تقديرات في خطط المعاينة العامة لبيان فاعلية تمثيل GSP

م.د.
أسامة محمد جاسم *

المستخلص

يقدم هذا البحث مفهوم خطط المعاينة العامة GSP والمتكونة من خطط معاينة تحت معاينة ذي الحدين وتحت معاينة ذي الحدين السالب، وتعتمد GSP على سلسلة من تجارب برنولي المستقلة المستمرة حيث تتوقف التجارب لحين وصول الباحث إلى القرار.

يتم في البحث تعريف مجاميع مختلفة من GSP واشتقاق صيغة للتباين ولمعدل حجم العينة ثم إجراء مقارنات عددية بين مجاميع مختلفة من GSP لبيان فعالية تمثيل أداء هذه الخطط وتأثيرها على تخفيض معدل حجم العينة وأن كل الاشتقاقات والتبسيطات الضرورية أعطيت في البحث.

Abstract

The concept of GSP (Generalized sampling plans) Comprised of a sequence of independent Bernollui trials; For these plans the variance of unbiased estimator and the average sample size are used as a measure of performance to compare several inverse binomial sampling plans within the context of generalized sampling plans The compared plans include curtailment, extended sampling Evaluation of performance of plans are which done.

1- المقدمة

* مدرس/ جامعة بغداد /كلية الزراعة

مقبول للنشر بتاريخ 2009/5/12

تطبق خطط المعاينة بأنواعها (المفردة، المزدوجة، التتابعية، المبتورة) عندما تقيم نوعية المنتوج بواسطة العينات بدلاً من الفحص الشامل، حيث تسحب عينة من المنتوج حسب شروط معينة منها مثلاً احتمال تحقق كل من مخاطرة المنتج والمستهلك وبعدها يتخذ قرار بقبول العينة ومن ثم قبول الدفعة أو رفض العينة ومن ثم رفض الدفعة وإجراء فحص شامل للكمية المتبقية (N–n) وهناك نظام آخر يتكون من تطبيق سلسلة من تجارب برنولي المستقلة وتستمر عملية المعاينة حتى يتحقق عدد معين من حالات النجاح، وعند تعديل قاعدة التوقف لهذا الأسلوب وإدخال موضوع بتر عملية الفحص عند تحقق صفة معينة، وتعتبر عملية البتر منطقية وتفي بالغرض، إذا تحقق هدف الفحص، وفي هذا البتر تخفيض لتكاليف فحص المعاينة، عن طريق التقليص من الكمية المفحوصة ومن الأساليب المعتمدة لهذا هو المعاينة المبتورة Curtailed sampling[1] ويعرف الفحص المبتور بأنه التدابير الاحتياطية (في عملية أخذ النماذج وسحب الوحدات) لإيقاف الفحص في نقطة ما يصبح عندها من الواضح أن البيانات التي تم الحصول عليها ملائمة لاتخاذ القرار.

2- هدف البحث

يهدف البحث إلى تطبيق مفهوم خطط المعاينة العامة GSP والتي تتكون من سلسلة من تجارب برنولي المستقلة والتي تشكل غطاء لأنواع من خطط المعاينة الأخرى، مثل المفردة والمزدوجة، ويتناول البحث تقدير متوسط حجم العينة لتلك الأنواع وكذلك تباين نسب المعيب، والمقارنة بينهما لأنواع مختلفة من التجارب. ولخصت نتائج المقارنات في الجدول (1) و(2).

3- خطط المعاينة العامة (GSP) Generalized Sampling plans

لنفرض أن الرمز S_0 (n_1, n_2, m_1, m_2) يرمز إلى نظام خطط المعاينة العامة (GSP)، والذي يعني أن خطة المعاينة ذات أصغر حجم عينة هو n_1 وقاعدة توقف تحقق عندما يكون هناك على الأقل m_1 وحدة جيدة (نجاحات) أو على الأقل m_2 وحدة معيبة (فشل) أو إلى أن يكون أكبر حجم عينة يتم فحصها هو n_2 أن سلوك خطة المعاينة في هذه المجموعة S_0 يشبه بتمثيل سلسلة من العينات المتسلسلة في المستوى الأقليدي حيث يبدأ المسار عند نقطة الأصل ثم يتوسع وحدة واحدة عند كل محاولة أما بالمسار الأفقي أو بالمسار العمودي اعتماداً على فيما إذا كانت نتيجة المحاولة واحد أو صفر على التوالي وطبقاً لذلك توضع الحدود في GSP حيث المجموعات مختلفة من المعالم المعرفة في S_0 نحصل على مجموعات مختلفة لخطط المعاينة، فمثلاً إذا وضعنا , $m_1 = m_2 = 0$ $n_2 = n_1$ نحصل على مجموعة خطط عينات ذات الحجم الثابت والتي نرمز لها S_1

$$S_1 = S_0\,(n_1, n_1, 0, 0)$$

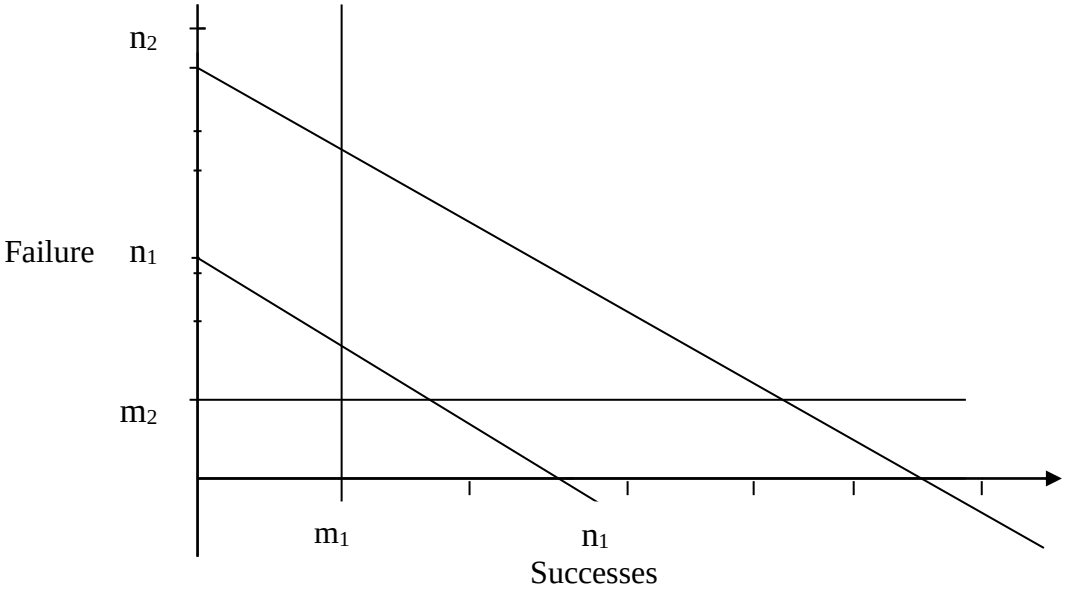
وبالمثل نحصل على مجموعة خطط لتوزيع ثنائي الحدين السالب S_2، بوضع

$$n_1 = 0 \qquad n_2 = \infty$$
$$m_2 = 0$$
$$S_2 = S_0\,(0, \infty, m_1, 0)$$

وكذلك لدينا

$$S_3 = S_0\,(0, \infty, m_1, m_2)$$

ويمكن تمثيل S_0 بالشكل التالي رقم (1) :



الشكل رقم (1)

خطط المعاينة العامة من النوع S_0

وبالطبع أن عملية تثبيت معالم خطة لـ S_0 يؤدي إلى عدة خطط أخرى كحالات خاصة مناظرة إلى تغيير في حدود الشكل رقم (1).

وضمن هذا السياق لو تم تعديل مجموعة الخطط S_2 ، تحت توزيع ثنائي الحدين السالب بافتراض أصغر حجم عينة n_1 ، فهذا سيؤدي إلى مجموعة خطط جديدة تسمى S_4 وهي:-

$$S_4 = S_0\ (n_1, \infty, m_1, 0)$$

وهي تعتبر توسيع لـ S_2، حيث تتوقف عملية المعاينة عند m_1 من النجاحات الحاصلة بأقل عدد من المحاولات، وعندئذ تكون التكاليف الإضافية لعملية المعاينة منخفضة نسبة إلى قيمة المعلومات المستخلصة من الفحص، وهنا تعتبر عملية المعاينة الموسعة ذات قيمة وبدلاً من ذلك فأن عملية القطع عند S_2 تعطي أكبر حجم عينة n_2 ، وتنتج عنها مجموعة الخطط S_5 ، وهذه المجموعة توفر حماية ضد حجوم العينات الغالية الثمن والتي فيها القيمة الحدية للمعلومات الإضافية لا تتناسب مع زيادة تكاليف المعاينة، أن المنافع لكلا النوعين S_4 ، S_5 يمكن الحصول عليها باشتراكهما لتكوين S_6 وهي:-

$$S_5 = S_0\ (0, n_2, m_1, 0)$$

$$S_6 = S_0\ (n_1, n_2, m_1, 0)$$

ولكن هذا الإجراء صحيح يوفر حماية بالنسبة للعينات الغالية الثمن، لكنه يحقق دقة واطئة عند التقدير. وأخيراً يمكننا القول أن مجموعة خطط المعاينة S_3 تحت سيطرة ثنائي الحدين السالب ممكن تعديلها بطريقة ما لكي ينتج عنها S_7، S_8، S_9 وهي:

$$S_7 = S_0\ (n_1, \infty, m_1, m_2)$$

$$S_8 = S_0\ (0, n_2, m_1, m_2)$$

$$S_9 = S_0\ (n_1, n_2, m_1, m_2) = S_0$$

4- التوزيعات الاحتمالية وطرق تقدير المعالم

Probability distributions and Parameter Estimation

في خطط المعاينة العامة (GSP'S) يعتبر كلٌ من حجم العينة N، وعدد حالات النجاح X، متغيرات عشوائية يحدد توزيعها المشترك ريثما يتم تحديد واختيار معلمات خطة المعاينة، فإذا كانت لدينا المشاهدة الأخيرة u_n ، فأن التوزيع المشترك لـ (N,X) هو:

$$P_r\left[N=n, X=x/U_N=u_n\right]=C_{x-1}^{n-1}P^x q^{n-x} \; if \; u_n=1 \quad .....(1)$$

$$=C_x^{n-1}P^x q^{n-x} \; if \; u_n=0 \quad .....(2)$$

لكل قيم $D \in (n,x)$

حيث أن D مجموعة كل نقاط الحدود بالشكل (1) تحت خطة المعاينة وأن q = 1-p ، وتحت نظامGSP'S يكون التوزيع المشترك للمتغيرات (N ,X, U) هو:

$$P_r\left[N=n \;\; X=x_1 U_N=u_n\right]=C_{x-u_n}^{n-1} \; P^x \; q^{n-x} \quad .....(3)$$

أن صيغة المقدر الغير متحيز لـ P تحت نظام المعاينة العام والذي سنرمز له بالرمز:

$$\hat{P}(S_o)=\frac{(X-U_N)}{(N-1)} \quad .....(4)$$

وعلى غرار هذا المقدر اقترح الباحثان (Kim, Lee, 1977)[3] مقدراً تحت الخطط S_2 وهو:-

$$\hat{P}(S_2)=(m_1-1)/(N-1)$$

وبالنسبة لخطط المعاينة ذات حجوم العينة الثابت فأن كل نقطة حدود (n,x) يمكن الوصول إليها من مسار العينة الذي يمر أما عند النقاط $(n-1,x-1)$ أو عند النقاط $(n-1,x)$ (بالاعتماد على نتيجة u_n فيما إذا كانت واحداً أو صفر، من ذلك نجد أن:-

$$\frac{X-1}{n-1}C_{X-1}^{n-1} \; P^X \; q^{n-X} + \frac{X}{n-1}C_X^{n-1} \; P^X \; q^{n-X}$$

$$=\frac{X}{n}C_X^n \; P^X \; q^{n-X}$$

.....(5) ني أن كلاً من :-

$$\hat{P}(S_1) = \left(\frac{X - u_n}{N - 1} \right)$$

وكذلك مقدر الإمكان الأعظم MLE للمعلمة P وهو $\left(\hat{P} = \frac{X}{N} \right)$ هما غير متحيزان.

وقد أشار الباحثون (Phatak, cohen 1970 and Bhatt 1967)[4] أن استخدام المعاينة المبتورة تحت خطط المعاينة S_1 نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لـP وهو $\frac{X}{N}$ ، ومن هنا يبدو أن MLE لـ P في S_2 هي $\frac{m_1}{N}$ وهي متحيزة، وكذلك تكون مقدرات الإمكان الأعظم أيضاً متحيزة عند الخطط S_4، S_5، S_6.

ولو قمنا بتحليل تمثيل الخطط S_4، S_5، S_6 نسبة إلى S_2 حيث أن :-

$$S_2 = S_0\ (0, \infty, m_1, 0)$$

وكذلك تكون

$$S_3 = S_0\ (0, \infty, m_1, m_2)$$

نتيجة لهذا الترابط بين أنظمة GSP، فأنه يمكننا اشتقاق معدل حجم العينة ASN، والتباين للمقدر $(\hat{P})$ من النظام S_0، ثم تعميمهُ على الأنظمة الأخرى، وسوف نعتمد أولاً على المعاينة المبتورة حيث من المعلوم أن معدل حجم العينة (ASN) لنظام المعاينة العام (GSP) وفي حالة البتر يعتمد على عملية فحص مشاهدة واحدة في كل مرة ومن الممكن انتهاء الفحص في العينتين حالما يكون القرار واضحاً، وهنا يكون معدل حجم العينة عبارة عن مجموع نتائج الحالات الأربعة وهي :-

أ- الحالة الأولى عند القبول من العينة الأولى n_1 ويكون معدل حجم العينة هو n_1، (احتمال قبول العينة الأولى).

ب- الحالة الثانية القبول من العينة الثانية n_2 وهنا يكون معدل حجم العينة عبارة عن (n_1+n_2) (احتمال قبول العينة الثانية).

ج- الحالة الثالثة عند الرفض من العينة الأولى n_1 ويكون معدل عدد الوحدات المفحوصة $E(m_1 / m_1 \le n_1)$.

د- الحالة الرابعة عند الرفض من العينة الثانية (n_2) $E(m_2 / m_2 \le n_2)$.

واعتماداً على هذه التعاريف الأربعة تم التوصل إلى $ASN(S_0)$ باستخدام التوزيع المشترك لـ (N, X, U_N) والمعرف بالمعادلة رقم (3) ، فأن معدل حجم العينة $ASN(S_0)$ هو:-

$$ASN(S_0) = n_2\left[1 + B(m_1 - 1, n_2, p) - B(n_2 - m_2, n_2, P)\right]$$
$$+ n_1\left[B(n_1 - m_2, n_1, p) - B(m_1 - 1, n_1, P)\right]$$
$$+ \left(\frac{m_1}{P}\right)\left[B^{-1}(m_1 + 1, n_2 + 1, P) - B^{-1}(m_1 + 1, n_1 + 1, P)\right]$$
$$+ \left(\frac{m_2}{q}\right)\left[B^{-1}(m_2 + 1, n_2 + 1, q) - B^{-1}(m_2 + 1, n_1 + 1, q)\right]$$

.....(6)

علماً بأنه:-

$$b(x, n, p) = C_x^n \; P^x \, q^{n-x}$$
$$b^{-1}(m, n, p) = C_{m-1}^{n-1} \; P^m \; q^{n-m}$$
$$B(y, n, p) = \sum_{i=0}^{y} b(i, n, p)$$
$$B^{-1}(m, y, p) = \sum_{i=0}^{y} b^{-1}(m, i, p)$$

وكما أشرنا أن نظام المعاينة S_4 هو:-

$$S_4 = S_0\,(n_1, \infty, m_1, 0)$$

وعند تعويض القيم: $n_2 = \infty, m_2 = 0$

في S_4 بالمعادلة (6) يكون معدل حجم العينة:

$$ASN(S_4)=\left(\frac{m_1}{p}\right)\left[1-B^{-1}(m_1+1,n_1+1,p)\right]+n_1\left[1-B(m_1-1,\ n_1,p)\right]$$

.....(7)

وبهدف المقارنة بين خطط المعاينة للأنظمة S_2، S_4، S_5، S_6 دعنا أولاً نشتق صيغة لتباين $\hat{P}$ للنظام S_0 حيث أن:-

$$Var(\hat{P}(S_0))=\sum_{x=0}^{m_1-1}\left(\frac{x}{n_2}\right)^2 b(x,n_2,p)+\sum_{x=n_2-m_2+1}^{n_2}\left(\frac{x}{n_2}\right)^2 b(x,n_2,p)+\sum_{x=m_1}^{n_1-m_2}\left(\frac{x}{n_1}\right)^2 b(x,n_1,p)$$

.....(8)

$$+\sum_{n=n_1+1}^{n_2}\left[(m_1-1)(n-1)\right]^2 b^{-1}(m_1,n,p)+\sum_{n=n_1+1}^{n_2}\left[(n-m_2)/(n-1)\right]^2 b^{-1}(m_2,n_2,q)-P^2$$

ويمكن استخدام القاعدة التالية في تبسيط العمليات الحسابية في صيغة تباين $\text{var}\,\hat{p}(S_0)$، والقاعدة هي:-

$$\sum_{n=m}^{\infty}\left[(m-1)/(n-1)\right]^2 b^{-1}(m,n,p)=\left[(m-1)\,p^m/q^{m-1}\right]\times\left[(-1)^{m-1}\log p+\sum_{i=1}^{m-2}\frac{(-1)^{m-1}q^i}{ip^i}\right]$$

.....(9)

وعند تقييم الأداء لخطة المعاينة المختلفة رقمياً وجدنا أن:-

$$\text{var}\left(\hat{p}\left(S_4 = S_0\left(n_1, \infty, m_1, o\right)\right)\right) \leq \text{var}\left(\hat{p}\left(S_2 = S_0\left(0, \infty, m_1, 0\right)\right)\right)$$

وأن

$$ASN\ S_4 \geq ASN\ S_4$$

5- مقارنة أداء خطط المعاينة

عند مقارنة تمثيل أداء خطط المعاينة المختلفة نلاحظ أن الفحص المبتور غالباً ما يؤدي إلى تخفيض (ASN) المناظر للقيم التقديرية لـ (p). والجدول التالي يلخص نتائج بعض المقارنات.

جدول رقم (1)

خطة المعاينة	P= 0.1		P= 0.3	
	ASN	var $\hat{p}$	ASN	var $\hat{p}$
$S_2 = S_0\left(0, \infty, 2, 0\right)$	20.00	0.0156	6.67	0.0648
$S_4 = S_0\left(4, \infty, 2, 0\right)$	20.04	0.0127	6.97	0.0454
$S_5 = S_0\left(0, 12, 2, 0\right)$	10.59	0.0165	6.34	0.0649
$S_6 = S_0\left(4, 12, 2, 0\right)$	10.62	0.0136	6.64	0.0454

أن تطبيق خطط المعاينة الموسعة من الاعتيادية والمبتورة يؤدي إلى تحسين دقة المقدر $\hat{P}$ ، وتقليل ASN الضروري للفحص، وهكذا نلاحظ أن مفهوم GSP يعمل كمظلة توفر حماية لخطط المعاينة التي تعتمد على سلسلة من محاولات برنولي المستقلة وهذا الإجراء من شأنه أن يوحد مواصفات خطط المعاينة ويجهزنا بصيغة كفوءة لمقارنة أداء خطط المعاينة المختلفة المعتمدة في فحص المنتوجات.

ومن ما تقدم أيضاً نلاحظ أن المعاينة المبتورة عند n_2 في نظام S_2، تؤدي إلى تخفيض في ASN، ولكن الثمن هنا هو زيادة ($\hat{P}$) var ، ولكن تعديل نظام المعاينة S_2 سيوفر خطط معاينة تقدم فوائد أما من ناحية ($\hat{P}$) var أو من ناحية ASN للنظام S_2.

وكذلك نلاحظ أنه عند تعويض $m_2 = 0, n_2 = \infty$ للنظام S_4، في المعادلة (6) [أي المعادلة $ASN(S_0)$] نحصل على معدل حجم العينة تحت نظام خطط المعاينة العام S_4 وهي:-

$$ASN(S_u) = \left(\frac{m_1}{p}\right)\left[1 - B^{-1}(m_1+1, n_1+1, p)\right] + n_1\left[1 - B(m_1-1, n_1, p)\right]$$

وهكذا نجد أن:-

$$ASN\left[S_u = S_0(n_1, \infty, m_1, 0)\right] \geq ASN\left[S_2 = S_0(0, \infty, m_1, 0)\right]$$

ومن هنا نجد أن الدقة المطورة للمقدر الذي نحصل عليه باستخدام S_2 تزيد عن ذلك الذي نحصل عليه تحت الخطط S_4، والحاصلة بالاحتفاظ بقيمة m_1 وافتراض قيمة صغيرة لـ n_1 على الخطط S_2 وأن هذه الدقة المطورة لـ S_4 نسبة إلى S_2 تتحقق على حساب زيادة معدل حجم العينة والجدول التالي يلخص قيم ASN ، var ($\hat{P}$) لخطط المعاينة S_2، S_4، S_5، S_6 عندما P= 0.10 و $m_1 = 5$ ولحجوم عينات مختلفة:-

$n_1 = 5, 15, 25, 35, 45.$
$n_2 = \infty, 90, 80, 70, 60, 50.$

الجدول رقم (2)

يلخص قيم (ASN) و var ($\hat{P}$) والناتجة من التطبيق على مثال افتراضي

n_2	n_1									
	5		15		25		35		45	
	ASN	var ($\hat{P}$)	ASN	var ($\hat{P}$)	ASN	var ($\hat{P}$)	ASN	var ($\hat{P}$)	ASN	var ($\hat{P}$)
∞	50	0.00275	50.03	0.002689	50.46	0.00245	52.15	0.002141	55.76	0.001835
90	49.31	0.002756	49.37	0.002691	49.77	0.002456	51.46	0.002143	55.07	0.001837
80	48.64	0.00276	48.66	0.002694	49.09	0.00246	50.79	0.002146	54.4	0.001841
70	47.4	0.002769	47.42	0.002704	47.85	0.002469	49.55	0.002166	53.16	0.001850
60	45.23	0.00279	45.26	0.002728	45.69	0.002493	47.38	0.00218	50.99	0.001874

50	41.68	0.002856	41.7	0.002791	42.14	0.002567	43.83	0.002243	47.44	0.001937

يتضح من الجدول رقم (2) انخفاض في معدل حجم العينة حيث تراوح الانخفاض من

(1.381 ---------- 16.64) %

أيضاً انخفاض في مقدر التباين حيث كانت نسب الانخفاض من

(2.36 ---------- 32.18) %

وهذه المقارنات بين تمثيل الخطط المختلفة تشير إلى الفحص المبتور والذي يؤدي بصورة عامة إلى تخفيض ASN، وهذا مهم جداً في حالات الفحص التدميري، حيث يؤدي الفحص إلى تدمير الوحدة المفحوصة ، كذلك بالنسبة للتجارب الطبية حيث المشاهدات تكون غالية الثمن، لذلك يعتمد الفحص المبتور حيث تتوقف خطة الفحص لحين الحصول على عدد معين من حالات النجاح، وهنا يعتبر توزيع ثنائي الحدين السالب هو التوزيع الاحتمالي المناسب لهذا النوع من الخطط.

6- الاستنتاجات

1- يعتبر نظام GSP نظام مشترك من خطط معاينة تحت توزيع ثنائي الحدين وتوزيع ثنائي الحدين السالب ويعتمد على سلسلة من تجارب برنولي المستقلة لذلك يمثل مظلة لخطط المعاينة، مما يساعد على توحيد مواصفات خطط المعاينة والذي يجهزنا بصيغ كفوءة لمقارنة تمثيل أداء هذه الخطط.

2- يوفر GSP طريقة تساعد في تخفيض معدل الفحص الكلي وبالتالي تخفيض تكاليف فحص المعاينة خاصة بالنسبة للفحص التدميري والمشاهدات الطبية والنادرة.

3- لوحظ انخفاض في معدل حجم العينة يتراوح من % (16.64-------1.381)

4- وكذلك انخفاض في مقدار التباين بمقدار %(32.18---------2.36) وهذا مؤشر ممتاز على كفاءة أداء هذه الخطط.

7- التوصيات

1- توصي باستخدام GSP لأنه نظام مشترك ذو كفاءة وفعالية أداء عالية تشمل كلاً من الفحص الاعتيادي والفحص المبتور.

2- نوصي بإجراء مقارنات أخرى عند حجوم عينات أخرى لـ n_1 ، n_2 عن طريق برامج خاصة تعد لهذا الغرض.

References

1- COHEN, A.C.(1970)"Curtailed Attribute Sampling" Technometrics., 12, 295 – 298.

2- Dr. Kenneth S.stephens , (2001), The handbook of Applied Acceptance Sampling plans. Procedures & principles. AS Q Quality press (publisher) may (2001).

3- Kim, S.I, and Lee, J. K (1977) "On Generalized Inverse Binomial Sampling Plan" the journal of the Korean statistical society, 1,1-20.

4- PHATAK, A.G., and BHAT,N.M(1967).''Estimation of the Fraction Defective in curtailed Sampling plans by Attributes" Technometric,9,219-228

5- PHATAK, A.G., and BHAT,N.M(1967).''Estimation of the Fraction Defective in curtailed Sampling plans by Attributes" Technometric,14, 925-930.

6- Vijay aragh van R,''Minimum size double Sampling plans for large isolated lots journal of Applied Statistics vol" .34NO.7 September 2007 page 799-806.

تم الحصول على النتائج في جدول رقم (1) من تطبيق برنامج خاص أعد للمعادلة (6) والمعادلة (8).

……

……

……