة ان توزيع معكوس كما الدائري المحول افضل من توزيع كما , كذلك تفوق طريقة الامكان الاعظم على طريقة العزوم عند احجام العينات الكبيرة ولأغلب تجارب المحاكاة , وان المعلمات المقدرة للتوزيع المحول النصف دائري اقرب الى المعلمات الافتراضية.

الكلمات المفتاحية: توزيع معكوس كما النصف دائري, دالة الكثافة التوزيعية, الدالة الاحادية النمط, الامكان الاعظم, العزوم.

Abstract: In this research, the parameters of the transformed semicircular inverse gamma distribution (HCTIG) were estimated using the Maximum Likelihood method and the Moments Method using Monte-Carlo simulation by MatLab program assuming three sets of default values for (α, β) are $\alpha = 0.1, 2, 6$ and $\beta = 0.2, 0.1, 8$, and different sample sizes (25, 50, 75, 100) as the random variable data that follows the HCTIG distribution were generated and the distribution parameters were estimated using the two methods. Also, a comparison was made between the transformed semi-circular inverse gamma distribution and the normal gamma distribution using comparison criteria AIC, BAIC, AICc and HQIC, as well as finding some properties of the transformed distribution such as the distributive function, moments and the Unimodality function. It was concluded through the simulation experiments that the distribution of the circular inverse gamma transformer is better than the gamma distribution, as well as the greatest possibility method is superior to the method of moments at large sample sizes and for all simulation experiments, and that the estimated parameters of the semicircular transformed distribution are closer to the default parameters.

Keywords: semicircular inverse gamma distribution, cumulative distribution function, Unimodality function, Maximum Likelihood method, moment's method.

1. المقدمة: يشير مصطلح البيانات الدائرية الى المشاهدات المقاسة بالراديان (الزوايا النصف قطرية) أو بالدرجات. ويمكن العثور على هذه البيانات في العديد من المجالات المختلفة مثل الأرصاد الجوية وعلم الأحياء والعلوم الطبية (Gatto & Jammalamdaka 2003؛ Jammalamadaka & SenGupta 2001؛ Lund 1999). ويمكن تصور البيانات الدائرية على أنها البيانات الموزعة على محيط دائرة الوحدة (root circular). والتوزيع الدائري الأكثر شيوعاً هو توزيع فون مايزس ذو المعلمتين (Two)

Parameters Von-Mises distribution، والذي يمكن تقريبه من خلال التوزيع الطبيعي بالاستناد الى نظرية الغاية المركزية. تم اقتراح توزيعات بسيطة أخرى في سياق التوزيعات الخطية الملتفة، على سبيل المثال، توزيع كوشي العادية والملتفة.

في السنوات الأخيرة، تم اقتراح توزيعات دائرية أكثر تفصيلاً وتم تطبيقها بنجاح على البيانات الحقيقية. اقترح (Minh and Farnum 2003) توزيعات جديدة محددة على الخط الحقيقي للبحث على التوزيعات على الدائرة باستخدام الإسقاط المجسم العكسي. لقد أظهروا أن المتغير الخطي X الناجم عن متغير له متغير يتوزع توزيع منتظم بالمتغير θ على الفترة $(-\pi, \pi)$ له توزيع كوشي في $(-\infty, \infty)$.

اقترح (Jones and Pewsey 2005) عائلة جديدة من التوزيعات أحادية الوسائط المتماثلة على دائرة الوحدة التي تضمنت على التوزيع المنتظم، فون مايزس (Von Mises distribution)، وتوزيع كوشي الملف المنحني (Cardioid and Wrapped Cauchy distribution)، وان الشكل الأساسي لدالة الكثافة الاحتمالية لهذه العائلة يكون بسيط للغاية، على الرغم من أن ثابت تطبيعها مرتبط بدالة (Legendre). في اختراع Kato and Jones عائلة توزيعات من اربعة معلمات على دائرة الوحدة عبر تحويل موبوس (Möbius transformation) الذي يحتوي على توزيعات فون مايزس وتوزيع كوشي الملف. وهذه التوزيعات تكون مفيدة لمجموعات البيانات الموزعة بشكل غير متماثل على دائرة الوحدة. اقترح (Abe et al. 2010) عائلة جديدة من التوزيعات الدائرية التي تعتبر امتداد لعمل (Jones and Pewsey 2005) والتوزيعات الاحادية الوسائط المعدلة لـ (Minh and Farnum 2003) على أساس الإسقاط المجسم. يمكن أن يمتد النموذج إلى عائلة من التوزيعات الدائرية المتماثلة على الدائرة بتضمين دالة Appell. في عام 2012 اقترح (Phani et al) انموذج دائري غير متماثل. يُعرف أيضاً باسم توزيع القيمة المتطرفة المجسم ويتم تطويره باستخدام الإسقاط المجسم العكسي.

في هذا البحث، سيتم استعمال توزيع جديد مقيد بنطاق معين من مدى دائرة الوحدة. باستعمال أحد هذه التوزيعات هو التوزيع المحوري الذي يفترض أن الزوايا θ و $\theta + 180$ درجة تكون متساوية (Allredge et al. 1974) و (Mardia and Jupp 2000). وإيجاد توزيع بمشاهدات تقع بدقة على نصف دائرة الوحدة، على سبيل المثال في الفترة $[0, \pi)$ بالراديان، باستخدام الإسقاط المجسم العكسي. من المهم أن يكون هنالك توزيع نصف دائري طالما ان النماذج الأخرى تقع في نطاق الفترة $(0, 2\pi)$ علاوة على ذلك، فإن الخاصية الدورية للبيانات الدائرية ليست مفيدة للبيانات نصف الدائرية لأن 0 ليس هو مثل 180 درجة. (Ramblí et al, 2019)

2. توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول (HCTIG):

لنفرض انه لدينا المتغير العشوائي X له توزيع كاما بالمعلمتين (α, β) حيث ان α معلمة الشكل، β معلمة القياس، فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) I_{(0, \infty)} \quad (1)$$

اذ ان $\Gamma(\alpha)$ تعرف بدالة كاما والتي تحسب كما يأتي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (\alpha - 1)! \quad (2)$$

عندما تكون قيمة α عدد صحيح موجب، اما عندما تكون قيمة α عدد غير صحيح عندئذ يتم احتسابها كالاتي:

$$\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.2.5 \dots (\alpha-1)}{2^\alpha} \sqrt{\pi} \quad (3)$$

ويعرف توزيع كاما بأسم توزيع ايرلانك (Erlang distribution) اذا كانت قيمة (α) عدد صحيح.

ولـ $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ فان التوزيع يكون ملتو بمقياس الالتواء $(2/\sqrt{\alpha})$.

فان توزيع كاما المعكوس النصف دائري يرمز له $HCTIG(\alpha, \beta)$ يمكن الحصول عليه باستعمال التحويل :

(Wang, M-Z. & Shimizu, K. 2012)

$$\theta = 2 \tan^{-1} x$$

بحيث ان θ تعطى ضمن الفترة $(0, \pi)$

ليكن $m(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, باستخدام إسقاط مجسم عكسي فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع CTG تعطى بالشكل الآتي:

$$g(\theta) = |m'(\theta)|f(m(\theta)) \quad (4)$$

ومن معادلة (4) سنحصل على الآتي:

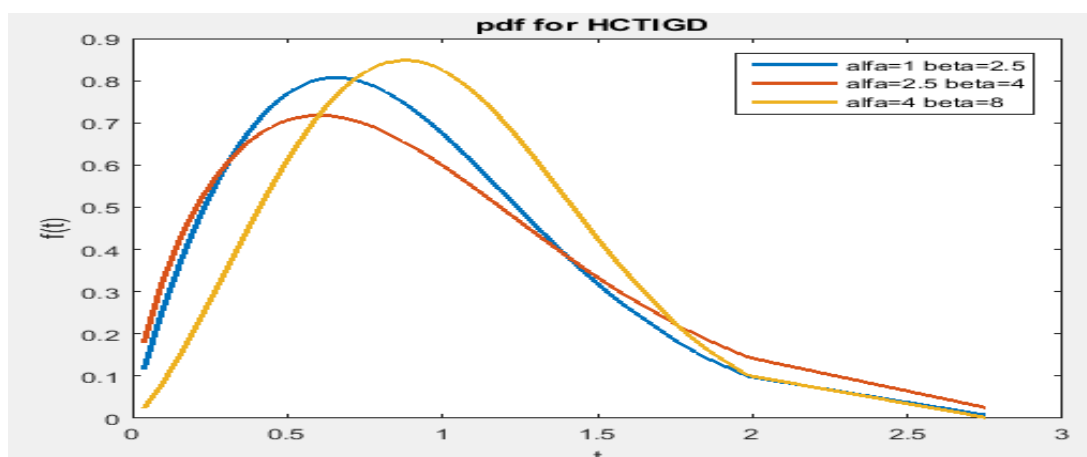
$$\begin{aligned} |m'(\theta)| &= \left| \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 - \cos(2(\frac{\theta}{2}))}{1 + \cos(2(\frac{\theta}{2}))} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \end{aligned} \quad (5)$$

وأن:

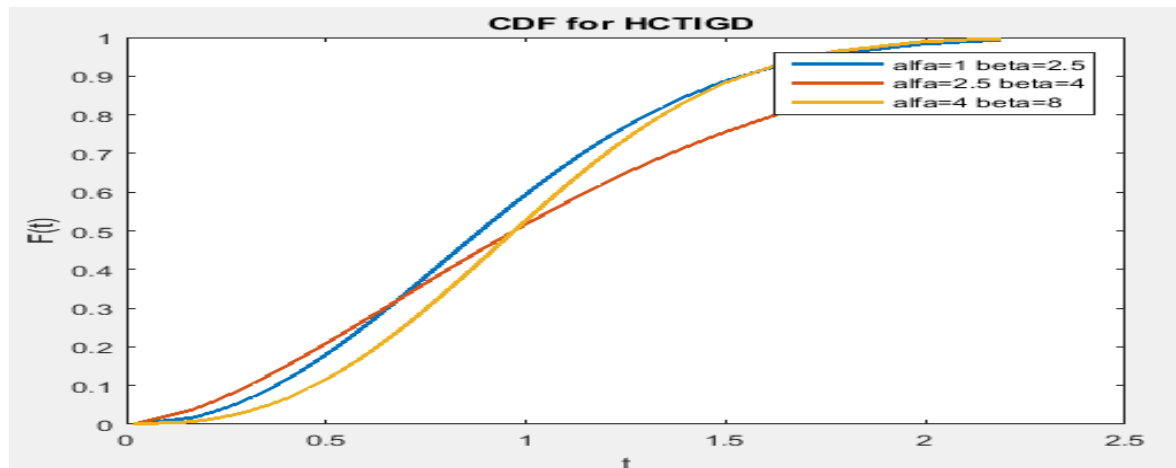
$$f[m(\theta)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \quad (6)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع $CTIG(\alpha, \beta)H$ كالآتي: (ADZHAR et al , 2019)

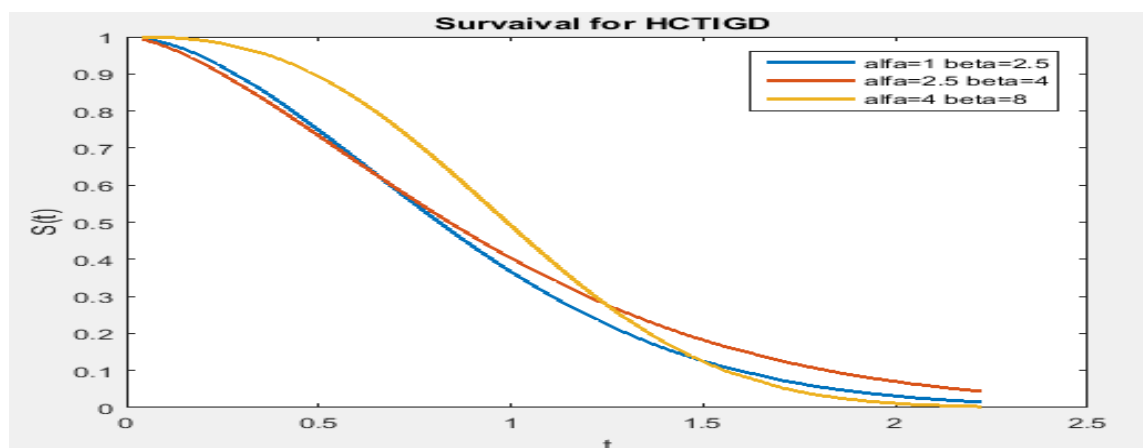
$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1+\cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) ; 0 < \theta < \pi \quad (7)$$



شكل (1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع معكوس كاما النصف دائري



شكل (2) منحني دالة الكثافة الاحتمالية التجميعية لتوزيع معكوس كاما النصف دائري



شكل (3) منحني دالة البقاء لتوزيع معكوس كاما النصف دائري

3. خصائص توزيع معكوس كاما النصف دائري :

في هذه الفقرة سيتم مناقشة بعض خصائص التوزيع وكما يأتي:

3.1 دالة التوزيع التراكمية:

ان دالة التوزيع التراكمية لتوزيع $HCTIG(\alpha, \beta)$ تعطى بالشكل الآتي: (Venables, W.N. & Ripley, B.D. 2002)

$$G(\theta) = p(\Theta \leq \theta) = p(2 \tan^{-1} \left(\frac{\theta}{2} \right)) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} \int_0^{\tan(\frac{\theta}{2})} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha (1 + \cos(\theta))} \gamma \left(\alpha, \frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta} \right) \quad ; 0 \leq \theta \leq \pi \quad (8)$$

حيث أن : $\gamma(\alpha, \beta)$ هس دالة كاما الناقصة والمعروفة بالصيغة $\gamma(\alpha, \beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} \exp(-t) dt$

3.2 الدالة الأحادية:

فإن مشتقة دالة كثافة الاحتمال التي يتم تمثيلها بواسطة متعدد الحدود الرباعي هو توزيع أحادي النمط فقط إذا كانت الدالة المميزة لها سالبة. لاحظ أنه عندما تكون الدالة المميزة سالبة ، فإن متعددة الحدود التربعية لها جذرين حقيقيين وجذران مركبان. وسوف نبين هنا أن مشتقة توزيع HCTIG هي متعددة حدود خماسية. فباشتقاق المعادلة رقم (8) بالنسبة θ نحصل على الدالة الاحادية لتوزيع $HCTIG(\alpha, \beta)$ بالشكل الآتي: (Kato, S. & Jones, M.C. 2010)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1 + \cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \right]$$

باستبدال $(1 + \cos(\theta)) \rightarrow (2\cos^2(\frac{\theta}{2}))$ نحصل على الآتي:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(2\cos^2(\frac{\theta}{2}))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \\ \therefore \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \left\{ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{\alpha-1}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-2} \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

وبوضع $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) &= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) \left\{ \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^\alpha + \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\alpha-1}{2} (\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-2} + 2\tan^\alpha\left(\frac{\theta}{2}\right) \sec^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+2}) - \frac{1}{2\beta} (\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} + 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+1}) + \right. \\ &\quad \left. \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha+3} \right\} \end{aligned}$$

والان ليكن $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) = \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) \left\{ \frac{\alpha-1}{2} x^{\alpha-2} - \frac{1}{2\beta} x^{\alpha-1} + \alpha x^\alpha - \frac{1}{2\beta} x^{\alpha+1} + \frac{\alpha-1}{2} x^{\alpha+2} - \frac{1}{2\beta} x^{\alpha+3} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) x^{\alpha-2} \left[\frac{\alpha-1}{2} - \frac{1}{2\beta}x + \alpha x^\alpha - \frac{1}{2\beta}x^3 + \frac{\alpha-1}{2}x^4 - \frac{1}{2\beta}x^5 \right] \quad (9)$$

ويمكن كتابة المعادلة (9) بالشكل الآتي:

$$= A \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) x^{\alpha-2} [a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5] \quad (10)$$

حيث أن:

$$A =$$

$$a_0 = \frac{\alpha - 1}{2}$$

$$a_1 = \frac{1}{2\beta}$$

$$a_2 = \alpha$$

$$a_3 = \frac{1}{2\beta}$$

$$a_4 = \frac{\alpha - 1}{2}$$

$$a_5 = \frac{1}{2\beta}$$

أوجد (McKay, 1987) ان مميز الحدودية الخماسية بالمعاملات $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ تعطي بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} D = & 3125a_5^5 - 3750a_5^3 + 2000a_5^2a_4^2a_2 + 2260a_5^2a_4a_3^2 - 9000a_5^2a_4a_2^3 + \\ & 825a_5^2a_3^3a_2^3 + 108a_5^2a_2^3 - 16000a_5a_4^4a_3 + 560a_5a_4^2a_2^2 - 630a_5a_4a_2^3a_2 - \\ & 72a_5a_4a_3a_2^2 + 108a_5a_3^2 + 16a_5a_3^3a_2^3 + a_5D_4(1,0, a_2, a_3, a_4) \end{aligned} \quad (11)$$

والمعادلة (11) لها لها خمسة جذور حقيقية ($K=0$) أو أربعة جذور مركبة وجذر حقيقي واحد ($K=1$) إذا كان المميز له قيمة موجبة. من ناحية أخرى ، له جذران مركبان وثلاثة جذور حقيقية إذا كان المميز سالبًا. وبالتالي ، فإن التوزيع هو توزيع أحادي النمط عندما يكون $D5 < 0$ وشكل حوض البانيو أو يتناقص / يزداد بشكل برتابة عندما $D5 > 0$ وهذه تتوافق مع الحالات ذات القيم الصغيرة والكبيرة لـ α .

3.3 العزوم المثلثية لتوزيع HCTIG: (ADZHAR et al , 2019)

العزوم المثلثية لتوزيع معكوس كما المحول تعطي بالشكل الآتي:

$\varphi_m ; m = 1, 2, 3 \dots$

حيث أن:

$$\varphi_m = \alpha_m + i\beta_m ; \alpha_m = E(\cos_m \Theta), \beta_m = E(\sin_m \Theta) \quad (12)$$

واللذان يمثلان العزوم المثلثي ذو الرتبة m للمعلمة العشوائية Θ والذي يعطى بالصيغة الآتية:

$$\begin{aligned} \alpha_m = E(\cos_m \Theta) &= \int_0^\pi \cos m\theta dg(\theta) \\ &= \int_0^\pi \cos m\theta \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1+\cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\cos m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(1+\cos(\theta))} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\cos m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

وأن:

$$\begin{aligned} \beta_m = E(\sin_m \Theta) &= \int_0^\pi \sin m\theta dg(\theta) \\ &= \int_0^\pi \sin m\theta \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha(1+\cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\sin m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(1+\cos(\theta))} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\sin m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \end{aligned} \quad (14)$$

وبتعويض (14) و (13) في معادلة (12) نحصل على العزم المثلثي لتوزيع HCTIG وكالاتي:

$$\varphi_m = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\cos m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta + i \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\sin m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan(\frac{\theta}{2})}{\beta}\right) d\theta \quad (15)$$

4. تقدير معلمات توزيع HCTIG باستعمال طريقة الامكان الاعظم :

نفرض أن $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع $HCTIG(\alpha, \beta)$ المحول فان تقدير الامكان الاعظم للمعلمت α, β يمكن الحصول عليهما بتعظيم دالة الامكان من $\Gamma(\alpha, \beta)$. فان دالة الامكان للعينة العشوائية n من $\Gamma(\alpha, \beta)$ تعطى بالشكل الآتي: (Phani, Y et al , 2012)

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^n \beta^{n\alpha}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta}\right) \quad (16)$$

$$\text{Log}(L) = -n \log(\Gamma(\alpha)) - n\alpha \log(\beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\beta} - n \log(\Gamma(\alpha)) \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Log}(L) = -\frac{n\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - \frac{n\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \text{Log}(L) = -\frac{n\alpha}{\beta} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\beta^2} \quad (19)$$

ونلاحظ من معادلة (18) و(19) انه لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلات غير خطية لذلك سيتم استعمال احدى الطرائق التكرارية العددية عن طريق استعمال الدالة (f solve) في برنامج ماتلاب لغرض إيجاد مقدر $\hat{\alpha}_{mle}$ و $\hat{\beta}_{mle}$.

5. تقدير معلمت توزيع HCTIG باستعمال طريقة العزوم :

تعتمد طريقة العزوم على إيجاد k من عزوم المجتمع بدلالة k من المعلمت , ثم مساواة عزم المجتمع بما يقابلها من عزوم العينة وبذلك نحصل على k معادلات (بعدد المعلمت) , بحل المعادلات الناتجة نحصل على المقدرات المطلوبة.

نفرض أن $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع $HCTIG(\alpha, \beta)$ المحول فان تقدير العزوم للمعلمت α, β يمكن الحصول عليهما كالآتي:

ان العزم الأول والثاني لتوزيع (HCTIG) كالآتي :

$$\varphi_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\cos m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) d\theta + i \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\sin m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) d\theta \quad (20)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\cos m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) d\theta + i \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^\pi \frac{(\sin m\theta) \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1}}{(2\cos^2 \theta)} \exp\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) d\theta \quad (21)$$

وان العزم الأول والثاني للعينة كالآتي :

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (22)$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (23)$$

وبمساواة عزوم المجتمع مع عزوم العينة ننتج لدينا المعادلتين الآتيتين :

$$\varphi_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (24)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (25)$$

ونلاحظ من معادلة (24) و (25) انه لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية لكونها معادلات ليس لها صيغة محكمة نظرياً وليس لها صيغة مغلقة للحل لذلك سيتم استعمال المحاكاة عن طريق استعمال الدالة (f solve) في برنامج ماثلاب لغرض إيجاد مقدر $\hat{\alpha}_{mom}$ و $\hat{\beta}_{mom}$ (Wang, M-Z. & Shimizu, K. 2012)

6. المحاكاة :

تم إجراء دراسة محاكاة مونت كارلو باستخدام برنامج MATLAB لاختبار قدرة طرق التقدير المعروضة في الفقرة (4) و(5)، حيث تم افتراض مجموعة متنوعة من المعلمات النظرية لتوزيع HCTIG وهي $\alpha = 0.1, 2, 6$ و $\beta = 0.2, 0.1, 8$ وأحجام عينات مفترضة هي (100, 75, 50, 25) والتكرار (1000) ولكل تجربة محاكاة للحصول على تجانس النتائج. تمت مقارنة النتائج باستخدام المعايير MSE و MAPE. وأظهرت دراسة المحاكاة تفضيل طريقة الامكان الأعظم على طريقة العزوم في أحجام العينات.

Table (1) Results of simulation under all sample sizes and theoretical parameters

$$\alpha = 0.1 \quad \beta = 0.2$$

N	Method		$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
25	Mle	Parameter	0.43118	0.92011
		MSE	0.033442	0.043528
		MAPE	0.120095	0.334486
	Mom	Parameter	0.199765	0.239132
		MSE	0.004383	0.004733
		MAPE	0.023644	0.022435
Best			Mom	Mom
50	Mle	Parameter	0.184587	0.310333
		MSE	0.003511	0.002911
		MAPE	0.026894	0.032228
	Mom	Parameter	1.132167	1.321456
		MSE	0.154042	0.095019
		MAPE	0.116574	0.170389
Best			Mle	Mle
75	Mle	Parameter	0.203439	0.306655
		MSE	0.00345	0.003476
		MAPE	0.01943	0.034451
	Mom	Parameter	2.238777	2.468719
		MSE	0.118367	0.09894
		MAPE	0.118729	0.18177
Best			Mle	Mle
100	Mle	Parameter	0.156565	0.149285
		MSE	0.003758	0.002913
		MAPE	0.021943	0.030976

	Mom	Parameter	2.507781	2.32119
		MSE	0.002156	0.004016
		MAPE	0.019604	0.031698
Best			Mle	Mle

Table (2) Results of simulation under all sample sizes and theoretical parameters

$$\alpha = 0.2 \quad \beta = 0.1$$

n	Method		$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
25	Mle	Parameter	1.989226	1.76112
		MSE	0.155568	0.083361
		MAPE	0.139612	0.179027
	Mom	Parameter	0.230176	0.445712
		MSE	0.003323	0.003438
		MAPE	0.019751	0.033887
Best			Mom	Mom
50	Mle	Parameter	0.48678	0.399983
		MSE	0.003353	0.003315
		MAPE	0.020124	0.033493
	Mom	Parameter	1.166672	1.119849
		MSE	0.125537	0.081299
		MAPE	0.124465	0.166712
Best			Mle	Mle
75	Mle	Parameter	0.210178	0.402288
		MSE	0.003377	0.00297
		MAPE	0.020228	0.02959
	Mom	Parameter	0.189222	0.293357
		MSE	2.132843	1.086648
		MAPE	0.127653	0.169737
Best			Mle	Mle
100	Mle	Parameter	0.257882	0.193444
		MSE	0.003264	0.003773
		MAPE	0.019688	0.036724
	Mom	Parameter	0.228891	0.145921
		MSE	0.002818	0.002913
		MAPE	0.068021	0.028824
Best			Mle	Mle

Table (3) Results of simulation under all sample sizes and theoretical parameters

$$\alpha = 6 \quad \beta = 8$$

n	Method		$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
25	Mle	Parameter	9.677578	10.21145
		MSE	0.126176	0.082487
		MAPE	0.123127	0.164677
	Mom	Parameter	6.95979	9.080061
		MSE	0.003311	0.003165
		MAPE	0.020167	0.021799
Best			Mom	Mom
50	Mle	Parameter	6.26822	8.003373
		MSE	0.003219	0.003255
		MAPE	0.020188	0.031765
	Mom	Parameter	8.578911	9.396541
		MSE	0.127152	0.072488
		MAPE	0.123323	0.164693
Best			Mle	Mle
75	Mle	Parameter	6.967881	8.111176
		MSE	0.003513	0.003441
		MAPE	0.020176	0.032902
	Mom	Parameter	1.677211	2.301118
		MSE	9.118736	9.0880924
		MAPE	0.118812	0.16923
Best			Mle	Mle
100	Mle	Parameter	6.045555	8.050336
		MSE	0.004477	0.003077
		MAPE	0.020732	0.029911
	Mom	Parameter	9.948334	9.114566
		MSE	0.002642	0.003295
		MAPE	0.018841	0.032528
Best			Mle	Mle

ولغرض المقارنة بين توزيع كاما وتوزيع معكوس كاما النصف دائري من حيث دقة التقدير تم اجراء مقارنة عن طريق استعمال المعايير الاحصائية AIC و BAIC و AICc و HQIC كما مبين في جدول (4) :

يبين جدول (4) نتائج اختبارات حسن المطابقة الأربعة والتي طبقت على توزيع كاما وتوزيع معكوس كاما النصف دائري

جدول (4) نتائج معايير المقارنة بين التوزيعين

Distribution	Parameters estimation		AIC	AICc	BIC	HQIC
HCTIG	0.12	0.14	381.22	381.03	368.95	14.89
Gamma	0.98	0.78	418.92	418.03	422.95	15.08

يتبين من جدول (4) بان معايير الاختبارات الخاصة بتوزيع كما المعكوس النصف دائري كانت اقل من توزيع كما الاعتيادي، وهذا يدل عن افضلية التوزيع المحول في التقدير .

7. الاستنتاجات:

1. اثبت توزيع كما المعكوس النصف دائري HCTIG كفاءته على توزيع كما الاعتيادي Gamma بحيث حقق اقل معايير المقارنة بينه وبين توزيع كما.
2. تفوق طريقة الامكان الاعظم MLE على طريقة العزوم MOM في تقدير معلمات توزيع HCTIG وخاصة عند احجام العينات الكبيرة (50,75,100)
3. المعلمات المقدرة كانت اقرب الى المعلمات الافتراضية عند تقدير التوزيع المحول النصف دائري HCTIG .

8. المصادر:

1. ADZHAR RAMBLI, IBRAHIM MOHAMED, KUNIO SHIMIZU & NORLINA MOHD RAMLI, (2019), " A Half-Circular Distribution on a Circle" , Sains Malaysiana 48(4)(2019): 887–892 <http://dx.doi.org/10.17576/jsm-2019-4804-21>
2. Dodge, Y. (2006) The Oxford Dictionary of Statistical Terms. OUP. ISBN 0–19–920613–9.
3. Gato, R. & Jammalamadaka, S.R. 2003. Inference for wrapped symmetric α -stable circular models. The Indian Journal of Statistics 65(2): 333–355.
4. Jammalamadaka, S.R. & SenGupta, A. 2001. Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific.
5. Jones, M.C. & Pewsey, A. 2005. A family of symmetric distributions on the circle. Journal of the American Statistical Association 100: 1422–1428.
6. Kato, S. & Jones, M.C. 2010. A family of distributions on the circle with links to, and applications arising from, Möbius transformation. Journal of the American Statistical Association 105: 222–229.
7. Lund, U. 1999. Least circular distance regression for directional data. Journal of Applied Statistics 26: 723–733.
8. Mardia, K.V. 1972. Statistics of Directional Data. London: Academic.
9. Mardia, K.V. & Jupp, P.E. 2000. Directional Statistics. 2nd ed. Chichester: Wiley.
10. McKay, J. 1987. On computing discriminants. The American Mathematical Monthly 94(6): 523–527.
11. Minh, D.L.P. & Farnum, N.R. 2003. Using bilinear transformations to induce probability distributions. Communications in Statistics–Theory and Methods 32: 1–9.
12. Phani, Y., Girijsa, S.V.S. & Rao, A.V.D. 2012. Circular model induced by inverse stereographic projection on extreme-value distribution. Engineering Science and Technology 2(5): 881–888.
13. Venables, W.N. & Ripley, B.D. 2002. Modern Applied Statistics with S. 4th ed. New York: Springer.
14. Wang, M–Z. & Shimizu, K. 2012. On applying Möbius transformation to cardioids random variables. Statistical Methodology 9: 604–614.