الشروط اللازمة والكافية التي يجب وضعها على الزمرة G حتى تكون الزمرة U منتهية محلياً ومولدة بعددٍ منتهٍ من العناصر .

The Sufficient and Necessary Conditions on Group G So that U is Locally Finite and Finitely Generated

م.صادق عبد العزيز مهدي

Sadiqmehdi71@yahoo.com

الملخص

لتكن U زمرة العناصر القابلة للقلب (Units Group) في حلقة الزمـــرة A[G] حيــث A حلقة ما و G زمرة ما. نجد في الأبحاث والدراسات الجبرية الحديثة اهتماماً كبيــراً بمســألة التعرف على بنية الزمرة U من خلال معرفة بنية الزمرة G وبالعكس. في هذا البحث حاولنا الإجابة على السؤالين التاليين :

1 - ما هي الشروط اللازمة والكافية التي يجب وضعها على الزمرة G حتى تكون الزمــرة U منتهية محلياً (locally Finite).

2 - ما هي الشروط اللازمة والكافية التي يجب وضعها على الزمرة G حتى تكون الزمــرة U مولدة بعددٍ منتهٍ من العناصر (Finitely Generated).

ABSTRACT

Let G be a group and A be a ring . Let U be the units group in the group ring A[G]. Many recent studies in algebra deal with the structure of the group U knowing the structure of the group G and vice versa. In this paper we tried to prove the following problems :

1. What are the necessary and sufficient conditions on G so that U is locally finite?

2. What are the necessary and sufficient conditions on G so that U is finitely generated ?

١- المقدمة Introduction

إذا كانت R حلقة واحدية. وكانت U_R زمرة العناصر القابلة للقلب فـــي R فـــان مســـألة التعرف على بنية هذه الزمـــــــرة في حلقة محددة R هي من المسائل الجبرية الهامـــة ،ولقــد استأثرت الحالة الخاصة التالية من هذه المسألة اهتمام الباحث الجبـــري (Polcino Milier) فـــي العقود الأربعة الأخيرة من القرن المنصرم ،ومازالت:

إذا كانت A حلقة ما و G زمرة ضربية ما ،فان المطلـــوب هـــو التعـــرف علـــى بنيـــة وخصائص الزمرة U_R في حلقة الزمرة R= A[G] . وفي بعض الدراسات والأبحـــاث الجبريـــة اهتمت بدراسة الزمرة U_R ومحاولة إيجاد الشروط اللازمة والكافية التي تحملها G حتى تكون U_R ذات خاصية ما. فمثلاً أثبت (Polcino Milier) في [5] أنه إذا كانت G منتهية . عندئـــذٍ U_R دورية أو عديمة قوة فإن G ستكون إبدالية أو 2-زمرة هاملتونية والعكس صحيح. و فـــي [6] بُرهـــن على أنه عندما G منتهية فإن U_R تكـــــــون FC - زمرة إذا و فقط إذا كانـــت G إما إبدالية أو 2- زمرة هاملتونية.

٢- الشروط اللازمة و الكافية لكي تكون U منتهية محلياً :

- ننوه هنا إلى ان G سترمز لزمرة ضربية (Multiplication Group)ليس من الضروري أن تكون منتهية .

قبل أن نتناول تلك الشروط الواجب و ضعها على الزمرة G حتى تكون U منتهية محلياً يجـــب أن نتطرق الى تعريف الزمرة المنتهية محلياً.

تعريف 1.2 :

يقال عن زمرة X إنها منتهية محلياً إذا كانت كل زمرة جزئية منتهية التوليد من الزمرة X منتهية.

ملاحظة 2.2 :

من الواضح أنه إذا كانت U منتهية محلياً فإن G منتهية محلياً لأن G زمرة جزئية من U و لكن العكس ليس من الضروري أن يكون صحيحاً فإذا أخذنا G زمـــرة منتهيـــة وليست 2-زمرة هاملتونية و ليست ابدالية فإن U ليست دورية بحسب المبرهنة في [1] و لذلك ســـوف

تحوي حتماً عنصراً واحداً على الأقل رتبته غير منتهية مثل x ، و عندئذ <x> زمرة جزئية من U منتهية التوليد و ليست منتهية.

حتى و لو كانت G زمرة تبديلية و منتهية فإن U ليس من الضروري أن تكون منتهية محلياً كما تظهر المبرهنة التالية و نتائجها:

مبرهنة 3.2 : [4]

إذا كانت X زمرة عديمة قوة و مولدة بعددٍ منتهٍ من العناصر الدورية فإن X ستكون منتهية.

نتيجة 4.2 :

إذا كانت U عديمة قوة و مولدة بعدد منته من العناصر الدورية فإن U ستكون منتهية وبالتالي V منتهية ومنه فإن $|G| \leq |V|$ ، وبما أن $V \subseteq G$ فإن $V= G$ و بالتالي $U = \pm G$ و ينتج عن [7 , Th. 4.1] أن G ستكون في هذه الحالة :

إما ابدالية حيث $G^4 =\{1\}$

أو ابدالية حيث $G^6 =\{1\}$

أو 2 - زمرة هاملتونية.

نتيجة 5.2 :

إذا كانت G زمرة منتهية وابدالية و تحوي عنصراً x رتبته ليست 4 و ليست 6 فإن U منتهية التوليد لأن G منتهية بحسب [8] و U عديمة قوة (Nilpotent Group) لأنها ابدالية.

و بحسب النتيجة السابقة فإن أحد مولدات U سيكون ذو رتبة غير منتهية و بالتالي U ليست منتهية محلياً.

و بشكل أعم لدينا النتيجة التالية:

نتيجة 6.2 :

إذا كانت G زمرة منتهية التوليد (Finitely Generated) و تحوي عنصراً x رتبته ليست 4 وليست 6 و G ليست 2 - زمرة هاملتونية فإن U ليست منتهية محلياً.

البرهان :

لو كانت U منتهية محلياً لنتج عن كون G زمرة جزئية من U و منتهية التوليد أن G منتهية ، اذن G منتهية ثم ان U دورية لانه اذا كان u من U فان <u> منتهية أي أن رتبة uمنتهية و ينتج عن النظرية (4.1) من [7] أنه إمـــا G ابداليـــة و $G^4 =\{1\}$ و بالتـــالي G تحوي عنصراً رتبته 4 و هذا يناقض الفرض .

أو G ابدالية و $G^6 =\{1\}$ و بالتالي G تحوي عنصراً رتبته 6 و هذا يناقض الفرض أيضاً.

أو G هي 2- زمرة هاملتونية و هذا أيضاً يناقض الفرض.

إذن لا يمكن أن تكون U منتهية محلياً.

نتيجة 7.2 :

إذا كانت U منتهية محلياً و G منتهية التوليد فإن $U= \pm G$

البرهان :

بما ان G منتهية التوليد و U منتهية محليا فان G ستكون منتهية لان G زمرة جزئية من U ثم ان كون U منتهية محليا يؤدي الى أن U دورية بحسب ما تقدم في برهان (6.2) . ليكن $u \in U$ وليكن $g \in supp(u)$ عندئذ ينتج عن كون U منتهية محليا أن $< u, g>$ زمـــرة جزئيـــة منتهية وبما أن

$$ug^{-1} \in < u, g>$$

فان ug^{-1} ذو رتبة منتهية امثال e في عبارته ليست صفرا ولذلك فهو مبتذل بحســـب [2] أي أن

$$ug^{-1} = \pm g_1 \quad ; \quad g_1 \in G$$

ومنه

$$u = \pm g_1 g = \pm g_2 \quad ; \quad g_2 \in G$$

أي أن $u \in \pm G$.

اذن $U \subseteq \pm G$ كما أن $\pm G \subseteq U$ وبالتالي $U = \pm G$

ملاحظة 8 . 2 :

إذا كانت G ، 2 - زمرة هاملتونية فإن U منتهية محلياً لان $U = \pm G$ بحسب [7] أي ان U منتهية ولذلك فهي منتهية محليا .

٣- الشروط اللازمة و الكافية لكي تكون U منتهية التوليد

سنحاول في هذه الفقرة الإجابة على السؤال التالي:

ما هو الشرط اللازم والكافي الواجب فرضه على G حتى تكون U منتهية التوليد؟

في هذا الموضوع لدينا النتائج التالية:

مبرهنة 1.3 : [8]

1 - إذا كانت U منتهية التوليد فإن G منتهية التوليد.

2 - إذا كانت G منتهية فإن U منتهية التوليد.

إن عكس (1) من المبرهنة (1.3) ليس صحيحاً بشكل عام أي أنه توجد زمرة G منتهية التوليد ولكن U غير منتهية التوليد. كما يوضح المثال التالي:

مثال 2 . 3 : [8]

إذا كانت G امتدادا للزمرة D_8 بزمرة دائرية C غير منتهية (أي $G = D_8 \times C$) فإن G منتهية التوليد لأن D_8 منتهية و C منتهية التوليد و لكن U ليست منتهية التوليد كما يذكر المرجع [8] عن Mareiniak و Sehgal .

إن عكس (2) من المبرهنة (1. 3) هو أيضاً غير صحيح بشكل عام كما يظهر المثال (5. 3) .

مبرهنة 3.3 : [8]

إذا كانت G امتداداً لزمرة ذات التفاف T بزمرة ذات التفاف حر torsion free و عديمة قوة K (أي $G = T \times K$) وكانت $\mathbb{Z}[G]$ لا تملك عناصر عديمة قوة فإن $U_G = U_T . G$

تمهيدية 4.3 : [1]

إذا كانت A خالية من قواسم الصفر و G هي Ω - زمرة فإن A[G] خالية مــن قواســم الصفر وبالتالي لا تحوي عناصر عديمة قوة.

مثال 5.3 :

إذا كانت G زمرة دائرية غير منتهية فإن U ستكون منتهية التوليد مع أن G غير منتهية.

البرهان:

نضع في المبرهنة (3.3) T={e} و K = G فنجد أن $\mathbb{Z}[G]$ خالية من قواسم الصــفر بحســب (4.3) و بالتالي $\mathbb{Z}[G]$ خالية من العناصر عديمة القوة و لذلك فإن:

$$U_G = U_T.G$$
$$=\{-1,1\}\times G$$

بحسب (3.3) و بالتالي U منتهية التوليد لأن G مولدة بعنصر واحد .

كما و يمكن أن نستخلص من المبرهنة (3. 3) النتيجة التالية:

نتيجة 6.3 :

إذا كانت $G=T\times K$ حيث T منتهية و K ذات التفاف حر ومنتهية التوليد فإنــه إمــا $\mathbb{Z}[G]$ تحوي عناصر عديمة قوة أو U تكون منتهية التوليد.

البرهان :

إذا كانت $\mathbb{Z}[G]$ لا تحوي عناصر عديمة القوة (غير الصفر) فإنه ينتج عن المبرهنة (3.3) أن

$$U_G = U_T .G$$

و بما أن T منتهية فإن U_T ستكون منتهية التوليد بحسب (1.3). كما أنه ينتج عن فرضــنا K منتهية التوليد و T منتهية أن G منتهية التوليد و بالتالي $U_T.G$ ستكون منتهية التوليــد ، أي أن U_G منتهية التوليد.

مبرهنة 7.3 : [8]

إذا كانت G زمرة عديمة قوة فإن U منتهية التوليد إذا و فقط إذا كانت G إمــا منتهيــة أو منتهية التوليد و $\mathbb{Z}[G]$ لا تحوي عناصر عديمة القوة.

من هذه المبرهنة نستخلص النتيجة التالية:

نتيجة 3 . 8 :

لتكن G زمرة عديمة قوة و منتهية التوليد و غير منتهية. عندئذ لدينا واحد من الأمـــرين التاليين محقق :

1 - $\mathbb{Z}[G]$ لا تحوي عناصر عديمة القوة وبالتاليU منتهية التوليد.

2- $\mathbb{Z}[G]$ تحوي عناصر عديمة القوة وينتج عنه أن U ليست منتهية التوليد .

- يمكن أن نستخلص بسهولة من النتيجة السابقة أنه إذا كانت G ابدالية ومنتهية التوليـــد وبدون التفاف فإن U منتهية التوليد.

ولكن لدينا ما هو أعم من ذلك يمكن أن نستخلصه من التمهيدية التالية :

تمهيدية 3 . 9 : [3]

إذا كانت G زمرة منتهية التوليد وعديمة قوة فإن C_U زمرة منتهية التوليد .

نتيجة 3 . 3 . 10 :

إذا كانت G ابدالية فإن :

G منتهية التوليد إذا و فقط إذا كانت U منتهية التوليد .

البرهان :

إذا كانت G منتهية التوليد فإنه ينتج عن كون G ابدالية أن G منتهية التوليد وعديمة قوة وبحسب التمهيدية السابقة تكون C_U زمرة منتهية التوليد ولكن $C_U=U$ لأن U ابدالية وبالتالي ستكون U منتهية التوليد .

العكس ينتج عن (3 .1) .

تمهيدية 3 . 11 :

إذا كانت U منتهية محلياً فإن G منتهية التوليد $\Leftrightarrow$ U منتهية التوليد.

البرهان:

$\Leftarrow$ بما أن U منتهية محلياً و G منتهية التوليد فإن G ستكون منتهية لأنها زمرة جزئية من U وبحسب (1.3) ستكون U منتهية التوليد.

$\Rightarrow$ ينتج مباشرة عن المبرهنة (3 .1).

REFERENCES المراجع

[1] - Ahmad, M.K. , **On The Units Group of $\mathbb{Z}$[G] and Isomorphism Problem of Group Rings ,** Research J. of Aleppo Univ. Vol. 10 , 1988 . PP. 31- 35 .

[2] - Buthessh , S., **On Units Group of The Ring $\mathbb{Z}$[G]**, Research J. of Aleppo Univ. , Vol. 18 , 1994 , PP . 9 -15 .

[3] - Jespers , E. Parmenter , M. , Sehgal, S. , **Central Units of Integral Group Rings of Nilpotent Groups**, Proc. of the Amer. Math. Soc. , Vol. 124 , No. 4, 1996 . PP .1007 - 1012 .

[4] - Macdonald, I., D., **The Theory of Groups**, Oxford press, London, 1968.

[5] - Polcino Milier, c., **Integral Group Ring with Nilpotent Units Group**, Canad. J. Math. (5) 28 , 1976 , PP. 954 - 960 .

[6] - Sehgal , S., K. and Zassenhaus , H.J. , **Group Rings Whose Units Form an FC- Group** , Math. Z, 153 , 1977 , PP. 29 - 35 .

[7] - Sehgal, S., K., **Topics in Group Rings**, Mercel Dekker, New York, 1978.

[8] - Wiechecki, L., **Finitely Generated Group Rings Units**, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 127 (1) , 1999 ,PP 51-55.