Warith Scientific Journal

تقدير المعولية البيزية لتوزيع (Chen- Poisson) في ظل دوال خسارة مختلفة
Estimating the Bayesian Reliability of the (Chen – Poisson) distribution under different loss functions

احمد تركي عبد علي
Ahmed Turki Abd Ali
كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء
Administration and Economics/ Karbala
ahmed.turki@uokerbala.edu.iq

أ.د عواد كاظم شعلان الخالدي
Prof. Dr. Awad Kadim Shalan
كلية الادارة والاقتصاد جامعة وارث الأنبياء
Administration and Economic, f warith al-Anbyaa
Awad.k@uokerbala.edu.iq

المستخلص .تعد عملية تقدير دالة المعولية من العمليات المهمة, في هذا البحث تم اعتماد توزيع (Chen-Poisson) باستعمال طريقة بيز القياسية من خلال الاعتماد على دالة خسارة تربيعية و دالة خسارة انتروبي عامة , حيث تم الحصول على المقدرات بالاعتماد على الدوال المعتمدة ،ولأجل التوصل الى اكفأ طريقة في التقدير تم توظيف أسلوب المحاكاة بطريقة(مونت – كارلو) لتوليد بيانات وبحجوم عينات مختلف (25,50,75,100) ،واظهرت النتائج ان طريقة بيز القياسية باعتماد دالة خسارة انتروبي هي الاكفأ لتقدير دالة المعولية لتوزيع (Chen-Poisson) لأغلب القيم الافتراضية وذلك باعتماد المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطاء التكاملي(IMSE) .

الكلمات المفتاحية :طريقة بيز القياسية , دوال الخسارة, توزيع (Chen-Poisson),دالة المعولية .

Abstract: The process of estimating the reliability function is one of the important processes, where the (Chen-Poisson) distribution was adopted using the standard Bayes method based on the quadratic loss function and the general entropy loss function. Estimation The simulation method (Monte-Carlo) was employed to generate data with different sample sizes (25,50,75,100), and the results showed that the standard Bayes method by adopting the entropy loss function is the most efficient for estimating the reliability function of the (Chen-Poisson) distribution for most default values, by adopting The statistical measure is the mean of squares integral error (IMSE).

Keywords: standard Bayes method, loss functions, Chen-Poisson distribution, Reliability function .

1- المقدمة:

ان مفهوم المعولية له معانٍ عديدة ولعل المعنى الواسع لها هي مقياس للأداء او هي اداة لتحليل المتغيرات العشوائية ذات القيم الموجبة التي تمثل الوقت حتى حدوث الفشل والغاية من معرفة المعولية هو تقيم اداء وكفاءة الجهاز او النظام بصورة عامة وتحديد الفترة الزمنية للفشل ، منها يهتم بدراسة معدل فشل المكائن بعد مدة محددة من الزمن t أي احتمال المعولية على الجهاز لفترة محددة ومنها يهتم بقياس مدة بقاء الأشخاص الذين يعانون من الامراض اعتماد على عينة بقاء المريض المصاب ، وان التعامل مع دوال المعولية يحتاج الى توزيع احتمالي يلائم ظاهر المدروسة، وفي هذا البحث تم اعتماد توزيع Chen-Poisson ولتقدير معلمات هذه التوزيع تم الاعتماد على طريقة بيز القياسية ودالة خسارة تربيعية واخرى دالة خسارة انتروبي ، تم الاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE للمقارنة بين الطرق .

2-هدف البحث

الهدف الاساسي للبحث هو الحصول على الطريقة الافضل لتقدير دالة المعولية لتوزيع (Chen-Poisson)باستعمال طريقة بيز القياسية المعلوماتية اعتمادا على المقياس الإحصائي أقل متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) ، لغرض تقيم اداء وكفاءة الجهاز او النظام بصورة عامة وتحديد الفترة الزمنية للفشل كما يمكن وضع جداول زمنية للصيانة.

3 - تحليل المعولية (Reliability analysis):

المعولية هي اداة لتحليل المتغيرات العشوائية ذات القيم الموجبة التي تمثل الوقت حتى حدوث الفشل، وتعتبر مقياس لأداء الجهاز او نوعيته بمرور الزمن، اي درجة الضمان للوحدة (المعدة، الماكنة، الجهاز) او للانظمه من انها سوف تعمل بشكل ناجح في بيئة محددة خلال مدة زمنية معينة، اي انها احتمال ان تبقى الوحدة تؤدي عملها بنجاح على الاقل خلال مدة زمنية محددة من دون

حدوث عطلات او توقف في عملها، أي ان هذا العنصر يعول علية في أداء المهمة عبر مدة زمنية محدد، ،فما هو احتمال ان يعمل هذا الجهاز في المستقبل عبر مدة زمنية $(t > 0)$ كان تكون الفترة (يوم ،أسبوع ،شهر، سنة .....)

وتعرف دالة المعولية [1] بأنها احتمال استمرار الماكنة بالعمل بعد مرور الزمن(t) ،ويهتم تحليل المعولية بدراسة توزيع الوقت منذ حالة البدء ويعبر عن دالة المعولية R(t) رياضياً بالصيغة الاتية: -

$$R(t) = 1 - F(t) \qquad \dots (1)$$

F(t): دالة الكثافة التجميعية للمتغير العشوائي T.

t: يمثل المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل وهو متغير عشوائي يمثل وقت بقاء الماكنة حتى العطل.

4- توزيع Chen- Poisson المركب: Compound Chen- Poisson distribution

يعد توزيع **Chen− Poisson** من التوزيعات المستخدمة بشكل واسع في نمذجة بيانات الحياة ودالة المعولية ، [7]وان اكتشاف هذا التوزيع ساهم في تطور الإحصاء لأهميته في العلوم الطبية والهندسية والصناعية، ونمذجة بيانات الوقت، ويعد أحد نماذج الفشل وله العديد من الاستعمالات في الحقول المختلفة منها في دراسات المعولية، [5] وان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع تكون بالصيغة التالية:

$$f(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\alpha\beta\lambda x^{\beta-1} e^{(\alpha - \alpha e^{x\beta})} e^{\lambda e^{(\alpha - \alpha e^{x\beta})}}}{e^{-\lambda} - 1} \quad ،\lambda ،\beta ،\alpha > 0 ،x > 0 \qquad \dots (2)$$

حيث ان: -

β : معلمة الشكل (Shape parameters).

α :معلمة القياس(Scale parameter) .

λ : معلمة القياس (Scale parameter) .

وتكون دالة الكثافة التجميعية (c.d.f) للتوزيع فتكون بالصيغة الاتية.

$$F(x, \alpha, \beta, \lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda e^{\left(\alpha - \alpha e^{x\beta}\right)}}}{e^{\lambda} - 1} \qquad \dots (3)$$

اما دالة المعولية فيمكن صياغتهما وفق الصيغة الاتية:

$$R(x, \alpha, \beta, \lambda) = 1 - \frac{e^{\lambda} - e^{\lambda e^{\left(\alpha - \alpha e^{x\beta}\right)}}}{e^{\lambda} - 1} \qquad \dots (4)$$

اما دالة المخاطرة فيمكن صياغتهما وفق الصيغة الاتية:

$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{f(x,\alpha,\beta,\lambda)}{R(x,\alpha,\beta,\lambda)}$$

$$h(x,\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\alpha\beta\lambda x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{\left(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}}\right)}}(e^{\lambda}-1)^{-1}}{1-[e^{\lambda}-e^{\lambda e^{\left(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}}\right)}}](e^{\lambda}-1)^{-1}} \quad \dots (5)$$

5-مقدر بيز القياسي المعلوماتية : Standard Informative Bayes Estimator

سميت طريقة بيز نسبة الى توماس بيز [4](Tomas Bayes) اذ كان هناك مدرستان في التقدير الاولى تسمى بالمدرسة الكلاسيكية وهي تفترض ان المعلمات كميات ثابتة يتم تقديرها بالطرائق الكلاسيكية مثل طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وغيرها ، والاخرى تسمى المدرسة البيزية والتي تفترض ان المعلمات هي متغيرات عشوائية لها توزيع احتمالي يطلق عليه التوزيع الاولي (prior distribution) و يتم التعرف عليه عن طريق التجارب السابقة او من البيانات او عن طريق النظرية التي تحكم تلك الظاهرة ، ولبيانات العينة الحالية دور في عملية التقدير حيث يتم دمج دالة الامكان من بيانات العينة الحالية مع التوزيع المسبق باستخدام صيغة بيز[3] العكسية $(Bayes\ inversion\ formula)$ للحصول على التوزيع اللاحق (Posterior distribution) وتختلف طريقة بيز عن الطرائق الكلاسيكية بان في طريقة بيز تتم عملية اتخاذ قرار اما تقليل الخسارة او تعظيم المنفعة.

يعتمد مقدر بيز القياسي على دالة التوزيع اللاحق والتي تضم المعلومات السابقة عن المعلمة (θ) ومشاهدات العينة لحالية $(x_1.x_2.\dots.x_n)$ وبموجب نظرية بيز فان التوزيع اللاحق للمعلمة (θ) يمكن ان نحصل عليه باستعمال صيغة بيز العكسية (Inverse Bayesian formula) وكالآتي:

$$h\left(\underline{\theta}|x_1.x_2.\dots.x_n\right)=\frac{\pi(\underline{\theta})\prod_{i=1}^{n}f(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})}{\int_{\forall\underline{\theta}}\pi(\underline{\theta})\prod_{i=1}^{n}f(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})d\underline{\theta}} \quad \dots (6)$$

اذ أن:

$\pi(\underline{\theta})$:التوزيع الأولي للمعلمات $\underline{\theta}$.

$\mathbf{f}(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})$: دالة الامكان لمشاهدات العينة بحجم n.

$h\left(\underline{\theta}|x_1.x_2.\dots.x_n\right)$:التوزيع اللاحق للمعلمات $\underline{\theta}$.

5-1مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية: Squared Error Loss Function

تعرف دالة الخسارة التربيعية [3]بالصيغة الآتية:

$$L_1(\hat{\underline{\theta}},\underline{\theta})=(\hat{\underline{\theta}}-\underline{\theta})^2 \quad \dots (7)$$

لذلك فأن مقدر دالة المعولية في ظل دالة الخسارة التربيعية الذي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة بعد ايجاد المشتقة الاولى بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\text{Risk} = \mathrm{E}(\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})^2)$$

$$\text{Risk} = \int_{\forall\underline{\theta}} (\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})^2 \mathrm{h}\,(\underline{\theta}|\underline{x})\mathrm{d}\underline{\theta}$$

$$\text{Risk} = \int_{\forall\underline{\theta}} (\underline{\hat{\theta}}^2 - 2\underline{\theta}\,\underline{\hat{\theta}} + \underline{\theta}^2)\mathrm{h}\,(\underline{\theta}|\underline{x})\mathrm{d}\underline{\theta}$$

$$\text{Risk} = \underline{\hat{\theta}}^2 - 2\underline{\hat{\theta}}\mathrm{E}(\underline{\theta}|\underline{x}) + \mathrm{E}(\underline{\theta}^2|\underline{x}) \qquad \dots (8)$$

وباشتقاق المعادلة رقم(8) بالنسبة للـ $\hat{\mathrm{d}}(\theta)$ ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial \mathrm{E}(\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})^2)}{\partial \underline{\hat{\theta}}} = 0$$

$$2\underline{\hat{\theta}} - 2\mathrm{E}(\underline{\theta}|\underline{x}) = 0$$

$$\therefore \underline{\hat{\theta}}_{\mathrm{SBSEL}} = \mathrm{E}(\underline{\theta}|\underline{x})$$

إذ أن:

$\underline{\theta}$: متجه المعلمات المراد تقديرها.

$\underline{\hat{\theta}}$: متجه المعلمات المقدرة.

$\underline{\hat{\theta}}_{\mathrm{SEL}}$: متجه المعلمات المقدرة بموجب طريقة بيز القياسية في ظل دالة الخسارة التربيعية.

لذلك فان مقدر بيز القياسي لدالة المعولية هو التوقع الشرطي اللاحق لدالة المعولية اي ان :

$$\hat{R}\ (\mathrm{x}_1.\mathrm{x}_2.\dots.\mathrm{x}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{S}|\mathrm{x}_1.\mathrm{x}_2.\dots.\mathrm{x}_n) \qquad \dots (9)$$

لإيجاد مقدر بيز القياسي والذي يعتمد على دالة التوزيع اللاحق التي تشمل المعلومات السابقة للمعلمة ومشاهدات العينة الحالية نستعمل احدى دوال الخسارة (Loss Function) وتُعد من افضل الطرائق للحكم على أداء المعلمة المقدرة ففي هذه البحث سيتم استعمال نوعين من دوال الخسارة متماثلة وتدعى بدالة الخسارة التربيعية ((Squared Error Loss Function (SEL) وغير متماثلة وهي دالة خسارة انتروبي عامة ((General Entropy Loss Function (EL)[4]

الآن نحتاج الى اعطاء التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها (λ, α, β) , وحسب ماتوفر للباحث من معلومات حول التوزيعات الأولية للمعلمات افترض ان التوزيعات الأولية لتلك المعلمات ستكون كالآتي:

$$\lambda \sim \mathrm{Gamma}\ (\mathrm{a}_1.\mathrm{b}_1)$$

$$\alpha \sim Gamma\ (a_2.b_2\ )$$

$$\beta \sim Gamma\ (a_3.b_3\ )$$

وبذلك يتكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية (Prior Distribution) لكل معلمة كالآتي:

$$\boldsymbol{\pi_1}(\lambda) \propto \frac{\mathbf{b_1}^{\mathbf{a_1}}}{\Gamma(\mathbf{a_1})}\lambda^{\mathbf{a_1-1}}\mathbf{e}^{-\mathbf{b1}\lambda} \qquad ;\lambda > \mathbf{0} \qquad \dots (10)$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \frac{\mathrm{b_2}^{\mathrm{a_2}}}{\Gamma(\mathrm{a_2})}\alpha^{\mathrm{a_2-1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{b_2}\alpha} \qquad ;\alpha > 0 \qquad \dots (11)$$

$$\pi_3(\beta) \propto \frac{\mathrm{b_3}^{\mathrm{a_3}}}{\Gamma(\mathrm{a_3})}\beta^{\mathrm{a_3-1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{b_3}\beta} \qquad ;\beta > 0 \qquad \dots (12)$$

لذلك فان التوزيع الاولي المشترك (Joint Prior) يكون كالآتي:

$$\pi_1(\lambda)\,\pi_2(\alpha)\pi_3(\beta) = \frac{b_1{}^{a_1}}{\Gamma(a_1)}\lambda^{a_1-1}e^{-b1\lambda}\frac{b_2{}^{a_2}}{\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\,\frac{b_3{}^{a_3}}{\Gamma(a_3)}\beta^{a_3-1}e^{-b_3\beta} \ldots (13)$$

وان : a_3, b_3, a_2, a_1 $b_2 . b_1$ تسمى معلمات فوقية التي يمكن اختيارها بالشكل الذي يجعل دالة الكثافة الاحتمالية الأولية متناقصة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها .

وان دالة الإمكان للمشاهدات $x_1, x_2 . \ldots . x_n$ تكتب بالشكل الآتي:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f\,(x;\lambda,\alpha,\beta)$$

$$\boldsymbol{L = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}} \quad \ldots\ (14)$$

وستكون التوزيعات اللاحقة للمعلمات λ, α, β كالآتي:

$$h(\lambda,\alpha,\beta|\vec{x}) = \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\lambda^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}\beta^{a_3-1}(e^{-b1\lambda-b_2\alpha-b_3\beta})}{\int\lambda\int\alpha\int\beta\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\lambda^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}\beta^{a_3-1}(e^{-b1\lambda-b_2\alpha-b_3\beta})\,d\beta\,d\alpha\,d\lambda} \ldots (15)$$

ومن ذلك يمكن ان نستنتج التوزيع اللاحق لكل معلمة من المعلمات المراد تقديرها كالآتي:

$$h1\ (\lambda|\ \alpha,\beta,\vec{x}) = \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})}{\int\lambda\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})\ d\lambda} \quad \ldots (16)$$

$$h2\ (\alpha|\ \lambda,\beta,\vec{x}) = \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\alpha^{a_1-1}(e^{-b1\alpha})}{\int\alpha\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\alpha^{a_1-1}(e^{-b1\alpha})\ d\alpha} \quad \ldots (17)$$

$$h3\ (\beta|\ \lambda,\alpha,\vec{x}) = \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}\right]\beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})}{\int\beta\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})\ d\beta} \ldots (18)$$

فأن مقدر بيز في ظل دالة الخسارة التربيعية الذي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة بعد ايجاد المشتقة الاولى بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على :

$$\hat{\lambda}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\left[\int_{\lambda}\left((\lambda-\hat{\lambda})^2\right)h_1\ (\lambda|\ \alpha,\beta,\vec{x})d\lambda\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial\hat{\lambda}}\left[\int_{\lambda}(\lambda-\hat{\lambda})^2\frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}\right]\lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})}{\int_{\lambda}\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}e^{\lambda(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}\right]\lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})\ d\lambda}d\lambda\right] = 0 \quad \ldots . (19)$$

$$\hat{\alpha}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial\hat{\alpha}}\left[\int_{\alpha}(\alpha-\hat{\alpha})^2h_2\ (\alpha|\lambda,\beta,\vec{x})d\alpha\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}} [\int_{\alpha} (\alpha - \hat{\alpha})^2 \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \alpha^{a_1-1}(e^{-b1\alpha})}{\int_{\alpha}\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \alpha^{a_1-1}(e^{-b1\alpha})\ d\alpha} d\alpha] = 0 \ldots . (20)$$

$$\hat{\beta}_{SBSEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}}\left[\int_{\beta} (\beta - \hat{\beta})^2 h_3(\beta|\lambda, \alpha, \vec{x}) d\beta\right] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}}\left[\int_{\beta} (\beta - \hat{\beta})^2 \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})}{\int_{\beta}\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})\ d\beta} d\beta\right] =$$

0 …. (21)

وان مقدر دالة المعولية لتوزيع **(Chen-Poisson)** في ظل دالة خسارة تربيعية:

$$\hat{R}(X)_{SBSEL} = 1 - \frac{[e^{\lambda_{SBSEL}} - e^{\lambda_{SBSEL} e^{\left(\alpha_{SBSEL} - \alpha_{SBSEL} e^{x^{\beta_{SBSEL}}}\right)}}]}{e^{\lambda_{SBSEL}} - 1} \quad \ldots(22)$$

2-5 مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة انتروبي عامة:

Standard Informative Bayesian Estimator under General Entropy Loss

لذلك فان مقدر بيز القياسي[6]لمعلمات توزيع **(Chen-Poisson)** في ظل دالة الخسارة انتروبي عامة يكون كالآتي:

$$\hat{\lambda}_{SBEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}} [\int_{\lambda} \left(\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right)^q - q \log \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} - 1\right)^{\frac{-1}{q}} h_1(\lambda|\alpha, \beta, \vec{x}) d\lambda] = 0$$

$$= \frac{\partial}{\partial \hat{\lambda}}\left[\int_{\lambda} \left(\left(\frac{\hat{\lambda}}{\lambda}\right)^q - q \log \frac{\hat{\lambda}}{\lambda} - 1\right)^{\frac{-1}{q}} \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})}{\int_{\lambda}\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^n \prod_{i=1}^n \left[x^{\beta-1} e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})} e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right] \lambda^{a_1-1}(e^{-b1\lambda})\ d\lambda} d\lambda\right]$$

$$= 0 \quad \ldots(23$$

$$\hat{\alpha}_{SBEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\alpha}}\left[\int_{\alpha} \left(\left(\frac{\hat{\alpha}}{\alpha}\right)^q - q \log \frac{\hat{\alpha}}{\alpha} - 1\right)^{\frac{-1}{q}} h_2(\alpha|\lambda, \beta, \vec{x}) d\alpha\right] = 0$$

$$\hat{\beta}_{SBEL} = \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}}\left[\int_{\beta} \left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^q - q \log \frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1\right)^{\frac{-1}{q}} h_3(\beta|\lambda, \alpha, \vec{x}) d\beta\right] = 0 \quad \ldots(24)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\hat{\beta}}[\int_{\beta}\left(\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)^{q} - q\log\frac{\hat{\beta}}{\beta} - 1\right)^{\frac{-1}{q}} \frac{\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x\beta})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})}{\int_{\beta}\left[\frac{\alpha\beta\lambda}{e^{\lambda}-1}\right]^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[x^{\beta-1}e^{(\alpha-\alpha e^{x\beta})}e^{\lambda e^{(\alpha-\alpha e^{x^{\beta}})}}\right]\beta^{a_1-1}(e^{-b1\beta})\ d\beta} d\beta]$$

$$= 0 \qquad \ldots(25)$$

وان مقدر دالة المعولية لتوزيع (Chen-Poisson) في ظل دالة خسارة انتروبي عامة

$$\widehat{R}(X)_{SBEL} = 1 - \frac{[e^{\lambda SBEL} - e^{\lambda SBEL}{}^{e^{\left(\alpha_{SBEL} - \alpha_{SBEL}e^{x^{\beta SBEL}}\right)}}]}{e^{\lambda SBEL}-1} \qquad ..(26)$$

ونلاحظ ان المعادلة/*علاه* تمثل منظومة معادلات غير خطية (Non-Linear) ولأيمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحساب هذه التكاملات المعقدة لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) [2] لأيجاد مقدر بيز القياسي لدالة المعولية في ظل دالة الخسارة التربيعية و الانتروبية.

8-المحاكاة:

لقد تضمنت تجارب المحاكاة [**2**]المراحل الاساسية لتطبيق اساليب تقدير دالة المعولية في هذا البحث.

المرحلة الأولى: مرحلة تحديد القيم الافتراضية وتعتبر من المراحل المهمة الذي تعتمد عليها المراحل اللاحق للبرنامج، وتتم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:

1- تحديد قيم افتراضية مختلفة لمعلمات توزيع(Chen-Poisson)وفق الجدول الآتي:

جدول (1) يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع

Experiment	λ	α	β
1	0.7	4	2
2	2	2	2.6

2-اختيار حجوم مختلفة للعينة لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج حيث كانت (25-50-75-100).

3-تكرار كل تجربة كان مساويا الى (L=1000) لغرض الحصول على تجانس عال.

المرحلة الثانية توليد البيات العشوائية : وفي هذه المرحلة يتم توليد بينات عشوائية وفق Chen-Poissonبالاعتماد [2]على طريقة (مونت-كارلو) يمكن تلخيصها على وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$x = \left(\frac{\mathrm{Ln}[\alpha - \mathrm{Ln}[\frac{\mathrm{Ln}[\frac{e^{\lambda}}{1-e^{\lambda}} - \frac{e^{2\lambda}}{1-e^{\lambda}} + u - e^{\lambda}u]}{\lambda}]]}{\mathrm{Ln}[\alpha e]}\right)^{\frac{1}{\beta}} \qquad \ldots(27)$$

ui: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم.

المرحلة الثالثة إيجاد التقديرات: وفي هذه المرحلة تتم إيجاد المقدرات لمعلمات ودالة المعولية لتوزيع (Chen-Poisson)باســـتعمال طريقة التقدير والمتمثلة بطريق بيز القياسية باعتماد دالتي خسارة .

المرحلة الرابعة المقارنة بين طرائق التقدير: وهي المرحلة الأخيرة من مراحل تجارب المحاكات حيث يتم فيها المقارنة بين طريقتي تقدير دالة المعولية لتوزيع (Chen-Poisson) وذألك بالاعتماد على المعيار الاحصـــائي متوســـط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) التي يعطى بالمعادلة (28) :

$$\mathrm{IMSE}\left(\hat{R}(\mathrm{ti})\right)=\frac{1}{\mathrm{L}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}}\left\{\frac{1}{\mathrm{n_t}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n_t}}(\hat{R}\mathrm{i}(\mathrm{tj})-\mathrm{R}(\mathrm{tj}))^2\right\}$$

$$\mathrm{IMSE}\left(\hat{R}(\mathrm{ti})\right)=\frac{1}{\mathrm{L}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{L}}\mathrm{MSE}\left(\hat{R}(\mathrm{ti})\right) \qquad \ldots(28)$$

إذ إن:

L: تمثل عـدد مرات تكرار التجربة وهـو (1000) مرة.

n_t : هي مـعبرة عن حدود المتغير (t_i) من الـحد الادنى الى الحـد الاعلى .

$\hat{R}(t_i)$:القيمـة المقدرة لدالة المعولية وقف طـرائق التقدير المستعملة .

جدول رقم (2) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة المعولية بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة

Model 1			(λ= 0.7 ،β=2 ، α=4)		Model 2		(λ= 2 ،β=2.6 ، α=2)	
n	ti	Real(R(t)	$\hat{R}(t)_{SBSEL}$	$\hat{R}(t)_{SBEB}$	ti	Real(R(t)	$\hat{R}(t)_{SBSEL}$	$\hat{R}(t)_{SBEB}$
25	0.267325	0.828912	0.820214	0.835019	0.280408	0.842131	0.823104	0.823865
	0.428522	0.665203	0.652127	0.641804	0.526899	0.619689	0.693444	0.623302
	0.596276	0.656217	0.641849	0.63174	0.842974	0.50009	0.579523	0.51544
	0.976553	0.626893	0.608293	0.59914	1.06444	0.469961	0.549833	0.487842
	1.104412	0.489514	0.45227	0.453089	1.12141	0.42951	0.510206	0.450404
	1.161685	0.417276	0.372068	0.381842	1.12916	0.358599	0.435887	0.383455
	1.339232	0.185991	0.132256	0.183921	1.21325	0.295972	0.364131	0.322546
	1.714183	0.185871	0.132141	0.18383	1.44982	0.261756	0.322052	0.288386
	1.811741	0.137092	0.086733	0.148054	1.67395	0.204134	0.245777	0.229107
	1.826798	0.081772	0.041039	0.109975	1.8201	0.125101	0.125101	0.137227
	IMSE		0.05513	0.015487	IMSE		0.040665	0.014739
	Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$		Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$	

50	0.267325	0.858912	0.845662	0.859266	50	0.280408	0.84617	0.84617	0.816746
	0.428522	0.665203	0.678288	0.679412		0.526899	0.632296	0.632296	0.603773
	0.596276	0.656217	0.668738	0.670341		0.842974	0.51482	0.51482	0.492452
	0.976553	0.626893	0.637483	0.64071		1.06444	0.484963	0.484963	0.464434
	1.104412	0.489514	0.490145	0.501886		1.12141	0.444725	0.444725	0.426749
	1.161685	0.417276	0.412747	0.429306		1.12916	0.373769	0.373769	0.360328
	1.339232	0.185991	0.169357	0.200551		1.21325	0.310608	0.310608	0.301032
	1.714183	0.185871	0.169233	0.200434		1.44982	0.275832	0.275832	0.268269
	1.811741	0.137092	0.119192	0.152932		1.67395	0.216587	0.216587	0.212292
	1.826798	0.081772	0.063706	0.099342		1.8201	0.127348	0.127348	0.127871
	IMSE		0.01409	0.01127		IMSE		0.019791	0.010787
	Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$			Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$	
75	0.267325	0.808912	0.810766	0.814564	75	0.280408	0.99918	0.85185	0.830685
	0.428522	0.665203	0.657628	0.66269		0.526899	0.99674	0.613806	0.620593
	0.596276	0.656217	0.648224	0.653299		0.842974	0.99268	0.501351	0.508424
	0.976553	0.626893	0.617552	0.622705		1.06444	0.98702	0.47266	0.47998
	1.104412	0.489514	0.474594	0.481289		1.12141	0.97980	0.433861	0.441596
	1.161685	0.417276	0.40019	0.408765		1.12916	0.97104	0.364928	0.373599
	1.339232	0.185991	0.167151	0.188008		1.21325	0.96079	0.302833	0.312541
	1.714183	0.185871	0.167033	0.187898		1.44982	0.94910	0.268299	0.278666
	1.811741	0.137092	0.119056	0.143787		1.67395	0.93602	0.20891	0.220572
	1.826798	0.081772	0.065184	0.094821		1.8201	0.92161	0.11837	0.13248
	IMSE		0.010619	0.010504		IMSE		0.014722	0.010724
	Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$			Best		$\hat{R}(t)_{SBEL}$	
100	0.267325	0.808912	0.808669	0.809219	100	0.280408	0.99918	0.850701	0.834789
	0.428522	0.665203	0.64957	0.649708		0.526899	0.99674	0.634448	0.620334
	0.596276	0.656217	0.640016	0.640191		0.842974	0.99268	0.51501	0.50483
	0.976553	0.626893	0.608905	0.609254		1.06444	0.98702	0.484525	0.475526
	1.104412	0.489514	0.465014	0.467499		1.12141	0.97980	0.443315	0.436004
	1.161685	0.417276	0.390936	0.395504		1.12916	0.97104	0.370203	0.366109
	1.339232	0.185991	0.163053	0.178567		1.21325	0.96079	0.30455	0.303569
	1.714183	0.185871	0.162939	0.17846		1.44982	0.94910	0.268164	0.269003

	1.811741	0.137092	0.116868	0.1354		1.67395	0.93602	0.205882	0.210011
	1.826798	0.081772	0.065499	0.08767		1.8201	0.92161	0.114778	0.121494
	IMSE		0.010204	0.010435		IMSE		0.010133	0.010590
	Best		$\hat{R}(t)_{SBSEL}$			Best		$\hat{R}(t)_{SBSEL}$	

الاستنتاجات:

1- افضلية طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة انتروبي (BSEL) عند حجوم عينات (25,50,75) في ما كانت الافضلية لطريقة بيز
القياسية عند دالة خسارة تربيعية عند حجم (100)اعتمادا على مقياس (IMSE).
2- افضلية الانموذج الثاني على الانموذج الاول لأنه يملك اقل متوسط خطا تكاملي (IMSE) لأغلب احجام العينة.
3- اثبتت طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة انتروبية (BSEL) كفاءتها في تقدير دالة المعولية
4- وجد ان قيم (IMSE) تتناقص كلما زاد حجم العينة ولجميع الحالات المدروسة والقيم المعلمات المفترضة وهذا ما يتطابق مع النظرية الإحصائية.

التوصيات:

1-يوصي الباحث بالاعتماد على طريقة بيز القياسي في ظل دالة خسارة انتروبية (BSEL) لتقدير دالة المعولية .

2-يوصي الباحث بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل استخدام بيانات حقيقية بالاعتماد على الطرائق البيزية المستعملة في البحث.

3-يوصي الباحث باقتراح دوال خسارة مع الدوال الخسارة المستخدمة.

Sources:

1- Chen, Z. (2000). A new two-parameter lifetime distribution with bathtub shape or increasing failure rate function. Statistics & Probability Letters, 49(2), 155-161.

2- Dey, S., Kumar, D., Ramos, P. L., & Louzada, F. (2017). Exponentiated Chen distribution: Properties and estimation. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 46(10), 8118-8139.

3- Eliwa, M. S., El-Morshedy, M., & Ali, S. (2021). Exponentiated odd Chen-G family of distribution s: statistical properties, Bayesian and non-Bayesian estimation with applications. Journal of Applied Statistics, 48(11), 1948-1974.

4- Faizan, M., & Sana, B. E. (2018). Bayesian Estimation and Prediction for Chen Distribution Based on Upper Record Values. Journal of Mathematics and Statistical Science, 6, 235-243.

5- Mansoor, M., Tahir, M. H., Alzaatreh, A., & Cordeiro, G. M. (2020). The Poisson Nadarajah–Haghighi distribution : Properties and applications to lifetime data. International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering, 27(01), 2050005..

6- Tarvirdizade, B., & Ahmadpour, M. (2021). A new extension of Chen distribution with applications to lifetime data. Communications in Mathematics and Statistics, 9(1), 23-38.

7- Wang, R., Sha, N., Gu, B., & Xu, X. (2014). Statistical analysis of a Weibull extension with bathtub-shaped failure rate function. Advances in Statistics, 2014.