

تقدير أنموذجي Logistic و Gompertz لدراسة نمو صادرات النفط في العراق للفترة (2010-2009)*

أ.م. د أنكين

مصطفى محمد كاظم **

انترانيك هايك***

ankeena@uomusansirivahah.edu.iq

المستخلص

يعد تقدير معالم النماذج اللاخطية من أهم الأمور التي يتطلب حسابها في الإنحدار اللاخطي لمعرفة مدى استجابة الأنماذج لبيانات البحث، وقد تم استخدام عدة نماذج لاخطية لوصف حالة نمو معين منها أنموذج Logistic وأنموذج Gompertz . إن طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squares Method تعد من الطرق الشائعة في تقدير المعلمات من خلال صيغ معدة لها كطريقة كاوس نيوتن The Gauss –Newton Algorithm فضلاً عن بساطة وسهولة الطريقة في حل مشاكل عدة كذلك تم استخدام طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posteriori Method . وإن هدف البحث هو المقارنة بين طريقتين للتقدير باستخدام بعض المؤشرات الإحصائية مثل متوسط المربعات الخطأ MSE ومعامل التحديد R^2 . وتبين من البحث ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squares أفضل من طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum A Posteriori Method لأنها تمتلك أقل MSE . المصطلحات الرئيسية للبحث: طريقة المربعات الصغرى، طريقة كاوس نيوتن، طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق، أنموذج Logistic، أنموذج Gompertz .

Estimation of logistic and gompertz models to study of oil exportsgrowth in iraq for the period (2009-2010)

Mustafa Muhammed kazem

Dr. Ankeen Antranik hayk

Abstract

Estimating the parameters of nonlinear models is one of the most important things to calculate in nonlinear regression to see how models respond to research data. Several nonlinear models have been used to describe a particular growth, e.g. Logistic model and Gompertz model. The Nonlinear Least Squares Method is a common way of estimating parameters through the Gauss-Newton algorithm, as well as the simplicity and ease of the method of solving several problems. The maximal posterior method. The aim of the research is to compare two estimation methods using some statistical indicators, such as mean error squares and the coefficient of selection. The study showed that the Nonlinear Least Squares method is better than the maximal A posteriori method because it possesses the least MSE.

* (البحث مستل من رسالة الماجستير الموسومة " دراسة مقارنة لبعض طرائق تقدير النماذج اللاخطية مع تطبيق عملي " الجامعة المستنصرية، كلية الادارة والاقتصاد، قسم الإحصاء.

**طالب ماجستير /كلية الادارة والاقتصاد/ الجامعة المستنصرية

*** عضو هيئة تدريس/ الجامعة المستنصرية/ كلية الادارة والاقتصاد

1. المقدمة:

يعد تحليل الانحدار أسلوباً إحصائياً للتنبؤ بقيم متغير أو أكثر من المتغيرات المعتمد باستخدام قيم مجموعة من المتغيرات التوضيحية وكما انه يمكن استخدامه لتقييم أثر المتغيرات التوضيحية على المتغير المعتمد.

هناك نوعان من تحليل الانحدار النوع الأول هو الانحدار الخطي أما النوع الثاني فهو الانحدار اللاخطي والذي يكون أكثر تعقيداً لصعوبة حل معادلاته في حساب المقدرات للمعلمات لكن التطور الذي حصل في مجال الحاسوب لعب دوراً أساساً في تذليل تلك الصعوبات.

في هذا البحث تم تطرق إلى بعض نماذج النمو منها أنموذج Logistic وأنموذج Gompertz وتم تقدير معلمات الأنماذج بطريقتين وهما طريقة المربعات الصغرى اللاخطية وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق مع مقارنة بينهما. ونظراً لأهمية نماذج اللاخطية فإن البحث يهدف إلى إبراز وإشاعة المفاهيم الإحصائية لإستخدام هذه الأنماذج في تحليل البيانات الاقتصادية أو الزراعية وغيرها.

2. المشكلة وهدف البحث:

تكمن مشكلة البحث في أن العديد من الظواهر الطبيعية عند دراسة سلوكها نجدها تسلك سلوكاً غير خطي ولتحليل تلك الظواهر نستخدم النماذج اللاخطية لوصف تلك الظواهر مما يتطلب تقدير معلمات تلك النماذج بطرائق تتصف مقدراتها بالكفاءة والجودة .

يهدف البحث إلى المقارنة بين طريقتين في تقدير معلمات الأنماذج اللاخطية وهي طريقة المربعات الصغرى اللاخطية Nonlinear Least Squares Method وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق Maximum Aposteriori Method لتحقيق أفضل المقدرات بإستخدام مؤشرات إحصائية وهي MSE و R^2 .

3. الجانِب النظري:

يتضمن هذا المبحث دراسة بعض النماذج اللاخطية مع توضيح الصيغ المعتمدة في تحديد التقديرات لمعلمات تلك النماذج.

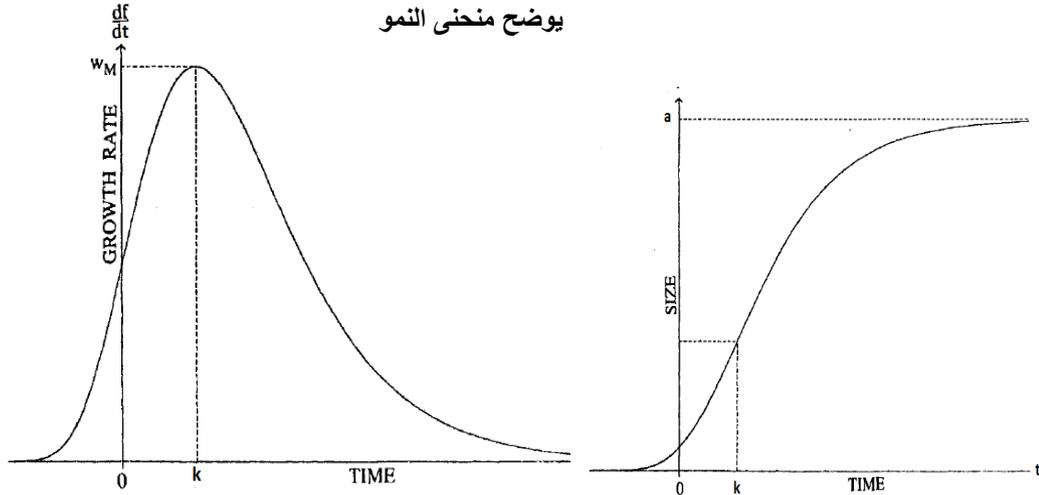
1.3 نماذج النمو Growth Models:

عند دراسة بيانات نمو من خلال رسم البيانات نلاحظ إن معدلات النمو لا تنخفض بشكل منتظم وإنما تتزايد إلى أقصى حد قبل أن تنخفض لتصل إلى نقطة الصفر، إن أغلب منحنيات النمو تأخذ شكل حرف S كما موضح في الشكل (1a) [8].

سيتم التطرق فيما بعد إلى عدة نماذج نمو التي تحقق شكل النمو السيني فضلاً عن تحديد نقطة الإنعطاف مع أقصى حالات النمو كما موضح في الشكل رقم (1b) [9].

شكل (1)

يوضح منحنى النمو



(1b)

منحنى معدل النمو

(1a)

منحنى النمو

في هذا البحث تم التطرق إلى النماذج الآتية:

1.1.3 أنموذج Logistic :

يمكن التعبير عن أنموذج Logistic بالصيغة الآتية:

$$Y = \frac{a}{1 + b \exp(-kt)} \quad (1)$$

Y: يمثل معدل النمو

t: يمثل الزمن

إذ ان $k>0, b>0, a>0$ تمثل معاملات الأنموذج وان قيمة Y تتغير مع تغير قيمة t، فإذا كانت $t=0$

يعني $Y=a/(1+b)$ وعندما $t \rightarrow \infty$ يعني $Y \rightarrow a$ ولتوضيح شكل الدالة يتم إيجاد المشتقة

الأولى والثانية للصيغة رقم (1) وكانت كما يلي [9] :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{k}{a} Y(a - Y) \quad (2)$$

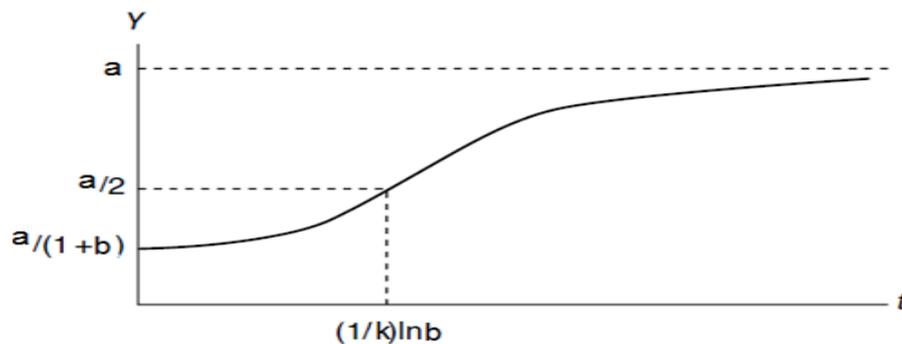
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{k}{a} (a - 2Y) \frac{\partial Y}{\partial t} \quad (3)$$

من المعادلة (3) نلاحظ أن $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$ عندما $Y = a/2$ وبتعويض قيمة Y في المعادلة (1)

ينتج $t = \frac{\text{Lnb}}{k}$. بهذا تكون نقطة الانعطاف Inflection Point لدالة Logistic هي

$(\text{Lnb}/k, a/2, Y_{\text{inf}}) = ()$ والشكل (2) يوضح منحنى دالة Logistic.

شكل (2)



يوضح منحنى أنموذج Logistic

نلاحظ من الشكل (2) ان المنحنى يأخذ شكل حرف (S)

وعندما $t < \ln b/k$ فإن $\frac{d^2Y}{dt^2} > 0$
 أما عندما $t > \ln b/k$ فإن $\frac{d^2Y}{dt^2} < 0$
 وبقسمة المعادلة (2) على Y نحصل على

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{k}{a} (a - Y) \quad (4)$$

فإن معدل نمو لقيمة جديدة عند الزمن t تقع في الفترة $(a - Y)$ أي ما بين t و $t-1$ ويمكن التعبير عن هذا المعدل بالصيغة الآتية^[7]:

$$R_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \frac{e^{k-1}}{a} (a - Y_t) \quad (5)$$

لتقدير معاملات نموذج Logistic يتم اخذ اللوغاريتم الطبيعي للصيغة (1) ثم نحصل على المعادلة الآتية:

$$\ln \left(\frac{a}{Y} - 1 \right) = \ln b - kt \quad (6)$$

يتم تحديد التقدير الأولي للمعلمة a ويرمز لها a_0 من الرسم البياني لتوزيع قيم Y مقابل قيم t إذ تقترب من أكبر قيمة Y وليكن

$$z_i = \ln \left(\frac{a_0}{Y} - 1 \right) = \ln b - kt_i + \epsilon_i \quad (7)$$

ϵ_i : يمثل الخطأ العشوائي الذي يتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين ثابت σ^2 لجميع قيم i .
 باستخدام طريقة المربعات الصغرى (L.S.) للصيغة (7) يمكن تحديد تقديرات الأولوية للمعلمتين b, k يرمز لها b_0, k_0 , وكما يلي:

$$k_0 = \frac{-n \sum_{i=1}^n t_i z_i + \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} \quad (8)$$

$$b_0 = \bar{z} + k_0 \bar{t} \quad (9)$$

وباستخدام قيم التقديرات الأولية للمعلمات (k_0, b_0, a_0) في أولى خطوات كاوس نيوتن لتحقيق أفضل المقدرات وجعل مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^n e_i^2$ اقل ما يمكن أي ان^[8]

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n \left[Y_i - \left\{ \frac{a_0}{1 + b_0 \exp(-k_0 t_i)} \right\} \right]^2 \quad (10)$$

وكانت المشتقات الجزئية لمعاملات نموذج Logistic كما يلي:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_0} = \frac{1}{1 + b_0 \exp(-k_0 t)} \quad (11)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial b_0} = \frac{-a_0 \exp(-k_0 t)}{(1 + b_0 \exp(-k_0 t))^2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial k_0} = \frac{a_0 b_0 t \exp(-k_0 t)}{(1 + b_0 \exp(-k_0 t))^2} \quad (13)$$

2.1.3 أنموذج Gompertz :

يمكن التعبير عن أنموذج Gompertz بالصيغة الآتية:

$$Y = a \exp(-b \exp(-kt)) \quad t \geq 0 \quad (14)$$

إذا ان $k > 0, b > 0, a > 0$ تمثل معاملات الأنموذج وان قيمة Y تتغير مع تغير الزمن t ، فإذا كانت $t = 0$ يعني $Y = a \exp(-b)$ وعندما $t \rightarrow \infty$ يعني $Y \rightarrow a$ ولتوضيح شكل الدالة Gompertz يتم ايجاد المشتقة الأولى والثانية للصيغة (14) وكما يلي^[3]:

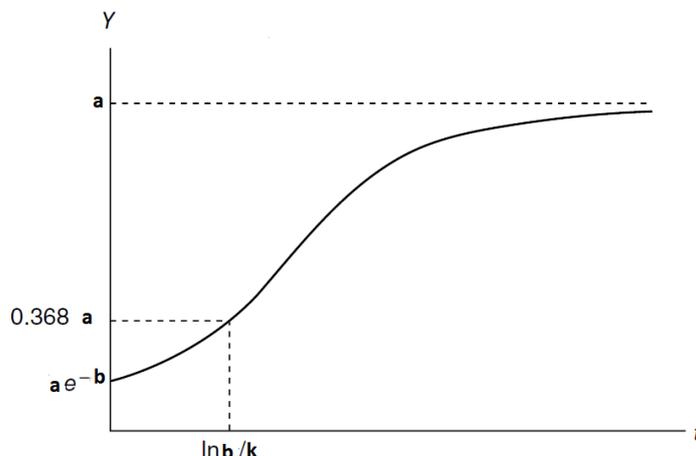
$$\frac{\partial Y}{\partial t} = bkY \exp(-kt) \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = bk^2 Y \exp(-kt) (b \exp(-kt) - 1) \quad (16)$$

نلاحظ من المعادلة (16) ان $\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0$ عندما $t = \frac{\ln b}{k}$ وبتعويض قيمة t في المعادلة (14) ينتج $Y = 0.36788 a$.

بهذا تكون نقطة الانعطاف Inflection Point لدالة Gompertz وهي $(\ln(b)/k, Y)$ والشكل (3) يوضح منحنى أنموذج Gompertz $(Y_{inf}, t_{inf}) = (0.36788a, Y_{inf})$.

شكل (3)
يوضح منحنى نموذج Gompertz



نلاحظ من الشكل (3) أن المنحنى يأخذ شكل دالة أسية متناقصة مع الزمن ويقسمة المعادلة (15) على Y نحصل على

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = bk \exp(-kt) = k(\text{Lna} - \text{LnY}) \quad (17)$$

من هنا تبين أن هناك علاقة خطية بين لوغاريتم معدل النمو الجديد و Ln Y أي أن

$$\text{Ln} \frac{\partial Y}{\partial t} = \text{Ln}(bk) - kt \quad (18)$$

بهذا نحصل على علاقة خطية بين لوغاريتم معدل النمو والزمن t ويمكن التعبير عن نسبة تغير في قيم Y ما بين $t-1$ و t وكما يلي [7]:

$$R_t = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} - 1 = \left[\frac{Y_t}{a} \right]^{e^{k-1}} - 1 \quad (19)$$

ولتقدير معلمات نموذج Gompertz يتم أخذ اللوغاريتم الطبيعي مرتين للصيغة (14) نحصل على المعادلة الآتية:

$$\text{Ln} \left[-\text{Ln} \left(\frac{Y}{a} \right) \right] = \text{Ln}(b) - kt \quad (20)$$

بعد تحديد التقدير الأولي للمعلمة a ويرمز لها a_0 يمكن كتابة المعادلة (20) كما يلي:

$$z_i = \text{Ln} \left[-\text{Ln} \left(\frac{Y_i}{a_0} \right) \right] = \text{Ln}(b) - kt_i + \epsilon_i \quad (21)$$

ϵ_i : يمثل الخطأ العشوائي لصيغة التحويل الخطي الذي يتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين ثابت σ^2 لجميع قيم i .

من حل المعادلة أعلاه نحصل على القيم الأولية للمعلمتين (b, k) ويرمز لها بالرمز b_0, k_0 كما يلي:

$$k_0 = \frac{-n \sum_{i=1}^n t_i z_i + \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n z_i}{n \sum_{i=1}^n t_i^2 - (\sum_{i=1}^n t_i)^2} \quad (22)$$

$$b_0 = \bar{z} + k_0 \bar{t} \quad (23)$$

باستخدام قيم التقديرات الأولية للمعلمات (k_0, b_0, a_0) في أولى خطوات كاوس نيوتن لتحقيق أفضل المقدرات وجعل مجموع مربعات الأخطاء $\sum_{i=1}^n e_i^2$ اقل ما يمكن أي أن [8]

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n [Y_i - a_0 \{ \exp(-b_0 \exp(-k_0 t_i)) \}]^2 \quad (24)$$

وكانت المشتقات الجزئية لمعلمات نموذج Gompertz كما يلي:

$$\frac{\partial Y}{\partial a_0} = \exp\{-b_0 \exp(-k_0 t)\} \quad (25)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial b_0} = -a_0 \exp\{-b_0 \exp(-k_0 t)\} \exp(-k_0 t) \quad (26)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial k_0} = a_0 b_0 t \exp\{-b_0 \exp(-k_0 t)\} \exp(-k_0 t) \quad (27)$$

2.3 طرق تقدير معلمات نماذج الانحدار اللاخطية :

Methods to Estimate the Parameter of Nonlinear Models

إن نماذج الانحدار اللاخطية هي نماذج معقدة ومتداخلة وعملية تقدير معلماتها صعبة وهناك عدة طرق للتقدير وسنتطرق فيما يلي الى طريقتين وهما:

1.2.3 طريقة المربعات الصغرى اللاخطية :

Nonlinear Least Square Method

تعد طريقة المربعات الصغرى اللاخطية من أهم الطرق وابتسطها في تحليل الانحدار اللاخطي نفترض لدينا الأنموذج غير الخطي الآتي

$$\underline{Y} = f(\underline{t}, \underline{\theta}) + \epsilon \quad (28)$$

إذ إن

$$\underline{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)' \quad \underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)'$$

\underline{Y} : يمثل متجه قيم الاستجابة

f : يمثل دالة من $\underline{\theta}, \underline{t}$

ϵ_i : يمثل الخطأ العشوائي الذي يتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين ثابت σ^2 لجميع قيم i .

باستخدام طريقة المربعات الصغرى اللاخطية يمكن تصغير المقدار الآتي

$$S(\hat{\theta}) = [y - f(\underline{t}, \hat{\theta})]' [y - f(\underline{t}, \hat{\theta})] \quad (29)$$

باستخدام أسلوب كاوس نيوتن Gauss-Newton فان $\theta_0 = (\theta_{10}, \theta_{20}, \dots, \theta_{p0})$

تمثل القيم الأولية للمعلمات وبعد تقريب هذه السلسلة باستخدام مفكوك سلسلة تايلر بحذف

الحدود التي تحتوي على المشتقات الجزئية من الدرجة الأعلى نحصل على^[6]

$$f(\underline{t}_i, \theta) = f(\underline{t}_i, \theta_0) + \sum_{j=1}^p \left[\frac{\partial f(\underline{t}_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right]_{\theta=\theta_0} (\theta_j - \theta_{j0}) \quad (30)$$

إذ $\theta^{(0)}$ تمثل القيم الأولية (θ)

إذ كانت

$$\underline{Y}^* = \underline{D}^{(0)} \underline{B}^{(0)} + \underline{\epsilon} \quad (31)$$

إذ إن

$$\underline{Y}^* = \underline{Y} - \underline{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} Y_1 - f_1^0 \\ Y_2 - f_2^0 \\ \vdots \\ Y_u - f_u^0 \\ \vdots \\ Y_p - f_p^0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}^{(0)} = \begin{bmatrix} D_{11}^0 & D_{12}^0 & \dots & D_{1p}^0 \\ D_{21}^0 & D_{22}^0 & \dots & D_{2p}^0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ D_{n1}^0 & D_{n2}^0 & \dots & D_{np}^0 \end{bmatrix}$$

$$D_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(\underline{t}_i, \theta)}{\partial \theta_j} \right]_{\theta=\theta^{(0)}}$$

$$\underline{f}^0 = \underline{f}(\underline{t}, \theta^{(0)})$$

ويمكن تقدير معلمات $\underline{B}^{(0)}$ للمعادلة (31) باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية من

خلال الصيغة الآتية^[1]:

$$\underline{\hat{B}}^{(0)} = (\underline{D}^{(0)} \underline{D}^{(0)})^{-1} \underline{D}^{(0)} \underline{Y}^* \quad (32)$$

إذ إن

$$\underline{\mathbf{B}}^{(0)} = \underline{\boldsymbol{\theta}} - \underline{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} \quad (33)$$

وإن قيم التقديرية لـ $\mathbf{B}^{(0)}$ تكون

$$\widehat{\underline{\mathbf{B}}}^{(0)} = \widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}} - \underline{\boldsymbol{\theta}}^{(0)} \quad (34)$$

والمعادلة (34) يمكن الحصول على قيمة $\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(1)}$ التي تمثل القيم التقديرية المعدلة لـ $\underline{\boldsymbol{\theta}}$ عند التكرار الاول ويتم وضعها بدل القيمة التقديرية الاولى $\underline{\boldsymbol{\theta}}^{(0)}$ ويتم تكرار العمليات نفسها على مجموعة ثانية من التقديرات المعدلة $\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(2)}$ وهكذا .

إن تقديرات المعدلة بشكل عام يمكن إعادة كتابتها وكمتجه بالشكل الآتي [5]:

$$\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r+1)} = \widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r)} + \underline{\mathbf{B}}^{(r)} \quad (35)$$

تستمر عمليات التكرار حتى نصل الى التقارب بين التقديرين المتعاقبين (r) و $(r + 1)$

بحيث ان

$$\left| \frac{\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r+1)} - \widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r)}}{\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r)}} \right| < \gamma$$

اذ ان γ تمثل قيمة صغيرة جداً. مع ملاحظة $\mathbf{S}(\underline{\boldsymbol{\theta}})$ لكل دورة من دورات التكرار والتوقف حسب الصيغة الآتية [1]:

$$\mathbf{S}(\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^{(r+1)}) \cong \mathbf{S}(\widehat{\underline{\boldsymbol{\theta}}}^r) \quad (36)$$

2.2.3 طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق:

Maximum A Posteriori Method

نفرض أنموذج النمو في الصيغة الآتية:

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i) = \mathbf{Y}_i - \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (37)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i)$: تمثل قيم المشاهدات التي تتوزع توزيع طبيعي مستقل

$$\mathbf{f}(\mathbf{t}_i) \sim \text{IN}(\mathbf{0}, \sigma_{\boldsymbol{\epsilon}}^2)$$

صيغة توزيع اللاحق تكون

$$\mathbf{p}(\underline{\boldsymbol{\theta}}|\mathbf{Y}) = \mathbf{L}(\underline{\boldsymbol{\theta}})\mathbf{g}(\underline{\boldsymbol{\theta}}) \quad (38)$$

حيث $\boldsymbol{\theta}$ تمثل متجه معاملات ذات بعد $m \times 1$

\mathbf{Y} : يمثل متجه قيم الاستجابة ذات بعد $n \times 1$

$\mathbf{L} \boldsymbol{\theta}$: يمثل دالة الامكان الأعظم ويمكن توضيحها كالاتي

$$L(\theta_k) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_\epsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right) \quad (39)$$

$g(\theta)$: يمثل دالة كثافة احتمالية للتوزيع السابق

نفترض ان $g(\theta)$ يتوزع توزيع المتعدد الطبيعي مع متوسط μ ومصفوفة التباين والتباين المشترك Σ

$$g(\theta) \sim NM(\underline{M}, \Sigma)$$

بأخذ اللوغاريتم للتوزيع اللاحق نحصل على^[4]

$$\ln p(\theta|Y) = \ln L(\theta) + \ln g(\theta) \quad (40)$$

حيث إن

$$g(\theta) = \frac{|\Sigma|^{-\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_k \sum_L \Sigma^{KL} (\theta_k - \theta_{k0})(\theta_{L1} - \theta_{L0})\right] \quad (41)$$

وإن

$$G(\theta_K) = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} - \Sigma^{KL} (\theta_{L1} - \theta_{L0}) \quad (42)$$

إذ إن H تمثل مصفوفة the Hessian matrix

$$H_{\theta_K, \theta_L} = -\frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \left[\sum_k \sum_L \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_L} + \epsilon_i \frac{\partial^2 f(t_i)}{\partial \theta_k \partial \theta_L} \right] - \Sigma^{KL} \quad (43)$$

ومصفوفة معلومات التوزيع اللاحق the posterior information matrix هي

$$\theta_{K, \theta_L} I = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_k} \frac{\partial f(t_i)}{\partial \theta_L} + \Sigma^{KL} \quad (44)$$

وباستخدام برمجة العمليات الحسابية تم الحصول على تقديرات للمعلمات من خلال الصيغة الآتية^[2]:

$$\theta_{r+1} = \theta_r - I^{-1} G_r \quad (45)$$

4. الجانب التطبيقي:

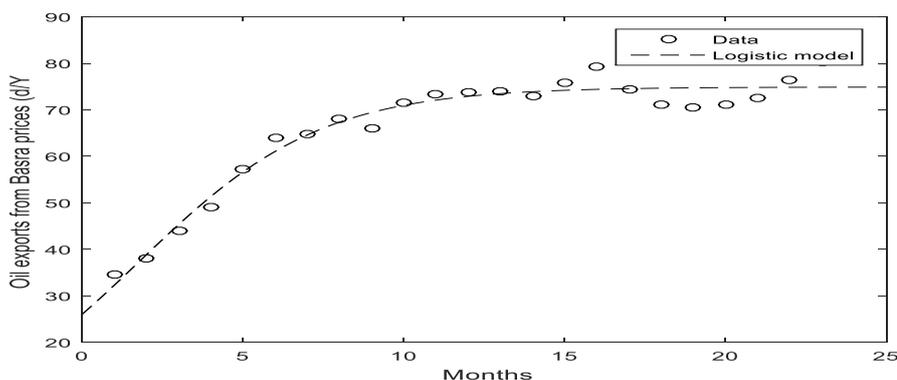
تم دراسة بيانات نمو أسعار صادرات النفط في العراق عبر الموانئ الجنوبية في البصرة وكان حجم العينة $n=23$ ، والجدول (1) يوضح بيانات نمو أسعار النفط في العراق للفترة (2010-2009) حسب الأشهر والتي أخذت من الموقع الإلكتروني لوزارة النفط.

جدول (1) يوضح البيانات الإحصائية لنمو أسعار صادرات النفط بالدولار			
النمو	الزمن بالأشهر	النمو	الزمن بالأشهر
74.07	ك=2=2010	34.61	ك=2=2009
72.92	شباط=2010	38.09	شباط=2009
75.82	آذار=2010	43.9	آذار=2009
79.2	نيسان=2010	49.07	نيسان=2009
74.3	أيار=2010	57.21	أيار=2009
71.1	حزيران=2010	63.95	حزيران=2009
70.61	تموز=2010	64.83	تموز=2009
71.06	آب=2010	68.03	آب=2009
72.52	أيلول=2010	65.99	أيلول=2009
76.4	ت=1=2010	71.6	ت=1=2009
80.25	ت=2=2010	73.35	ت=2=2009
		73.74	ك=1=2009

يمكن توضيح البيانات الواردة في الجدول أعلاه من خلال الرسم البياني في كل من الشكلين (4) و(5) ولكل أنموذج لملاحظة حالة النمو حسب الأشهر.

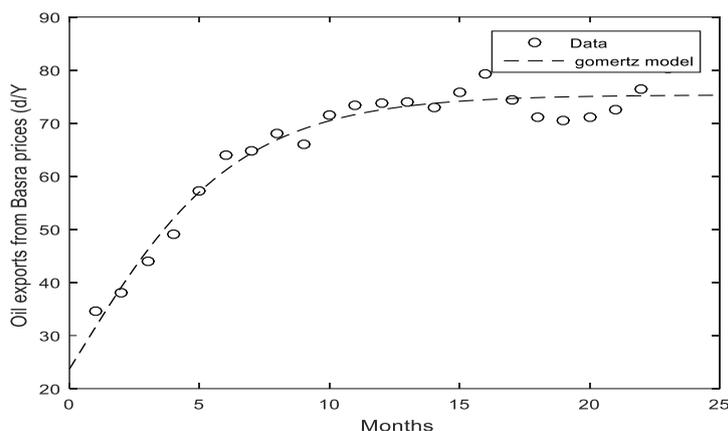
شكل (4)

يوضح منحنى أنموذج Logistic لأسعار صادرات النفط



شكل (5)

يوضح منحنى أنموذج Gompertz لأسعار صادرات النفط



1.4 تقدير معاملات النماذج اللاخطية:

إن تقدير المعلمات في النماذج اللاخطية يتطلب تحديد تقديرات الأولية للمعلمات ولكل أنموذج التي يمكن توضيحها كما يلي:

في حالة أنموذج Logistic تم تحديد التقدير الأولي للمعلمة a ويرمز لها بالرمز a_0 بحيث تقترب من أكبر قيمة Y ، ومن حل المعادلة رقم (7) تم الحصول على التقديرات الأولية للمعلمتين k و $Ln b$ والتي يرمز لها k_0 و b_0 على التوالي حسب الصيغتين (9) و (8) .

أما في حالة أنموذج Gompertz تم تحديد التقدير الأولي للمعلمة a ويرمز لها بالرمز a_0 بحيث تقترب من أكبر قيمة Y ، ومن حل المعادلة (21) تم الحصول على التقديرات الأولية للمعلمتين k و $Ln b$ والتي يرمز لها k_0 و b_0 على التوالي حسب الصيغتين (22) و (23) .

ويمكن توضيح المقدرات الأولية للمعلمات ولكل أنموذج كما في الجدول (2).

جدول (2)				
يوضح المقدرات الأولية للمعلمات لكل أنموذج				
Model	a_0	b_0	k_0	δ_0
Log.	81	0.8591	0.1411	
Gom.	81	0.6429	0.1267	

وتم تقدير معلمات النماذج المختلفة من خلال تنفيذ برنامج بلغة R للحصول على مقدرات المعلمات بالطريقتين (O.L.S. و M.AP) ، وكما موضح في الجدول (3).

جدول (3)

يوضح مقدرات المعلمات للنماذج اللاخطية بالطريقتين					
Model	Model	A	b	k	δ
Log.	O.L.S.	74.903	1.872	0.352	
	M.AP.	86.298	0.896	0.088	
Gom.	O.L.S.	75.337	1.156	0.285	
	M.AP.	86.678	0.651	0.07	

من خلال الجدول (3) نلاحظ ان القيم الحقيقية للمعلمات مقارنة للقيم الأولية ولكل الأنماذج المذكورة. وكذلك تم تحديد قيم مجموع مربعات الأخطاء MSE ومعامل التحديد R^2 ومعيار الانحراف الكلي TD وكما موضح في الجدول (4).

جدول (4)				
يوضح نتائج MSE, R^2, TD للطريقتين				
Model	Method	MSE	R^2	TD
Log.	O.L.S	6.55	0.96	2.75
	M.AP.	45.811	0.72	0.487
Gom.	O.L.S	7.137	0.96	2.117
	M.AP.	46.566	0.72	0.528

يبين من الجدول أعلاه أن نتائج المقدرات لطريقة O.L.S. كانت أفضل من طريقة M.AP. من حيث معاملي MSE و R^2 . بينما في حالة معيار الانحراف الكلي للمعلمات تبين ان طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق أفضل من طريقة المربعات الصغرى اللاخطية.

الاستنتاجات:

- 1- تبين من تحليل بيانات نمو أسعار صادرات النفط في العراق ان طريقة المربعات الصغرى اللاخطية O.L.S لتقدير معلمات اللاخطية أفضل من طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق M.AP. باستخدام R^2 و TD و MSE .
- 2- تبين من تحليل بيانات ان كل من أنموذجي Logistic و Gompertz كانت ملائمة للبيانات.
- 3- تبين من خلال دراسة بعض المؤشرات الإحصائية للمعلمات ان معلمتي b و k كانت تمتلك أفضل الخصائص في كل من أنموذجي Logistic و Gompertz باستخدام طريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق M.AP.
- 4- إن أنموذج Logistic أفضل من أنموذج Gompertz من حيث معيار الانحراف الكلي و MSE.

□ التوصيات:

- 1- إجراء مقارنة بين طريقة الحد أعلى للتوزيع اللاحق ودوال بيز (المعلوماتية والمرافقة الطبيعية والدالة المعتمدة على التجارب السابقة) لتقدير أنماذج الانحدار اللاخطية.
- 2- إجراء مقارنة باستخدام اسلوب المحاكاة لتقدير المعلمات اللاخطية في أنماذج النمو لأكثر من طريقة.

المصادر الأجنبية:

1. Bates, D.M., Watts, D.G. (1988), " Nonlinear Regression Analysis and Its Applications", New York: John Wiley & Sons, Inc.
2. Bock R.D. and Du Toit S.H.C. (2003), " Parameter estimation in the context of nonlinear longitudinal growth models", In: Hauspie R.C., Cameron N., Molinari L. (eds): Methods in Human Growth Research. Cambridge Studies in Biological and Evolutionary Anthropology No. 39. Cambridge, Cambridge University Press: 198–220.
3. Goshu, Ayele Taye and Koya, Purnachandra Rao (2014), "Derivation of Inflection Points of Nonlinear Regression Curves - Implications to Statistics", American Journal of Theoretical and Applied Statistics, Vol.2, No.6, Pages 268-272.
4. Kak, Avinash (2014) "ML, MAP, and Bayesian — The Holy Trinity of Parameter Estimation and Data Prediction", The Trinity Tutorial.

5. **Kutner, Michael H., Nachtsheim, Christopher J., Neter, John and Li, William (2013), "Applied Linear Statistical Model", Fifth Edition, New York: McGraw-Hill Companies.**
6. **Myers, Raymond H., Montgomery, Douglas C., Vining, G. Geoffrey and Robinson, Timothy. J (2010), "Generalized Linear Models: With Applications in Engineering and the Sciences, Second Edition", A John Wiley & Sons, Inc., Publication.**
7. **Panik, Michael J. (2014), " Growth Curve Modeling: Theory and Applications", John Wiley & Sons, Inc.**
8. **Ratkowsky, D.A. (1983), "Nonlinear Regression Modeling", a Unified Practical Approach, Marcel Dekker, Inc, New York.**
9. **Seber, G. A. F. and Wild, C. J., (2003), Nonlinear Regression, New York: John Wiley & Sons.**