تحديد الطريقة المثلى من بين طريقتي السمبلكس المعدلة والمضاعفات المبرمجة

ماجد عبد آفلة بخايا *   رائد محي الشاوي *

المستخلص:

يهدف هذا البحث إلى التوصل إلى الطريقة المثلى لحل مسائل النقل على الحاسبة الإلكترونية وذلك بالمقارنة بين أداء طريقة السمبلكس المعدلة وطريقة فوجل التقريبية المتبوعة بطريقة المضاعفات لغرض تحسين الحل .

وبتطبيق خوارزميات الحل للطريقتين أعلاه تم التوصل إلى استنتاج قاطع بان الطريقة الثانية هي المثلى لحل مسائل النقل على الحاسبة الإلكترونية وذلك من خلال استخدام عدد العمليات الحسابية الأساسية كمعيار للمقارنة بين الطريقتين .

ABSTRACT

The aim of this paper is to conclude the optimal method for solving the transportation problems on the computer by comparing the performance of the revised simplex method and the Vogel's approximation method followed by the method of multipliers in order to improve the solution.

In applying the solution algorithms for the above two methods, a decisive conclusion is reached , that is , the second method is considered as the optimal for solving the transportation problems on the computer through using the number of some basic arithmetic operations as a criterion for comparing the tow methods

* قسم بحوث العمليات / كلية المنصور الجامعة

* * قسم بحوث العمليات / كلية المنصور الجامعة

المقدمة

1. نموذج النقل :

افترض وجود m من مصادر التجهيز ، و n من مراكز الطلب ، وان a I تمثل عدد الوحدات المتوفرة عند مصدر التجهيز I حيث (I =1,..., m) وان bj تمثل عدد الوحدات المطلوبة من قبل مركز الطلب زحيث (j=1,...,m) . كذلك فان G_{IJ} تمثل كلفة نقل الوحدة الواحدة عبر الطريق (I , j) .

أن الهدف من نموذج النقل هو تحديد عدد الوحدات المنقولة من مصدر التجهيز I إلى مركز الطلب j بحيث يتم الحصول على اقل كلفة .

افترض إن x_{ij} تمثل عدد الوحدات المنقولة من مصدر التجهيز I إلى مركز الطلب j . في ضوء ذلك يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المسالة كما يأتي (1):

$$X_0 = \sum_{I=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_{ij} X_{ij}$$

Minimize

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{N} X_{ij} = A_i \qquad I = 1, \ldots\ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{M} X = b_j \qquad j=1, \ldots\ldots n$$

$$X_{ij} \geq 0$$

من الطرائق المستخدمة لحل نماذج النقل طريقة السمبلكس المعدلة لحل النموذج أعلاه حلا مباشرا ، وكذلك بعض الطرائق المتوفرة لحل مسائل النقل ، ومنها طريقة فوجل التقريبية المتبوعة بطريقة المضاعفات ، علما بان الطريقة تعتمد أساسا على طريقة السمبلكس الأولية (primal simplex method) الفقرات الآتية توضح خوارزمية كل من الطريقتين أعلاه وبشي من التركيز .

2. طريقة السمبلكس المعدلة (revised simplex method)

تمتاز هذه الطريقة بالمقارنة مع طريقة السمبلكس الاعتيادية بكفاءتها من الناحية الحسابية حيث أنها لا تستوجب خزن جدول السمبلكس برمته في الحاسبة ، مما يعني اقل ما يمكن من عمليات حسابية ومن ثم سيطرة ذاتية على الأخطاء الحسابية التجميعية (machine round – off errors) ، وهذا الاختصار بالعمليات الحسابية يتأتى من الاعتماد على معكوس المصفوفة الأساسي B^{-1} (Basis inverse B^{-1}) والبيانات الأصلية للمسالة .

خوارزمية طريقة السمبلكس المعدلة :

يتم تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج لكل جدول من الجداول المتعاقبة للاعتماد على معكوس المصفوفة الأساسي الحالي B^{-1} (Basis inverse B^{-1}) والبيانات الأصلية للمسالة (4) :

افرض $B_1^{-1}, B_2^{-1}, \ldots, B_i^{-1}$ تمثل معكوس المصفوفات للجداول المتعاقبة لغاية I وان $E_1, E_2, \ldots$ تمثل المصفوفات المرتبطة معها . لذا فان :

$$B_1^{-1} = E_1 I$$

$$B_2^{-1} = E_2 I B_1^{-1}$$

.

.

.

$$B_I^{-1} = E_I B_{I-1}^{-1}$$

$$B_I^{-1} = E_I E_{I-1} E_1$$

مما يعني أن :

حيث أن المصفوفة الأحادية I تمثل الحل الأساسي الابتدائي

تتلخص خطوات الخوارزمية بما يأتي :

أ. تحديد متجه المتغير الداخل PJ :

- يحسب المتجه Y :

$$Y = C_B B^{-1}$$

حيث C_B هو متجه يمثل معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف .

- لكل متجه لمتغير غير أساسي يحسب :

$$Z_K - C_K = Y\,P_K - C_K \qquad K = 1 , \ldots\ldots, N$$

بالاعتماد على ذلك يكون $J = K$ بحيث $Z_K - C_K$ يمثل اكبر معامل سالب (موجب) في حال كون دالة الهدف من نوع تعظيم (تصغير)

وعندما تكون جميع العناصر (≥ 0) $Z_K - C_K \geq$

عندئذ يكون قد تم الحصول على الحل الأمثل وهو :

$$X_B = B^{-1}\, b \qquad \text{and} \qquad z = c_B\, X_B$$

حيث B تمثل الموارد وهي من البيانات الأصلية في النموذج خلافا لذلك يتم الانتقال للخطوة التالية:

ب. تحديد متجه المتغير الخارج P_r:

- تحسب المتغيرات الأساسية الحالية كما يأتي :

$$X_B = B^{-1}\ b$$

- يحسب المتجه a^j (معاملات القيود للمتغيرات الداخلة) كما يأتي :

$$a_j = B^{-1}\ p_j$$

بالاعتماد على ذلك يكون $r = k$ حيث X_{BK}/ a_k^j اصغر قيمة، $a_k^j > 0$

ج.يحسب معكوس المصفوفة الأساسي اللاحق (next basis inverse) كالاتي :

$$B^{-1}_{NEXT} = E\, B^{-1}$$

$$B^{-1} = B^{-1}_{NEXT}$$

ثم تكرار الحسابات ابتداء من الخطوة (أ) وحتى الحصول على الحل الأمثل .

3. طريقة فوجل التقريبية وطريقة المضاعفات :

أ. طريقة فوجل التقريبية (VOGEL'S APPROXATION METHOD)

تعتبر هذه الطريقة افضل الطرائق الموجودة لإيجاد الحل الأساس الابتدائي حيث إنها تحصل على حل قريب من الحل الأمثل إن لم يكن حلا امثلا .

تشتمل خوارزمية هذه الطريقة على ما يأتي (3) :

- تحسب الغرامة (PENALTY) لكل صف وعمود وذلك بحساب الفرق بين اصغر كلفتين في الصف والعمود من جداول النقل .

- يحدد الصف أو العمود ذو الغرامة الكبرى ويتم تخصيص اكبر كمية مسموح بها من قيمة التجهيز للخلية ذات الكلفة الصغرى ثم يحذف هذا الصف أو العمود من الجدول .
- تكرر الخطوتان السابقتان إلى إن يتبقى صف واحد أو عمود واحد غير محذوف عندئذ ستكون المتغيرات الأساسية تم تحديدها وكذلك كلفة النقل قد تم احتسابها .

ب. طريقة المضاعفات (THE METHOD OF MULTIPLIERS) :

تهدف هذه الطريقة إلى تطوير الحل الأساسي الابتدائي إلى الحل الأمثل وكما يأتي (2,5) :

- يستخدم المضاعف U_I للصف I والمضاعف V_J للعمود J في جدول النقل .
- لكل متغير أساسي X_{IJ} في الحل الحالي تستخدم الصيغة التالية :

$$U_I+V_J = C_{IJ}$$

حيث تنتج مجموعة معادلات عددها (M+N-1) وبها (M+N) من المجاهيل .
لغرض حل هذه المعادلات يفرض عادة $U_I = 0$ وبذلك يصبح عدد المجاهيل (M+ N-1) عندئذ يتم حل المعادلات لإيجاد ما تبقى من قيم المضاعفات جميعا .

- تحسب كلفة جديدة لكل متغير غير أساسي كما يأتي :

$$C'_Q = C_{PQ} - U_P - V_Q$$

-يتم تحديد المتغير الداخل حسب اكبر كلفة سالبة والمتغير الخارج بموجب المسار المغلق عندئذ يتم أجراء التعديل على الحل الأساسي الابتدائي . تكرر الخطوات أعلاه إلى إن يتم التوصل إلى الحل الأمثل .

4. الجانب العلمي :

لقد تم وفي ضوء ما سبق في البناء النظري للطريقتين المذكورتين أعداد برنامج لكل طريقة منهما ، ثم طبق على الحاسبة الإلكترونية .

أن أساس المقارنة بين الخوارزميتين قد اعتمد على ما ينفذ كل برنامج من عمليات حسابية أساسية على الحاسبة الإلكترونية وكما يلي :

أ. عملية الجمع

ب.عملية الطرح

ج. عملية الاختبار (COMPUTER DECISION STATEMENT)

من الجدير بالذكر أن عملية الاختبار قد تم إدخالها ضمن أساس المقارنة وذلك لعظم دورها في البرنامجين المذكورين بسبب كثرة تكرارها أولا ، وطول الفترة الزمنية التي تستغرقها بالمقارنة مع العمليات الحسابية الأساسية ثانيا .

5. النتائج

لقد تم أجمال النتائج التي تم الحصول عليها في الأشكال البيانية (1،2،3) حيث تمثل هذه الأشكال رسومات بيانية لعدد عمليات الجمع والطرح والاختبار لكل من البرنامجين مقابل حجم مسالة النقل مقدرا بعدد الخلايا .

6. المناقشة والاستنتاج

يتبين بوضوح من النتائج المذكورة أنفا الفرق الهائل بالمتطلبات الأساسية للبرنامج (عمليات حسابية أساسية واختبارات) بين الخوارزميتين .

ويتضح هذا الفرق اكثر كلما كبر حجم نموذج النقل قيد البحث وحسب ما توضحه الرسومات البيانية (الأشكال 1،2،3) .

لذا وبناء على ذلك فان هناك استنتاج واحد حاسم في مثل هذه الحال ، وهو ان طريقة فوجل التقريبية والمتبوعة بطريقة المضاعفات تمثل الطريقة المثلى لحل مسائل النقل لكون متطلباتها الحسابية اقل بكثير من تلك الخاصة بطريقة السمبلكس المعدلة وخصوصا في حل مسائل النقل الأكبر .

المصادر (حسب الترتيب الأبجدي)

1.BUNDAY , B.D. : BASIC LINEAR PROGRAMMING , EDWARD ARNOLD – 1984 .

2.HILLIER , F.S. AND LIEBERMAN , G.J. : INTRODUCTION TO OPERATION S RESEARCH , McGraw – HILL , 5TH EDITION – 1990 .

3. PHILLIPS , DON T. RAVINDRAN , A. AND SOLBERG J.S. :OPERATIONS RESEARCH PRINCIPLES , WILEY , 2ND EDITION – 1987 .

4.TAHA, HAMDY A. : OPERATIONS RESEARCH : AN INTRODUCTION , PRENTICE HALL , 5 TH EDITION – 1996 .

5.WINSTON , W.L. : OPERATIONS RESEARCH : APPLICATIONS AND ALGORITHMS , DUXBURG PRESS , BOSTON – 1987 .

....

....

....

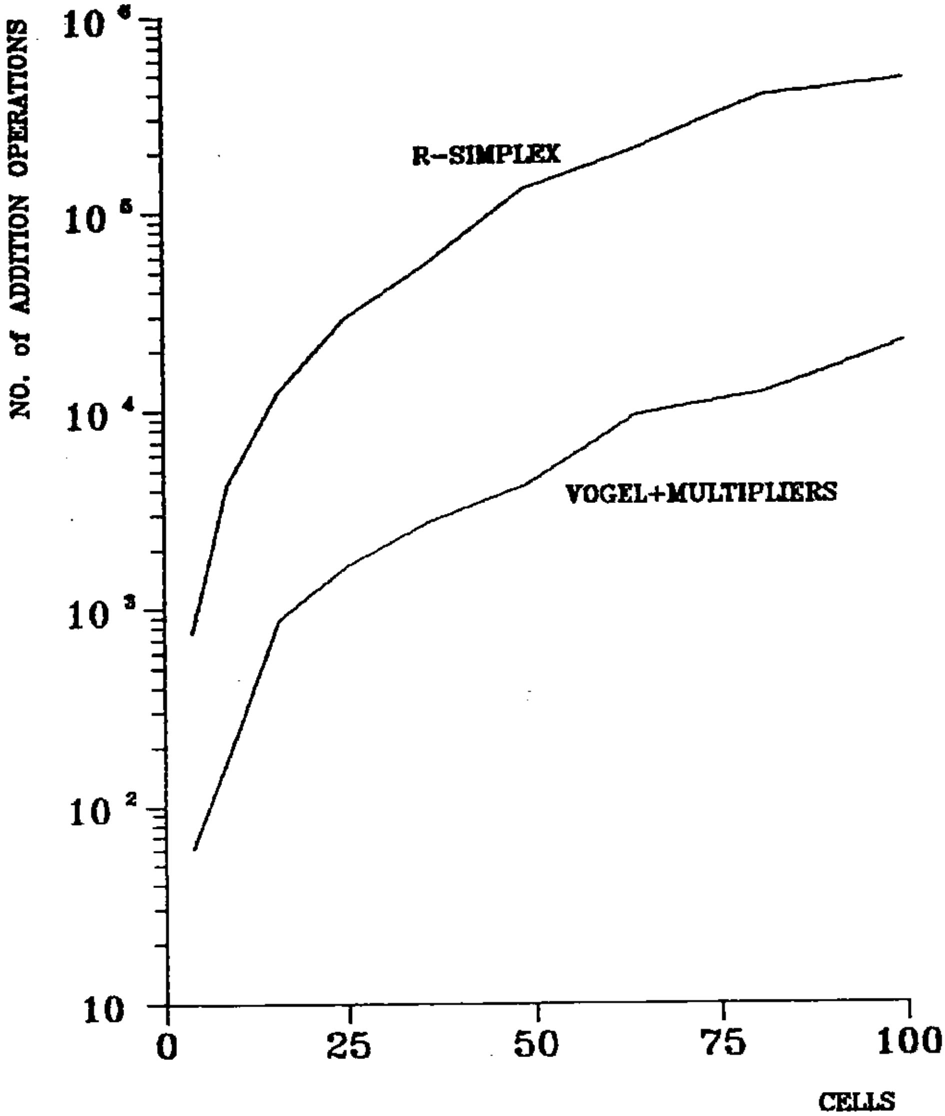

FIG. (1)

PERFORMANCE COMPARISON
ACCORDING TO ADDITION OPERATIONS

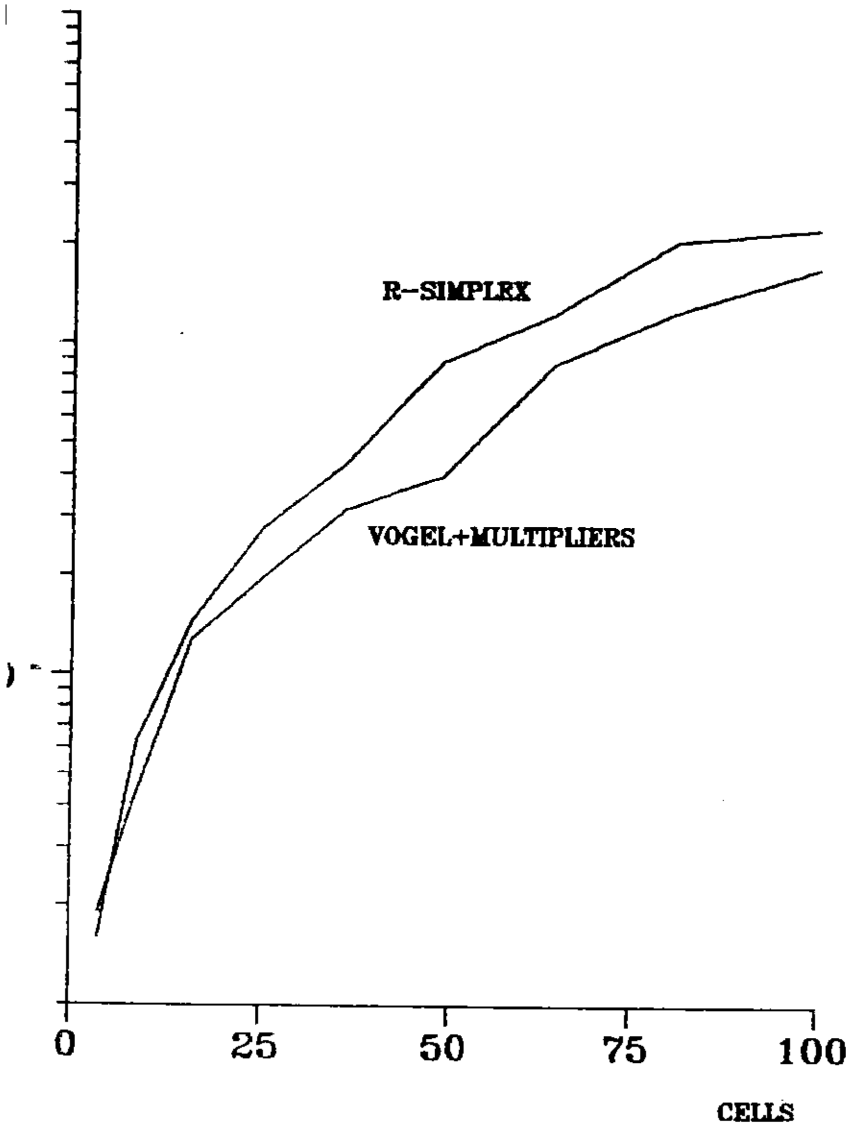

FIG. (2)

PERFORMANCE COMPARISON
ACCORDING TO SUBTRACTION OPERATIONS

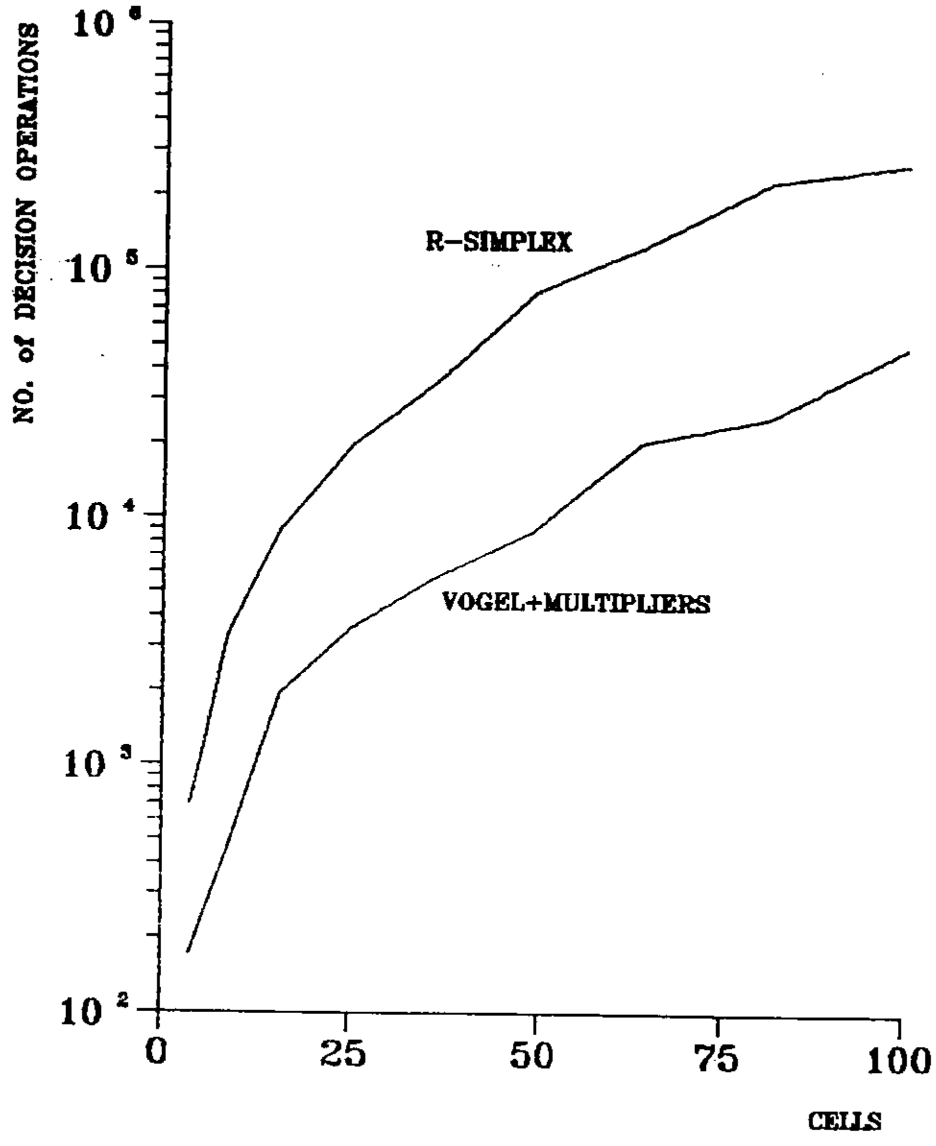

FIG. (3)

PERFORMANCE COMPARISON ACCORDING TO DECISION OPERATIONS