متساوية رياضية ذات فائدة

A Useful Mathematical Equality

الدكتور صلاح حمزة عبد*

المقدمة:

كثيرةٌ هي المتساويات ذات الفائدة في البراهين النظرية ، ما يؤدي إليها وما ينجم عنها ، وهذا يعني انعكاس فائدتها نظريا" وتطبيقيا" ، بشكل مباشر أو غير مباشر . إن معظم المتساويات المنتشرة في الأدبيات العلمية قد استكشفت كناتج عرضي لبعض المبرهنات ، وهذا هو حال المبرهنة التي سنعرضها هنا ، والتي لم نجد في الأدبيات العلمية ما يماثلها أو يحتويها كحالة خاصة ، لا من حيث الصياغة الرياضية ولا من حيث أسلوب البرهان ، ومنها الأدبيات المذكورة كمصادر لهذا البحث ، كغيض من فيض المصادر التي تمت مراجعتها في هذا الجانب إضافة" لما تم مراجعته في شبكة المعلومات الدولية ، الانترنت .

صيغة المتساوية:

سيتم عرض صيغة المتساوية بموجب النظرية التالية ،

نظرية

$$c = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^n (-1)^k \{1 - 2k/n\}^{n-1} = 1$$

البرهان لنفترض أن

$$SA(k) = C_k^n (-1)^k \{1 - 2k/n\}^{n-1}$$

* استاذ مساعد/قسم الاحصاء/كلية الإدارة والاقتصاد /الجامعة المستنصرية

حيث أن

$$k = 0,1,2,\dots,(n-1)$$

فتندرج على وفق هذا الاطار العام حالتان ، هما التاليتان :

a) اذا كانت قيمة n فردية ، وهنا يمكن كتابة :

$$c = SA(0) + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} SA(k) + \sum_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} SA(k)$$

وبما ان $SA(0) = C_0^n(-1)^0\{1\}^{n-1} = 1$ فان ،

$$\sum_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} SA(k) = \sum_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} C_k^n(-1)^k\{1-2k/n\}^{n-1}$$

وعلى فرض أن $L = k - \dfrac{n-1}{2}$ فأن ،

$$\sum_{k=\frac{n-1}{2}+1}^{n-1} SA(k) = \sum_{L=1}^{\frac{n-1}{2}} C_{L+(n-1)/2}^n(-1)^{L+(n-1)/2}\{1-2(L+(n-1)/2)/n\}^{n-1}$$

ولغرض أجراء عملية الجمع بشكل عكسي من الحدود العليا الى الحدود الدنيا ، نفترض أن ،

$u = \dfrac{n+1}{2} - L$ ، فيكون ،

$$\Rightarrow \quad \sum_{L=\frac{n-1}{2}}^{1} C_{L+(n-1)/2}^n(-1)^{L+(n-1)/2}\{1-2(L+(n-1)/2)/n\}^{n-1}$$

$$= \sum_{u=1}^{(n-1)/2} C_{n-u}^n(-1)^{n-u}\{2u/n-1\}^{n-1}$$

$$= \sum_{u=1}^{(n-1)/2} C_u^n(-1)^{u-1}\{1-2u/n\}^{n-1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{(n-1)/2} C_k^n(-1)^k\{1-2k/n\}^{n-1}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad c = 1}$$

(b اذا كانت قيمة n زوجية ، وهنا يمكن كتابة :

$$c = SA(0) + SA(n/2) + \sum_{k=1}^{n/2-1} SA(k) + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} SA(k)$$
$$= 1 + 0 + \sum_{k=1}^{n/2-1} SA(k) + \sum_{k=n/2+1}^{n-1} SA(k)$$

وبما أن ،

$$\sum_{k=n/2+1}^{n-1} C_k^n (-1)^k \{1 - 2k/n\}^{n-1} = \sum_{k=n/2+1}^{n-1} SA(k)$$

فأنه بأفتراض ، $L = k - n/2$ ، سيكون ،

$$\Rightarrow \sum_{k=n/2+1}^{n-1} SA(k) = \sum_{L=1}^{n/2-1} C_{L+n/2}^n (-1)^{L+n/2} \{-2L/n\}^{n-1}$$

وبأجراء عملية الجمع بشكل عكسي من الحدود العليا الى الحدود الدنيا ، من خلال أجراء التحويل ، $u = n/2 - L$ ، ينتج لدينا ،

$$\sum_{k=n/2+1}^{n-1} SA(k) = \sum_{u=1}^{n/2-1} C_{n-u}^n (-1)^{n-u} \{2u/n - 1\}^{n-1}$$
$$= \sum_{u=1}^{n/2-1} C_u^n (-1)^u \{2u/n - 1\}^{n-1}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n/2-1} C_k^n (-1)^k \{1 - 2k/n\}^{n-1}$$
$$= -\sum_{k=1}^{n/2-1} SA(k)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad c = 1}$$

وبذلك نكون قد أتممنا البرهان .

References

1- Dwight, H. (2004) "*Tables of integrals and other mathematical data*" , Twentieth edition , The Macmillan company , New York , USA .
2- Gradshteyn, I. (2001) "*Table of integrals , series , and products* " , tenth edition , The McGraw-Hill book company , London , UK .
3- Spiegel, M. (1995) "*Handbook of mathematical functions* " , Schaum's outline series , The McGraw-Hill book company , New Delhi , India .