The Sphericity test for Multivariate Repeated Measurement Model has two Covariates

1)Abdul Hussein Saber AL-Mouel /College of Education University of Basrah
2) Huda zaki Naji / College of Science / University of Basrah

المستخلص

تناول هذا البحث دراسة نموذج من نماذج القياسات المتكررة متعددة المتغيرات للبيانات الكاملة ذات الاتجاه الواحد (One-way MRM) لتحليل التباين المشترك، كون هذا النموذج يحتوي على عاملين مرافقين (مستقلين) ، لذا يطلق على النموذج العام اسم (ANCOVA) ،
ويشترط في هذا النموذج أن يكون كلا العاملين المرافقين مستقلين زمنياً أي يقاس مرة واحدة في كل مستوى من مستويات التجربة (لا يوجد ارتباط بين المشاهدات في أي مستوى من مستويات التجربة) . حيث سنقوم بدراسة الاختبار الكروي لنموذج الدراسة ونجد معيار نسبة الترجيح الأعظم والعزم من الرتبة h لهذا المعيار، كما ونجد توسيع التقارب وغاية التوزيع لاختبار الفرضيات المتعلقة به .

المقدمة

عّرف العديد من العلماء والباحثين القياسات المتكررة وعلى مراحل مختلفة من الزمن فقد عّرفها [7] (**Vonesh&Chinchilli**) أنها مصطلح مستخدم لوصف البيانات التي تكون فيها مشاهدات متغير الاستجابة متكررة لكل وحدة تجريبية وتحت ظروف تجريبية مختلفة. أما [9] (**Keselman**) فقد بين أن القياسات المتكررة تتطلب أثنتين أو أكثر من المجموعات المستقلة بين اغلب التصاميم التجريبية المعروفة في مجموعة من البحوث المتنوعة. لكن مفهوم نماذج القياسات المتكررة يمكن تعريفه عندما تستلم وحدة تجريبية خاصة كأن تكون (شخصا أو حقلا أو حيوانا أو ما شابه ذلك) معالجات عديدة من مستويات مختلفة ويراد من الإحصائي تحليل تأثيرات هذه المعالجات في مثل هذه الحالة لا يفترض أن تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها البعض وبالتالي فان القياسات على هذه الوحدات ستكون مرتبطة عامة على الرغم من بقاء فرض الاستقلالية بين

الأخطاء في النموذج ، يدعى مثل هذا النموذج بنموذج القياسات المتكرر ، أي أن التعريف العام لنماذج القياسات المتكررة هي : مقياس لتكرار مشاهدات الوحدات التجريبية في وحدة من الزمن .

يحتوي نموذج الدراسة على عاملين مرافقين ، هما Z_1 , Z_2 (لقياس درجة عدم تجانس الوحدات التجريبية) ، هذا فضلاً عن عامل واحد بين الوحدات وعامل واحد داخل الوحدات فكل من العاملين المرافقين كمية ثابتة والعلاقة بينهما خطية ومتجانسة ، ويشترط في هذا النموذج أن يكون العاملان المرافقان مستقلين زمنياً أي يقاسا مرة واحدة في كل مستوى من مستويات التجربة (لا يوجد ارتباط بين المشاهدات في أي مستوى من مستويات التجربة):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{jk} + (Z_{1ij} - \bar{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \bar{Z}_{2..})\beta_2 + e_{ijk}$$

$(i = 1,\ldots,n_j)$ دليل للوحدة التجريبية i داخل المجموعة j

$(j = 1,\ldots,q)$ دليل إلى مستويات العامل بين الوحدات (المجموعة)

$(k = 1,\ldots,p)$ دليل إلى مستويات العامل داخل الوحدات (الزمن)

$Y_{ijk} = (Y_{ijk1},\ldots,Y_{ijkr})'$ هي قياس الاستجابة إلى العامل عند الزمن k للوحدة i داخل المجموعة j

$\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_r)'$ تمثل المتوسط العام

$\tau_j = (\tau_{j1},\ldots,\tau_{jr})'$ التأثير المضاف للعامل بين الوحدات j

$\gamma_k = (\gamma_{k1},\ldots,\gamma_{kr})'$ التأثير المضاف للعامل داخل الوحدات k

$(\tau\gamma)_{jk} = \left((\tau\gamma)_{jk1},\ldots,(\tau\gamma)_{jkr}\right)'$ التأثير المضاف للتفاعل بين عامل بين الوحدات وعامل داخل الوحدات والتي تمثل المجموعات والزمن على التوالي

$Z_{1ij} = (Z_{1ij1},\ldots,Z_{1ijr})'$ قيمة للعامل Z_1 في الوحدة i داخل المجموعة j

$\bar{Z}_{1..} = (\bar{Z}_{1..1},\ldots,\bar{Z}_{1..r})'$ المتوسط للعامل Z_1 في كل الوحدات التجريبية

$\beta_1 = (\beta_{11},\ldots,\beta_{1r})'$ الميل للعامل Z_1

$Z_{2ij} = (Z_{2ij1},\ldots,Z_{2ijr})'$ قيمة للعامل Z_2 في الوحدة i داخل المجموعة j

$\bar{Z}_{2..} = (\bar{Z}_{2..1},\ldots,\bar{Z}_{2..r})'$ المتوسط للعامل Z_2 في كل الوحدات التجريبية

$\beta_2 = (\beta_{21},\ldots,\beta_{2r})'$ الميل للعامل Z_2

$e_{ijk} = (e_{ijk1},\ldots,e_{ijkr})'$ الخطأ العشوائي عند الزمن k للوحدة i داخل المجموعة j

(1-1) الاختبار الكروي : *The sphericity test*

تنص الفرضية الكروية: إذا كانت التباينات بين كل زوج من الوحدات العائدة لمجموعات مختلفة (أي أن التباينات الثابتة) فضلاً عن التباين المشترك بين كل زوج من الوحدات المختلفة لمجموعات مختلفة تكون مساوية للصفر، أي انه لا توجد ارتباطات داخل وحدات المجموعة الواحدة ففي حالة فشل مثل هذه الفرضية فان طريقة تحليل التباين المتعدد المتغيرات ستكون هي الطريقة المناسبة كونها لا تعتمد على الفرضية الكروية ، لذلك فإن التحليل المتعدد المتغيرات يسمح أن تكون مصفوفة التباين والتباين المشترك ذات شكل عام ، أي انه لا يفترض أن تكون التباينات لجميع المجموعات متجانسة ولا التباينات المشتركة متماثلة تماثلاً مركباً (أي أن التباينات المشتركة التي تقع خارج القطر الرئيسي بين المشاهدات لها القيمة نفسها أي أن مصفوفة المثلث العلوي والمثلث السفلي تكون متماثلة) ولا التباين المشترك ثابت أيضا.

(1-2) فرضية الاختبار الكروي :– *Hypothesis of the sphericity test*

سنركز في هذا البند على الاختبار الكروي ، إذ تنص فرضية العدم أن مصفوفة التباين المشترك لمصفوفة عشوائية من الدرجة r×p

$$\underset{r\times p}{Y_{ij}} = (Y_{ij1},\ldots,Y_{ijp}) \qquad , Cov(Y'_{ij1},\ldots,Y'_{ijp})' = \sum$$

$$i = 1,\ldots,n_j \qquad , j = 1,\ldots,q$$

هي من النوع Hعامة المصفوفةمن الدرجة $pr \times pr$ يقال أنها من النوع H إذا حققت الشرط التالي :

$$\Sigma = I_p \otimes V_1 + (j_p \otimes \alpha' + \alpha \otimes j'_p) \otimes V_2 = \begin{bmatrix} V_1 + 2\alpha_1 V_2 & (\alpha_1+\alpha_2)V_2 & \cdots & (\alpha_1+\alpha_p)V_2 \\ (\alpha_2+\alpha_1)V_2 & V_1 + 2\alpha_2 V_2 & \cdots & (\alpha_2+\alpha_p)V_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\alpha_p+\alpha_1)V_2 & (\alpha_p+\alpha_2)V_2 & \cdots & V_1 + 2\alpha_p V_2 \end{bmatrix}$$

$$\ldots(1-1)$$

حيث $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)'$ وكل من V_1 , V_2 مصفوفات قطرية .

أي أن فرضية العدم تكون بالشكل

$$H_0 : \Sigma = I_p \otimes \Sigma_e \qquad \ldots(1-2)$$

حيث I_p : ترمز إلى مصفوفة أحادية من الدرجة p.

N_r : ترمز إلى التوزيع الطبيعي المتعدد للمتغيرات .

في الحقيقة أن تحليل التباين (ANCOVA) أعلاه يعتمد على مصفوفة التباين نوع H للمشاهدات Y_{ij} .

$$\begin{aligned}(U' \otimes I_r)\Sigma(U \otimes I_r) &= (U' \otimes I_r)(I_p \otimes \Sigma_e + j_p j'_p \otimes \underline{O})(U \otimes I_r) \\ &= U'I_p U \otimes I_p \Sigma_e I_r + U'j_p j'_p U \otimes I_r \underline{O} I_r \\ &= U'U \otimes \Sigma_e + (U'j_p)(j'_p U) \otimes \underline{O} \qquad \ldots(1-3) \\ &= U'U \otimes \Sigma_e \\ &= I_{p-1} \otimes \Sigma_e\end{aligned}$$

لأنّ $U'j_p = j'_p U = 0$ من هذا يتبين فإذا كانت ∑ من نوع H فإن أي (p-1) من مجموع المقارنة المتعامدة من المشاهدات بالشكل $Y_{ij}U$ برتبة (p-1) ، j=1,…,q , n_j ...,i=1 تمتلك مصفوفة تباين مشترك Σ^*

$$H_0 : \Sigma^* = I_{p-1} \otimes V$$

يقال في مثل هذه الحالة أن المشاهدات المحولة كلها $Y_{ij}U$ $\quad i = 1, \cdots, n_l \quad , j = 1, \cdots, q$

تمتلك توزيعا كرويا . إذن فمسألة الاختبار لفرضية العدم (1-2) H_0 التي تعتمد على المشاهدات Y_{ij} تم تحويلها إلى مسالة أختبار فرضية العدم

$$H_0 : \Sigma^* = I_{p-1} \otimes V \qquad \ldots(1-4)$$

التي تعتمد على مجموعة المشاهدات المحولة أي أن الفرضية أعلاه تعتمد على $Y^*_{ij(2)} = Y_{ij}U^*$

حيث $i = 1, \cdots, n_j \quad , j = 1, \ldots q$

(1-3) معيار نسبة الترجيح للاختبار الكروي :–

إن الشكل القانوني لفرضية العدم هي علاقة بين الفرضيات :

H_{04} : Σ^* هي مصفوفة قطرية أو متجهات المركبات Y_{ij} تكون مستقلة .

H_{05} : العناصر القطرية في المصفوفة Σ^* تكون متساوية أو التباينات بين متجهات المركبات المستقلة تكون متساوية عندما تكون Σ^* مصفوفة قطرية .

نجد من النتيجة المعطاة في [4] أن معيار نسبة الترجيح λ للفرضية H_0 هو حاصل ضرب المعيارين λ_1 و λ_2 حيث λ_1 هو معيار نسبة الترجيح للفرضية Σ^* هي مصفوفة قطرية ، بينما λ_2 هو معيار نسبة الترجيح للفرضية . أن العناصر القطرية لـ Σ^* المعطاة تكون متساوية عندما تكون Σ^* مصفوفة قطرية .
ليكن

$$A=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}\begin{bmatrix}(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\bar{Y}^*_{j(2)}-2\bar{Y}^*_{ij}-2\bar{Y}^*_{j}+\beta^*_1Z^*_{1ij}+\beta^*_2Z^*_{2ij})\\(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\bar{Y}^*_{j(2)}-2\bar{Y}^*_{ij}-2\bar{Y}^*_{j}+\beta^*_1Z^*_{1ij}+\beta^*_2Z^*_{2ij})\end{bmatrix}\qquad(1-5)$$

وبتجزئة المصفوفة A كالأتي :

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1,p-1}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2,p-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\A_{p-1,1}&A_{p-1,2}&\cdots&A_{p-1,p-1}\end{bmatrix}\quad;\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}&\cdots&\Sigma_{1,p-1}\\&\Sigma_{22}&\cdots&\Sigma_{2,p-1}\\&&\ddots&\vdots\\&&&\Sigma_{p-1,p-1}\end{bmatrix}$$

حيث A_{ll} : هي مصفوفة برتبة r×r ولكل $l=1,\dots,p-1$.

من [4] بما أن مجموعة المتجهات $Y^*_{ij}=(Y^*_{ij1},\dots,Y^*_{ijp})$ تتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات أي أن $\vec{Y}^*_{ij}\sim N_{p\times r}(\mu,\Sigma)$ فإن مجموعة المتجهات لمجموعة المشاهدات المحولة الثانية $\vec{Y}^*_{ij(2)}\sim N_{r(p-1)}(\mu,\Sigma)$ وبما أن كل متجه يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات فان دالة الترجيح لهذه المتجهات هي كالآتي :

$$L(\mu,\Sigma)=\prod_{l=1}^{p-1}L_l(\mu^{(l)},\Sigma_{ll})$$

$$L_i(\mu^{(l)},\Sigma_{ii})=\prod_{j=1}^{q}\prod_{i=1}^{n_j}\frac{1}{(2\pi)^{\frac{r}{2}}|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\mu)\Sigma^{-1}(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\mu)'}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{nr}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\mu)(\vec{Y}^*_{ij(2)}-\mu)'}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{nr}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{nr}{2}}\qquad,n=\sum_{j=1}^{q}n_j$$

$$\therefore L(\mu,\Sigma)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m(p-1)}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{m(p-1)}{2}}$$

$$Max \quad \mu,\Sigma_0\, L(\mu,\Sigma_0)=\prod_{l=1}^{p-1}\max \quad L_l(\mu^{(l)},\Sigma_{ll})$$

$$\therefore Max \quad L(\mu,\Sigma_0)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m(p-1)}{2}}\prod_{l=1}^{p-1}|\Sigma_{ll}|^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{m(p-1)}{2}}$$

وبما أن λ_1 هو معيار نسبة الترجيح لاختبار الفرضية H_{01} :- التي تنص أن مصفوفة التباين والتباين المشترك قطرية وبعبارة أخرى

$$H_{01}:\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \Sigma_{22} & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_{ll}\end{bmatrix}$$

فإن

$$\lambda_1=\frac{\max_{\mu,\Sigma_0} L(\mu,\Sigma_0)}{\max_{\mu,\Sigma} L(\mu,\Sigma)}$$

ولأنّ

$$\Sigma=\frac{A}{n} \quad ,|\Sigma|=\frac{|A|}{n^{r(p-1)}}$$

$$\lambda_1=\frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{m(p-1)}{2}}\prod_{l=1}^{p-1}|\Sigma_{ll}|^{\frac{n}{3}}}e^{-\frac{m(p-1)}{2}}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{m(p-1)}{2}}|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{m(p-1)}{2}}}$$

$$\therefore \lambda_1=\frac{|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}{\prod_{l=1}^{p-1}|\Sigma_{ll}|^{\frac{n}{2}}}$$

بما أن

$$\Sigma_{ll}=\frac{A_{ll}}{n} \qquad \therefore |\Sigma_{ll}|=\frac{|A|}{n^r}$$

$$\therefore \lambda_1=\frac{|A|^{\frac{n}{2}}}{\prod_{l=1}^{p-1}|A_{ll}|^{\frac{n}{2}}} \qquad (1-6)$$

والآن بعد أن وجدنا معيار نسبة الترجيح لاختبار الفرضية الأولى نجد λ_2 و هو معيار نسبة الترجيح لاختبار الفرضية التي تنص أن العناصر القطرية في المصفوفة تكون متساوية ، أي أن $Y^*_{ij2},\ldots,Y^*_{ijp}$ مستقلة ويمكن التعبير عنها بالصيغة الآتية :

$$H_{02}: \quad \Sigma_{11}=\Sigma_{22}=\cdots=\Sigma_{ll}$$

$$\lambda_2 = \frac{\max \quad _{\mu,\Sigma_0} L(\mu,\Sigma_0)}{\max \quad _{\mu,\Sigma} L(\mu,\Sigma)}$$

$$A_{ll} = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}(\vec{Y}^*_{ij(2)} - \mu)(\vec{Y}^*_{ij(2)} - \mu)'$$

$$,l = 1,\ldots. \quad p-1$$

$$B = \sum_{l=1}^{p-1} A_{ll}$$

$$\lambda_2 = \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r\,n(p-1)}{2}}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}} \prod_{l=1}^{p-1} |\Sigma_{ll}|^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r\,n(p-1)}{2}}} \qquad \lambda_2 = \frac{\prod_{l=1}^{p-1} |\Sigma_{ll}|^{\frac{n}{2}}}{|\Sigma|^{\frac{n}{2}}}$$

$$\lambda_2 = \frac{\prod_{l=1}^{p-1} |A_{ll}|^{\frac{n}{2}}}{|B|^{\frac{n\,(p-1)}{2}}} \times (p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}} \qquad \cdots(1-7)$$

فان معيار نسبة الترجيح λ للفرضية H_0 حسب [4] هو حاصل ضرب المعيارين λ_2,λ_1 أذن .

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\lambda = \frac{|A|^{\frac{n}{2}}}{(|B| \big/ (p-1)^r)^{\frac{n(p-1)}{2}}} \qquad \ldots(1-8)$$

(1-4) العزم من الرتبة *h* لمعيار الاختبار الكروي :-

يصعب على الإحصائي إيجاد التوزيع المضبوط لمعيار الأختبار الكروي λ عامة ، لكن بالإمكان إيجاد ذلك العزم بسهولة عندما تكون فرضية العدم المختبرة صحيحة [8] ، وبذلك يمكن تحديد توزيعه بإيجاد عزمه . لذلك يمكن أن نحصل على العزم h^{th} لـ λ_1 والعزم h^{th} لـ λ_2 وذلك لان $\lambda = \lambda_1\lambda_2$ وبذلك نستطيع الحصول على العزم h^{th} للمعيار λ وكما مبين في المعادلة أدناه :

$$E(\lambda^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}}]^h \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q+nh-j+1}{2})}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})} \times \frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q)-j+1)}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q+nh)-j+1)}{2})}$$

قضيــة ***Proposition*** 2 :-

العزم h^{th} للمعيار λ مبين بالشكل الأتي:-

$$E(\lambda^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}}]^h \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q+nh-j+1}{2})}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})} \times \frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q)-j+1)}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q+nh)-j+1)}{2})}$$

عندما λ ، كما مبين بالمعادلة (8-1)

البرهـــان: بما أن دالة الكثافة الاحتمالية لـ R هي :

$$P_R(R)=\frac{[2^{\frac{r(n-q)}{2}}\pi^{\frac{r(r-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})]^{p-1}|R|^{\frac{n-q-m-1}{2}}}{2^{\frac{m(n-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}$$

$$E(|R|^h)=\frac{[2^{\frac{r(n-q)}{2}}\pi^{\frac{r(r-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})]^{p-1}}{2^{\frac{m(n-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})2^{\frac{m(n+2h-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n+2h-q-j+1}{2})}\times$$

$$\int\cdots\int 2^{\frac{m(n+2h-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n+2h-q-j+1}{2})|R|^{\frac{n-q+2h-m-1}{2}}\,d(R)$$

$$=[\frac{2^{\frac{r(n-q)}{2}}\pi^{\frac{r(r-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}{2^{\frac{r(n+2h-q)}{2}}\pi^{\frac{r(r-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n+2h-q-j+1}{2})}]^{p-1}\times\frac{2^{\frac{m(n+2h-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+2h+1}{2})}{2^{\frac{m(n-q)}{2}}\pi^{\frac{m(m-1)}{4}}\prod_{j=1}^{p-1}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q+2h-j+1}{2})(\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2}))^{p-1}}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})(\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n-q+2h-j+1}{2}))^{p-1}}$$

والآن بما أن

$$\lambda_1=\frac{|A|^{\frac{n}{2}}}{\prod_{l=1}^{p-1}|A_{ll}|^{\frac{n}{2}}}=|R|^{\frac{n}{2}}\quad ,n=\sum_{j=1}^{q}n_j$$

إذن

$$E(\lambda_1^h)=E(|R|^{\frac{nh}{2}})$$

نستنتج من ذلك أن :

$$E(\lambda_1^h)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n(1+h)-q-j+1}{2})\,(\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2}))^{p-1}}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})\,(\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n(1+h)-q-j+1}{2}))^{p-1}}$$

وبما إن

$$\lambda_2 = [(p-1)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}}][\frac{\prod_{l=1}^{p-1}|A_{ll}|^{\frac{n}{2}}}{|B|^{\frac{n(p-1)}{2}}}]$$

وكما بينا سابقاً أن λ_2 تعتمد على $A_{11},\dots,A_{p-1,p-1}$ ، ويتوزع كل منها توزيعاً مستقلاً عن الآخر بموجب توزيع وشرت المتعدد المتغيرات . وان دالة الكثافة الاحتمالية لـ A هي:

وان كل من $A_{ll} \sim W_r(n-q, V_i)$ إذن :

$$E(\lambda_2^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h E[\prod_{l=1}^{p-1}|A_{ll}|^{\frac{nh}{2}} (|B|^{\frac{-nh}{2}})^{p-1}]$$

$$= [(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h \int\cdots\int \prod_{l=1}^{p-1}|A_{ll}|^{\frac{nh}{2}} [|B|^{\frac{-nh}{2}}]^{p-1} \prod_{l=1}^{p-1} w(A_{ll/V_i}, n-q)dB$$

حيث $dB = dA_{11}\dots dA_{ll}$

$$E(\lambda_2^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h \prod_{l=1}^{p-1} \frac{2^{\frac{r(n-q)}{2}} \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\frac{n+nh-q-j+1}{2})}{2^{\frac{r(n-q)}{2}} \pi^{\frac{r(r-1)}{4}} \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}$$

$$\times \int\cdots\int (|B|^{\frac{-nh}{2}})^{p-1} \prod_{l=1}^{p-1} w(A_{ll}/V_i, n+nh-q)$$

$$E(\lambda_2^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h \prod_{l=1}^{p-1} [\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n-q-j+nh+1}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}][\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{((n-q)-j+1)(p-1)}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{((n-q+nh)-j+1)(p-1)}{2})}]$$

$$E(\lambda_2^h) = [(p-1)^{\frac{r\,n(p-1)}{2}}]^h [\frac{\Gamma_r(\frac{n-q+nh}{2})}{\Gamma_r(\frac{n-q}{2})}]^{p-1} [\frac{\Gamma_r(\frac{(n-q)(p-1)}{2})}{\Gamma_r(\frac{(n-q+nh)(p-1)}{2})}] \qquad \dots(1\text{-}9)$$

$$E(\lambda^h) = E(\lambda_1^h)E(\lambda_2^h)$$

$$= [(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h \frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{(n-q+nh)-j+1}{2})}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})} \times \frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\frac{(p-1)((n-q)-j+1)}{2}}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\frac{(p-1)((n-q+nh)-j+1)}{2}}$$

…(1-10)

(1-5) توسيع التقارب لمعيار الاختبار الكروي :-

يكون التوزيع المضبوط لاختبارات نسبة الترجيح في أغلب الحالات معقداً لآي من الاستخدام التطبيقي وخاصة في التحليل المتعدد المتغيرات [4]. لذلك بالأمكان استخدام توسيع التقارب الذي أشار إليه [6] للحصول على دالة التوزيع لأي درجة من الدقة. وهذا التقريب مطبق في العديد من حالات الاختبار، إذ بالأمكان استخدام

هذه الطريقة عندما يكون معيار نسبة الترجيح λ يمتلك عزماً من الرتبة h . من خلال ذلك يمكن تطبيق النظرية العامة لتوسيع التقارب في [4] فكل متغير عشوائي يمتلك عزماً من الرتبة h بدالة كاما محددة ويتوزع توزيع بيتا المتعدد المتغيرات وبالأمكان إيجاد توسيع التقارب لهذا المتغير من خلال النظرية العامة لتوسيع التقارب وذلك بوضع عزم المتغير من الرتبة h بالشكل الذي يماثل العلاقة (1) في (8-5-1) [4] للحصول على توسيع التقارب . ويتضح من العلاقة (1-10) أنه يمكن كتابة العزم من الرتبة h لمعيار الاختبار الكروي وبالشكل الأتي:-

$$E(\lambda^h)=\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\frac{(p-1)(n-q-j+1)}{2}}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\frac{n-q-j+1}{2}}[(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h\,\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\frac{n-q-j+nh+1}{2}}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma\frac{(p-1)(n-q+nh)}{2}}$$

إذن

$$E(\lambda^h)=[(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h\,\frac{\Gamma_m(\frac{n+nh-q}{2})}{\Gamma_m(\frac{n-q}{2})}\times\frac{\Gamma_r(\frac{(p-1)(n-q)}{2})}{\Gamma_r(\frac{(p-1)(n+nh-q)}{2})}$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q)-j+1)}{2})}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{n-q-j+1}{2})}[(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h\,\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{(n-q+nh)-j+1}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q+nh)-j+1)}{2})}$$

$$=K[(p-1)^{\frac{r\,n\,(p-1)}{2}}]^h\,\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(\frac{(n-q+nh)-j+1}{2})}{\prod_{j=1}^{r}\Gamma(\frac{(p-1)((n-q+nh)-j+1)}{2})}$$

حيث K ثابت يجب أن لا يعتمد على h بحيث $E(\lambda^0)=1$ و يتبين من هذا أن $E(\lambda^h)$ يماثل العلاقة (1) في (8-5-1) من [4] وهو إن

$$a=m\,,\,x_k=\frac{1}{2}n\,,\,\xi_k=\frac{1}{2}(1-q-k)\qquad,k=1,\ldots,m$$

$$b=r\,,\,y_j=\frac{1}{2}n(p-1)\,,\eta_j=\frac{1}{2}(1-(p-1)q-j)\qquad,j=1,\ldots,r$$

$$f=-2[\sum_{k=1}^{a}\xi_k-\sum_{j=1}^{b}\eta_j-\frac{1}{2}(a-b)]$$

$$=-2[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2}(1-q-k)-\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{2}(1-(p-1)q-j)-\frac{1}{2}(m-r)]$$

$$=-m(1-q)+\sum_{k=1}^{m}k+r-r(p-1)q-\sum_{j=1}^{r}j+m-r$$

$$=-m+mq+\sum_{k=1}^{m}k+r-mq-\sum_{j=1}^{r}j+m-r$$

$$=\sum_{k=1}^{m}k-\sum_{j=1}^{r}j$$

$$= \frac{1}{2}[m(m+1) - r(r+1)] \qquad \ldots(1\text{-}11)$$

وباستخدام النظرية العامة لتوسيع التقارب المشار إليها سابقاً يمكن إيجاد توزيع $-2\rho\log\lambda$ وبالإمكان تطبيق نظرية توسيع التقارب لكل متغير عشوائي يمتلك عزماً محدداً بدالة كاما ، ويتوزع توزيع بيتا المتعدد المتغيرات فأنه يمكن تطبيق هذه النظرية على معيار نسبة الترجيح الأعظم . نلاحظ أن العزم h^{th} لمعيار نسبة الترجيح λ هو حاصل ضرب متغيرات تتوزع توزيع بيتا المتعدد المتغيرات مرفوعة إلى قوى فأن لكل h يمتلك دالة كاما موجودة (محددة) ، حيث نستخدم الصياغة الموسعة في دالة كاما حيث $R_{m+1}(x) = o(x^{-(m+1)})$ ،
ونستخدم متعددة حدود برنولي $B_r(h)$ من الدرجة r=2

$$\beta_k = \frac{1}{2}n(1-\rho) \quad , \varepsilon_j = \frac{1}{2}n(p-1)(1-\rho)$$

حيث أن

$$h = \beta_k + \xi_k \quad , \varepsilon_j + \eta_j$$

نختار K بحيث

$$K = E(\lambda^0) = 1$$

بما أن $B_2(h) = h^2 - h + \frac{1}{6}$ متعددة حدود برنولي من الدرجة r=2

$$\beta_k = \frac{1}{2}n(1-\rho) \quad , \varepsilon_j = \frac{1}{2}n(p-1)(1-\rho)$$

ومن العلاقة (11) في [4]

$$w_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r(r+1)}\{\sum_k \frac{B_{r+1}(\beta_k + \xi_k)}{(\rho x_k)^r} - \sum_j \frac{B_{r+1}(\varepsilon_j + \eta_j)}{(\rho y_j)^r}\}$$

$$if \qquad r = 1$$

$$\therefore\ w_1 = \frac{1}{2}\{\sum_{k=1}^{m} \frac{B_2(\beta_k + \xi_k)}{\frac{n\rho}{2}} - \sum_{j=1}^{r} \frac{B_2(\varepsilon_j + \eta_j)}{\frac{n\rho(p-1)}{2}}\}$$

$$w_1 = \frac{1}{2\rho}\{-(1-\rho)f - (\frac{n}{2})^{-1}[\frac{1}{3}m - m(m+1)q - \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{1}{3}r(p-1)^{-1}$$
$$+ r(r+1)\,q + \frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)(p-1)^{-1}]\}$$

$$\rho = 1 - f^{-1}\{-(\frac{n}{2})^{-1}[\frac{1}{3}m - m\ (m+1)\,q$$
$$-\frac{1}{6}m\,(m+1)\,(2m+1) - \frac{1}{3}r\,(p-1)^{-1} + r\,(r+1)\,q$$
$$+\frac{1}{6}r\,(r+1)\,(2r+1)\,(p-1)^{-1}]\} \qquad \ldots(1-12)$$

لذلك عندما تكون فرضية العدم في العلاقة (1-4) صحيحة فإن دالة التوزيع لـ $-2\rho\log\lambda$ بالإمكان توسيعها لأكبر حجم n كونها تتوزع χ_f^2 ، بمعنى آخر عندما نأخذ غاية التوزيع لـ $-2\rho\log\lambda$ لأكبر n فإنها تتوزع توزيع χ^2 بدرجة حرية f [1]. حيث f و ρ كما موضح بالعلاقتين (1-11) و (1-12) أعلاه .

(1-6) التجربة:

أجريت تجربة حول دراسة تأثير بعض العوامل (الداخلية والخارجية) على أوزان عدد من الأغنام , من خلال قياس أوزانها التي توفرت ضمن التجربة لفترة خمس سنوات وعلى أربعة فصول لكل سنة فقد أخذت هذه التجربة من قسم الثروة الحيوانية في جامعة البصرة كلية الزراعة . وقد قمنا بتصميم هذه التجربة وفق نموذج القياسات المتكررة المتعدد المتغيرات ذي اتجاه واحد مع الأخذ بالحسبان وجود تأثير العاملين المرافقين (المستقلين). وبموجب الصيغة الرياضية للنموذج المدروس وبتطبيق النموذج أعلاه على التجربة نحصل:

i =1,2,3

j = 1,2,3,4,5

k = 1,2,3,4,5

r = 1,2,3,4

علماً أن:

$$\sum_{j=1}^{5}\tau_j = 0$$

$$\sum_{k=1}^{4}\gamma_k = 0$$

$$\sum_{j=1}^{5}(\tau\lambda)_{jk} = 0 \qquad \forall k = 1,2,3,4$$

$$\sum_{k=1}^{4}(\tau\gamma)_{jk} = 0 \qquad \forall j = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{i=1}^{3}Z_{1ij} = \sum_{i=1}^{3}Z_{2ij} = 0 \qquad \forall j = 1,2,3,4,5$$

$$\sum_{j=1}^{5}Z_{1ij} = \sum_{j=1}^{5}Z_{2ij} = 0 \qquad \forall i = 1,2,3$$

$$SSG = \begin{bmatrix} 512.3162 & 274.5667 & 301.6237 & 151.4273 \\ 274.5667 & 147.9452 & 159.5022 & 81.8062 \\ 301.6237 & 159.5022 & 343.4215 & 85.8509 \\ 151.4273 & 81.8062 & 84.8509 & 45.3486 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)} = \begin{bmatrix} 5.9306 & 4.6682 & 4.3215 & 3.8921 \\ 4.6682 & 3.6006 & 3.2933 & 2.9437 \\ 4.3215 & 3.2933 & 2.9953 & 2.6605 \\ 3.8921 & 2.9437 & 2.6605 & 2.3598 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Z_1} = \begin{bmatrix} -2.6246 & -0.3412 & 0.3942 & 1.0636 \\ -0.3412 & -0.2161 & -0.1612 & -0.1395 \\ 0.3942 & -0.1612 & -0.3472 & -0.5040 \\ 1.0636 & -0.1395 & -0.5040 & -0.8805 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Z_2} = \begin{bmatrix} -1.4605 & -0.8213 & -0.5840 & -0.4258 \\ -0.8213 & -0.4709 & -0.3398 & -0.2540 \\ -0.5840 & -0.3398 & -0.2482 & -0.1886 \\ -0.4258 & -0.2540 & -0.1886 & -0.1476 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)} = \begin{bmatrix} 5.9306 & 4.6682 & 4.3215 & 3.8921 \\ 4.6682 & 3.6006 & 3.2933 & 2.9437 \\ 4.3215 & 3.2933 & 2.9953 & 2.6605 \\ 3.8921 & 2.9437 & 2.6605 & 2.3598 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Time} = \begin{bmatrix} 5.6279 & 0.0064 & 0.0086 & 0.0384 \\ 0.0064 & 0 & 0.0021 & 0 \\ 0.0086 & 0.0021 & 1.6673 & 0.0027 \\ 0.0384 & 0 & 0.0027 & 0.0003 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Time \times Unit(Group)} = \begin{bmatrix} 4.9322 & 0.7164 & 0.8004 & 0.7167 \\ 0.7164 & 0.4317 & 0.5157 & 0.4334 \\ 0.8004 & 0.5157 & 1.5332 & 0.5175 \\ 0.7167 & 0.4334 & 0.5175 & 0.4352 \end{bmatrix}$$

$$SS_{Time \times Group} = \begin{bmatrix} 1.1233 & 0 & 0 & 0.0061 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2173 & 0 \\ 0.0061 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وقد قمنا بإيجاد الاختبار الكروي للنموذج المدروس كالأتي :

لغرض احتساب معيار الاختبار الكروي لاختبار الفرضية :

$$H_0 : \Sigma_{11} = \Sigma_{22} = \Sigma_{33} = \Sigma_{44}$$

نقوم بإيجاد مصفوفة التباين والتباين المشترك بين المشاهدات لأوزان الأغنام ، وعند احتساب معيار نسبة الترجيح لاختبار الفرضية أعلاه نجد ρ وفق المعادلة (12-1) هو :

$$\rho = -0.7217$$

كذلك عند احتساب f على وفق المعادلة (1-11) نجد إن :

$$f = 126$$

إذن يتضح مما سبق أن :

$$-2\rho \log\lambda = 110.765 \sim \chi^2(126)$$

$$\chi^2_{0.05}(126) = 152.915$$

ونجد عند مقارنة قيمة χ^2 المحسوبة مع القيمة الجدولية عند درجة حرية 126 ومستوى احتمال 0.05 أن المحسوبة أقل من الجدولية إذن نقبل فرضية العدم ، أي أن المصفوفات القطاعية القطرية متساوية.

أوزان الأغنام مقاسة بالكيلو غرام (بيانات التجربة) بيانات أصلية لمدة خمس سنوات وعلى أربعة فصول لكل سنة

station	units	First year				Second year				Third year				Fourth year				Fifth year			
		Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn
1	1	33.21	35.94	37.21	37.68	37.92	38.06	38.65	39.2	39.5	39.78	39.78	40.12	40.51	40.78	41.06	41.11	41.33	41.44	41.61	41.8
	2	3.45	3.63	3.66	3.69	3.72	3.74	3.76	3.78	3.8	3.83	3.83	3.85	3.86	3.87	3.9	3.9	3.91	3.92	3.92	3.94
	3	17.22	17.94	18.06	18.14	18.25	18.27	18.33	18.4	18.44	18.47	18.48	18.53	18.58	18.59	18.62	18.62	18.66	18.69	18.74	18.78
2	1	41.86	41.97	42.19	42.37	42.67	42.71	42.18	42.93	43.12	43.34	43.36	43.63	43.83	44	44.16	44.2	44.32	44.52	44.62	44.7
	2	3.94	3.95	3.96	3.97	3.98	3.99	3.99	4	4.01	4.01	4.01	4.03	4.03	4.03	4.04	4.04	4.05	4.05	4.06	4.07
	3	18.78	18.82	18.85	18.87	18.89	18.89	18.91	18.93	18.96	18.989	18.98	19.03	19.06	19.07	19.09	19.09	19.11	19.12	19.14	19.17
3	1	44.77	44.92	45.06	45.22	45.4	45.43	45.56	45.68	45.86	46.01	46.03	46.13	46.22	46.32	46.47	46.48	46.58	46.69	46.75	46.85
	2	4.07	4.08	4.09	4.1	4.11	4.11	4.12	4.12	4.13	4.14	4.14	4.14	4.15	4.16	4.16	4.16	4.17	4.17	4.18	4.19
	3	19.18	19.2	19.23	19.24	19.26	19.26	19.31	19.33	19.36	19.38	19.38	19.39	19.4	19.42	19.43	19.44	19.47	19.05	19.53	19.55
4	1	46.89	47.32	47.6	47.71	47.8	47.85	48.01	48.1	48.27	48.35	48.4	48.55	48.79	48.95	49.08	49.08	49.39	49.49	49.59	49.7
	2	4.19	4.19	4.21	4.21	4.23	4.23	4.24	4.25	4.25	4.25	4.27	4.27	4.27	4.28	4.28	4.28	4.29	4.31	4.31	4.32
	3	19.55	19.57	19.59	19.61	19.65	19.65	19.66	19.69	19.71	19.73	19.74	19.77	19.79	19.82	19.84	19.84	19.88	19.94	19.97	19.99
5	1	49.73	49.95	50.18	50.37	50.71	50.8	51.13	51.29	51.45	51.74	51.76	52.18	52.5	52.85	53.14	53.15	53.97	54.44	55.6	58.43
	2	4.33	4.34	4.34	4.36	4.38	4.38	4.4	4.42	4.43	4.45	4.45	4.46	4.48	4.49	4.52	4.52	4.56	4.6	4.68	4.8
	3	19.99	20.03	20.05	20.07	20.08	20.09	20.12	20.15	20.19	20.21	20.22	20.29	20.36	20.39	20.45	20.48	20.54	20.7	20.81	21.43

مصفوفة هلمرت

0.2236	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**	**0.2236**
0.7071	**- 0.7071**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.4082	**0.4082**	**-0. 8164**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.2886	**0.2886**	**0.2886**	**-0. 866**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.2261	**0.2261**	**0.2261**	**0.2261**	**-0.894**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.1825	**0.1825**	**0.1825**	**0.1825**	**0.1825**	**- 0.918**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.1543	**0.1543**	**0.1543**	**0.1543**	**0.1543**	**0.1543**	**- 0.925**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.1336	**0.1336**	**0.1336**	**0.1336**	**0.1336**	**0.1336**	**0.1336**	**- 0.935**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.1178	**0.1178**	**0.1178**	**0.1178**	**0.1178**	**0.1178**	**0.1178**	**0.1178**	**- 0.942**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.1056	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**0.1056**	**- 0.948**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.0953	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**0.0953**	**- 0.953**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.087	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**0.087**	**- 0.957**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.08	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**0.08**	**- 0.96**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.0741	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**0.0741**	**- 0.963**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.069	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**0.069**	**- 0.966**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.0645	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**0.0645**	**- 0.968**	**0**	**0**	**0**	**0**
0.0606	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**0.0606**	**- 0.97**	**0**	**0**	**0**
0.0571	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**0.0571**	**- 0.971**	**0**	**0**
0.054	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**0.054**	**- 0.973**	**0**
0.0512	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**0.0512**	**- 0.974**

References

[1] AL-Mouel, A.S., (2004),"Multivariate Repeated measures Models and Comparison of Estimators" Ph.D.Thesis, East China Normal university China.

[2] AL-Mouel, A.S.,(1990)," On nested Repeated Measures Model" .M.Sc.Thesis, The University of Basrah , Iraq.

[3]AL-Mouel, A.S.,(2004)." Nested Repeated measures model sufficiency and Estimation". Chinese Journal of Applied probability and statistics,20, 133-146.

[4] Anderson, T.W.,(1984),"An introduction to multivariate statistical Analysis ", Wily, New York .

[5] Arnold, S.F.,(1970),"Products of problems and patterned Covariance Matrices that arise from Interchangeable Random Variables", Stanford university . Technical Report No. 46.

[6] Arnold, S.F.,(1979),"A coordinate – free Approach to finding Optimal Procedures for Repeated Measures Design " .Ann. .Statist. 7, 812-822.

[6] Box, G.E.P.,(1949)"A general distribution theory for a class of likelihood Criteria"Biometrika,36,317-346.

[7] Chinchilli, V.M,and Carter, W.H.,(1984)"A likelihood Ratio Test for a patterned Covariance Matrix in Multivariate Growth Curve Model ",Biometrics, 40,151-156.

[8] Jawad, M.J.,(2006),"Multivariate Repeated measures model and sphericity test ", Ph.D. Thesis, University of Basrah.

[9] Keselman, H.J.,and et al.(1998),"Statistical practices of Educational Researchers: An analysis of their ANOVA ,MANOVA, and ANCOVA analysis",Rev. Educational Research, 68,350-386.

[10] Wilks, S.S.,(1946),"Sample Criteria for Testing Equality of Means Equality of Variances and Equality of Covariances in a Normal Multivariate distribution" Ann. Math. Statist.17,257-281.

ABSTRACT

This research is devoted to study of one-way Multivariate repeated measurements analysis of covariance model (MRM ANCOVA), which contains one between-units factor (Group with q levels) ,one within-units factor (Time with p levels) and two covariates (Z_1, Z_2) .

For this model the two covariates is time-independent, that is measured only once. Then we study the sphericity test for one- way MRM ANCOVA model .Also we obtain the likelihood ratio criterion and the h^{th} Moment of this criteria. As well as the asymptotic expansion and limiting distribution of its test, statistics are obtained.