اقتراح دالة وزن جديدة لتقدير دالة كثافة الطيف

د. صلاح حمزة عبد*

I. المقدمة

من المعلوم ان التحليل الطيفي هو احد ابرز جوانب تحليل العمليات التصادفية التي تخضع لها العديد من الظواهر والمسائل التي نواجهها في حياتنا اليومية ، وذلك لان تحليل الطيف يهتم بارجاع الاختلافات الموجودة بين مشاهدات الظاهرة المدروسة الى مصادرها الاصلية ، اذ يمثل طيف العملية التصادفية مدى مساهمة الترددات المختلفة في تباين العملية التصادفية .

ان دالة كثافة الطيف هي الاداة الرئيسية في التحليل الطيفي ، وهي بالطبع غير معلومة ، وتحتاج الى تقدير ، ولكي يمكن معالجة المشكلة المدروسة معالجة مثلى من خلال هذا التحليل ، فأننا نحاول دائما" الحصول على تقدير يتسق ودالة الطيف الفعلية التي تسيطر على سلوك العملية التصادفية التي تخضع لها المسألة قيد الدراسة .

ان صيغة التقدير المتسق لدالة كثافة الطيف [22] لمشاهدات مأخوذة من عملية تصادفية مستقرة من الدرجة الثانية مثل $\{X_t \ , t = ...,-1,0,1,...\}$ هي عبارة عن :

$$\hat{f}_T(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{v=-T}^{T}\hat{\rho}_v \, k_T(v) \cos(vw) \quad , \ -\pi \le w \le \pi \qquad ----(1)$$

حيث ان :

T تمثل نقطة بتر العملية التصادفية ، وتدعى ايضا" بمعلمة الوزن أو معلمة عرض الحزمة أو معلمة التمهيد أو معلمة عرض حزمة الطيف .

$\hat{\rho}_v = \hat{R}_v / \hat{R}_o$ تمثل دالة الارتباط الذاتي المقدرة من العينة حيث أن :

---

* استاذ / الجامعة المستنصرية /كلية الادارة والاقتصاد /قسم الاحصاء

مقبول للنشر بتاريخ 2003/12/8

$$\hat{R}_v = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-|v|}(X_t - \bar{\bar{X}})(X_{t+|v|} - \bar{\bar{X}})$$

وان N يمثل عدد المشاهدات الكلي .

$k_T(v)$ هي دالة وزن تدعى بمنفذ التباطؤ (Lag window) تعمل على تـرجيح دالـة الارتباط الذاتي ، وان تحويل فورير لها ينتج ما يدعى بمنفذ الطيف (Spectral window) ، الذي يعمل بدوره دالة وزن تعمل على ترجيح دالة مخطط الدورية لتنتج صيغة متسقة اخرى لدالة كثافة الطيف تتكافأ من حيث النتيجة مع الصيغة في (1) اعلاه .

لقد اهتم الكثير من الباحثين بمسألة التقدير المتسق لدالة كثافة الطيف ، فلاحظوا أنه عنـد أخذ المجموع في المعادلة (1) اعلاه لكـل قـيم v $(v = 0,\mp1,...,\mp(N-1))$ ، فـأن التقـدير الناتج $\hat{f}_N(w)$ يكون تقدير غير متسق لدالة كثافة الطيف [17] ، وقد علل بعض البـاحثين عـدم الاتساق هذا الى ان الدالة المذكورة ستحتوي على قيم دالة الارتباط الذاتي المقدرة من العينة ، من $v=0$ الى $v=\pm(N-1)$ ، على انه كلما كبرت قيمة $|v|$ متجهة" نحو $|N-1|$ ، كلمـا اصـبح تقدير دالة الارتباط الذاتي غير جيد بسبب قلة عدد المشاهدات المستخدمة في التقـدير ، وبالتـالي يزداد تأثير ذيول دالة الارتباط الذاتي المقدرة من العينة في تقدير دالة كثافة الطيف ، فيـتم البتـر للتخلص من تأثير هذه الذيول وذلك عند $T \le N$ كما هي في المعادلة (1) ، وبما ان هـذا البتـر يحمل في طياته اهمال جزء من المعلومات التي ربما تكون ضرورية في التحليل ، فانه يتم ترجيح قيم دالة الارتباط المقدرة بدالة وزن $k_T(v)$ تعمل على تضمين دالة كثافة الطيف تلك المعلومات ، الامر الذي يجعل تقدير دالة كثافة الطيف متسقا" .

ان جودة تقدير دالة كثافة الطيف تعتمد من ضمن ماتعتمد عليه بدرجة او باخرى على جانبين الاول منهما يتمثل بتحديد نقطة بتر العملية التصادفية T ، التي هي عبارة عن معلمة فـي دالـة كثافة الطيف ، وهنا تكمن صعوبة كبرى ، اذ ينبغي تقدير ماهو غير معلوم (نقطة البتر) من ماهو غير معلوم (دالة كثافة الطيف) .

ان تحديد نقطة بتر العملية التصادفية سوف لن تكون هي محور عملنا في هـذا البحـث علـى الرغم من ارتباطها به بشكل او بآخر ، بمعنى اننا سوف لن نتطرق لطرق اسـتخراجها او جانبهـا الفلسفي ، ولمن يريد تفاصيل حولها يمكنه اللجوء للمصدر [17] المشار اليه في هذا البحث ، على اننا سنستخدمها في الجانب النظري ، كما سنتطرق في الجانب التجريبي لكيفية استخدام احـد اهـم طرق استخراجها ، الا وهي طريقة إغلاق المنفذ [window closing] .

اما الجانب الثاني الذي تعتمد عليه جودة تقدير دالة كثافة الطيف ، فيتمثل بصحة اختيار دالة الوزن المناسبة $k_T(v)$ لهذا الغرض .

لقد حاز موضوع دوال الوزن المستخدمة عند تقدير دالة كثافة الطيف على اهتمام الباحثين كجزء من اهتمامهم بمجمل موضوع التقدير المتسق لدالة كثافة الطيف ، فاقترحوا صيغا" لدوال الوزن تلك،ومعاييرا" لتبيان أفضلية بعضها على البعض الآخر ومن وجهات نظر مختلفة للأفضلية .

فعلى سبيل المثال لا الحصر ، سنذكر في ادناه ابرز دوال الوزن شيوعا" ، فهناك دالة الوزن المنتظمة التي لعبت دورا" كبيرا" في تطور النظرة الى دوال الوزن لتصل الينا كما هي عليه الآن ، فتحويل فورير لتلك الدالة ينتج منفذ طيف شهير هو المسمى دالة درجلت (Dirichlet function) ، ولتفاصيل ذلك يمكن الرجوع للمصدر [13] ،كما ان هناك دالة الوزن التي اقترحها دانييل عام 1946 [7] ، التي يمثل تحويل فورير لها منفذ طيف ذي دالة منتظمة ، أما الباحث توكي فقد اقترح عام 1949 [19] دالة وزن عامة ذات معلمة معينة ، اقترح لتلك المعلمة القيمة $a = 0.23$ في نفس بحثه الذي اقترح فيه تلك الصيغة العامة ، فنتجت دالة الوزن المعروفة في الادبيات العلمية بأسم دالة توكي-هامنك ، هناك ايضا" دالة الوزن التي اقترحها بارتلت عام 1950 [1] ،التي يمثل تحويل فورير لها منفذ طيف شهير آخر هو المسمى دالة فيجر (Fejer function) .

ان دالة الوزن المقترحة من قبل بارتلت ماهي الا ناتج تلفيف (Convolution) لمتغيرين عشوائيين y_1 و y_2 مستقلين عن بعضهما البعض ويخضع كل واحد منهما للتوزيع المنتظم ، بمعنى ان صيغة دالة الوزن تلك هي ذاتها لتوزيع المتغير $y_1 + y_2$.

اما الباحث وتل فقد اقترح عام 1957 [21] دالة وزن تستند على تقليص متوسط مربعات خطأ تقدير دالة كثافة الطيف وذلك بالاستناد على توزيع اولي عند التكرارات المختلفة لتلك الدالة ، مما يجعل من نتائج استخدام دالة الوزن تلك بعيدة عن الواقع وذلك لصعوبة تحديد التوزيع الاولي الذي اقترحه وتل اساسا" لدالة الوزن المسماة باسمه ، اما في عام 1959 [20] فقد عاد الباحث توكي مرة" اخرى ليقترح قيمة اخرى لمعلمة صيغته العامة لدالة الوزن التي سبق واشرنا اليها ، وهي القيمة $a = 0.25$ ،فنتجت دالة الوزن المعروفة في الادبيات العلمية بأسم دالة توكي-هاننك ، اما الباحث بارزن فقد اقترح عام 1961 [15] صيغة دالة وزن ما هي الا ناتج لتلفيف اربع متغيرات عشوائية y_i , $(i = 1,2,3,4)$ مستقلة عن بعضها البعض ويخضع كل واحد منها للتوزيع المنتظم ، بمعنى ان صيغة دالة الوزن تلك هي ذاتها لتوزيع المتغير $\sum_{i=1}^{4} y_i$ ، اما الباحثين برستلي عام

1962 [16] وبارتلت عام 1963 [2] فقد توصل كل منهما وبشكل مستقل عن الآخر لصيغة دالة وزن سميت باسميهما ، والشائع عن تلك الصيغة بان تحويل فورير لها ينتج مايدعى بمنفذ الطيف التربيعي .

لقد اجريت عدة دراسات نظرية وتجريبية للمقارنة بين دوال الوزن المختلفة ، سواء التي ذكرنا اعلاه والتي هي الاكثر شيوعا" او تلك التي لم نذكر ، من حيث جودة تقدير دالة كثافة الطيف التي يتحصل عليها عند استخدام دوال الوزن المختلفة تلك ، فهناك الدراسة التي اجريت من قبل نيف عام 1972 [14] وكذلك الدراسة التي اجريت من قبل هاريس عام 1978 [11] ،والدراسة التي اجريت من قبل برستلي عام 1988 [17] ، والمتتبع لتلك الدراسات وغيرها يلاحظ شبه اجماع على افضلية دالة الوزن العائدة لبارزن عام 1961 كأفضل خيار ممكن من حيث مواصفات دالة الوزن نفسها وكذلك من حيث جودة تقدير دالة كثافة الطيف .

ولتفاصيل اكثر حول ماذكرنا اعلاه من ناحية جودة دالة الوزن العائدة لبارزن وأفضليتها على غيرها من دوال الوزن ، يمكن مراجعة كل من هار وفرانسيس عام 1998 [10] و وايلي و برورسن عام 2001 [4] وعام 2002 [5] و بروكويل وديفز عام 2002 [3] و هاردل وكركجرين وبكارد وسيباكوف عام 2003 [9] .

II ـ دالة وزن بارزن

توصل كريمر عام 1946 [6] ،الى صيغة عامة لتلفيف n من المتغيرات العشوائية $y_1, y_2, ..., y_n$ ، المستقلة عن بعضها البعض ، والتي يخضع كل واحد منها للتوزيع المنتظم المستمر على الفترة (0,1) ، بمعنى انه توصل لصيغة عامة لدالة كثافة احتمال المتغير $\sum_{i=1}^{n} y_i$ ، فكتب كحالة خاصة من تلك الصيغة دالة كثافة احتمال المتغير $y = y_1 + y_2$ على النحو التالي :

$$g_2(y) = \begin{cases} y & , \ 0<y<1 \\ y-2(y-1) & , \ 1<y<2 \\ 0 & , \ ow \end{cases} \qquad ----(2)$$

استثمر بارتلت عام 1950 [1] ، الصيغة (2) اعلاه واستخدم التحويل $v = T(y-1)$ ، فتوصل الى الصيغة التالية لدالة كثافة احتمال المتغير v :

$$g_2^*(v)=\begin{cases}\frac{1}{T}(1-|v|/T) & , \quad |v|\le T \\ 0 & , \quad ow\end{cases} \quad \text{----(3)}$$

وبقسمة $g^*(v)$ على $g^*(0)=1/T$ فأنه توصل الى كتابة دالة الوزن الشهيرة بأسمه وعلى وفق الصيغة التالية :

$$_2k_T(v)=\frac{g^*(v)}{g^*(0)}=\begin{cases}1-\frac{|v|}{T} & , \ |v|\le T \\ 0 & , \ ow\end{cases} \quad \text{----(4)}$$

وبالاستناد على صيغة كريمر العامة المشار اليها آنفا" ، ووجود y_i $(i=1,2,3,4)$ من المتغيرات العشوائية المستقلة عن بعضها البعض والتي تخضع للتوزيع المنتظم المستمر على الفترة $(0,1)$ ، استخدم بارزن دالة كثافة احتمال المتغير $y=\sum_{i=1}^{4}y_i$ ذات الصيغة :

$$g_4(y)=\begin{cases}y^3/6 & , \ 0<y<1 \\ \frac{1}{6}\left[y^3-4(y-1)^3\right] & , \ 1<y<2 \\ \frac{1}{6}\left[y^3-4(y-1)^3+6(y-2)^3\right] & , \ 2<y<3 \\ \frac{1}{6}\left[y^3-4(y-1)^3+6(y-2)^3-4(y-3)^3\right] & , \ 3<y<4 \\ 0 & , \ ow\end{cases} \quad \text{----(5)}$$

حيث اجرى التحويل $v=(y/2-1)T$ عليها ، ليحصل على الصيغة التالية لدالة كثافة احتمال المتغير v بالشكل :

$$g_4^*(v)=\begin{cases}\frac{8}{3T}\left[1+\frac{v}{T}\right]^3 & , -T<v<-T/2\\ \frac{4}{3T}\left[1-\frac{6v^2}{T^2}-\frac{6v^3}{T^3}\right] & , -T/2<v<0\\ \frac{4}{3T}\left[1-\frac{6v^2}{T^2}+\frac{6v^3}{T^3}\right] & , 0<v<T/2\\ \frac{8}{3T}\left[1-\frac{v}{T}\right]^3 & , T/2<v<T\\ 0 & , ow\end{cases} \qquad \text{----(6)}$$

وبما ان دالة الوزن تعمل نفس العمل ويكون لها نفس التاثير اذا ضربت باي قيمة ثابتة ، فأنه بضرب الدالة اعلاه بالثابت $3T/4$ وترتيب الحدود ، تمكن بارزن من كتابة دالة الوزن الشهيرة بأسمه وذلك عام 1961 [15] وعلى وفق الصيغة التالية :

$$_4k_T(v)=\begin{cases}1-6(v/T)^2+6(|v|/T)^3 & , |v|\le T/2\\ 2(1-|v|/T)^3 & , T/2\le|v|\le T\\ 0 & , ow\end{cases} \qquad \text{----(7)}$$

III ـ تقدير قيم دالة كثافة الطيف (نظرة اخرى)

يمكن ادراج الأهداف المتوخاة من موضوع هذه الفقرة على وفق النقاط التالية :

1) تبيان الاتجاهات الفلسفية المختلفة التي تقوم عليها عملية تقدير قيم دالة كثافة الطيف .
2) توضيح طبيعة عمل دالة الوزن والدور الذي تلعبه في التقدير .
3) ارساء الاساس المنطقي الذي سيقف عليه مقترحنا لدالة وزن جديدة .

والآن ، لنفترض ان $w_1, w_2, ...$ هي تكرارات مختلفة ، وأننا نرغب بتقدير دالة كثافة الطيف عند أية نقطة مثل w_i $(i=1,2,...)$ ، أي تقدير $f_T(w_i)$. ان هناك وجهتين شائعة للنظر لهذا الموضوع ، هي كما يلي ، وعلى وفق مايذكر هيلد عام 1982 [8]:

(1) وجهة الخلية الثابتة

تمثل فكرة وجهة الخلية الثابتة ، النظرة التقليدية للموضوع ، فهي تقوم على اساس المدرج التكراري (Histogram) لدالة مخطط الدورية ، وهذا المدرج كما هو معروف يتكون من جملة من الخلايا التي تتمثل بالمستطيلات ، حيث يتم تقدير $f_T(w_i)$ من خلال هذا المدرج وعلى وفق نفس الاسلوب الشائع عند استخدام المدرج التكراري لتقدير الاحتمال .

ان هناك جملة من العيوب التي تؤخذ على هذه الوجهة ، هي [8] :

a) الطبيعة الثابتة لتركيب الخلية ، وتعني بأن النقاط (التكرارات) المختلفة ذات المسافة المتقاربة (المتجاورة) فيما بينها ، والتي تقع داخل نفس الخلية (المستطيل) ، سيكون لها نفس تقدير دالة كثافة الطيف ، في حين ان النقاط (التكرارات) المتكافئة مع بعضها ، ولكن تقع في خلايا (مستطيلات) مختلفة ، يكون لها تقدير دالة كثافة طيف مختلف .

b) عدم الاستمرارية عند حدود الخلايا (المستطيلات) ، وهذا يعني ظهور مشكلة القيمة الحدية .

c) ان للتقدير مدى محدد ، تكون قيمته خارج هذا المدى صفرا" .

(2) وجهة الخلية المتحركة

لتجاوز العيوب في الوجهة السابقة ، قام الباحث روسنبلات عام 1956 [18] ، بتوظيف مبدأ المتوسطات المتحركة في تحليل السلاسل الزمنية ، كأساس لوجهة جديدة ، سميت فيما بعد بوجهة الخلية المتحركة [8] . وفكرة هذه الوجهة تتلخص بأنه بدلا" من اخذ الموقع الثابت للنقطة (التكرار) المراد ايجاد تقدير دالة كثافة الطيف عنده ، فأنه يتم أخذ عدة تمركزات (Centering) للخلايا المختلفة بالاستناد على وزن هذه الخلية او تلك تأثيرا" في التكرار قيد تقدير دالة كثافة الطيف عنده .

ومما ورد في اعلاه ، تتضح اهمية دالة الوزن سواء كهيكلية نظرية او كناحية فلسفية عند تقدير دالة كثافة الطيف ، فأذا مارجعنا للاهداف التي سبق وذكرنا في مطلع هذه الفقرة ، فأننا نكون قد حققنا أول هدفين منها ، ولتحقيق الهدف الاخير المتمثل بأرساء الاساس المنطقي الذي سيقف عليه مقترحنا لدالة وزن جديدة ، فأنه لابد لنا اولا" من ان نتحدث عن أهمية التلفيف فنقول ، بأنه من خلال عملية تلفيف المتغيرات على بعضها البعض ، سينتج متغير جديد يأخذ بعين

الاعتبار ترتيب المشاهدات الخاضعة لتلك المتغيرات على وفق اهميتها التأثيرية بحيث تعبر قمة دالة كثافة احتمال هذا المتغير عن المشاهدات ذات احتمال التأثير الاقوى ، بينما تمثل المناطق التي تلي تلك القمة نزولا" الى ذيول تلك الدالة المشاهدات الاخرى وعلى توالي احتمال تأثيرها .

لقد استشعر كل من بارتلت عام 1950 [1] و بارزن عام 1961 [15] ، تلك الاهمية لعملية تلفيف المتغيرات ، وذلك لان ترتيب المشاهدات على وفق اهميتها التأثيرية هو أحد أبرز المواصفات التي يمتاز بها التحليل في حيز التكرارات ، وكان هذا أحد أبرز دوافع أقتراح دالتي الوزن المسماة بأسميهما ، فلقد لاحظنا آنفا" ، كيف أن بارتلت [1] ، قد اقترح استخدام قيم الدالة الناتجة عن تلفيف متغيرين عشوائيين مستقلين عن بعضهما البعض ويخضع كل واحد منهما للتوزيع المنتظم على الفترة (0,1) ، كأوزان عند تطبيق وجهة الخلية المتحركة في التقدير ، في حين أن بارزن [15] ،ولنفس الغرض اعلاه ، قد اقترح استخدام قيم الدالة الناتجة عن تلفيف اربع متغيرات عشوائية بذات نوع ومواصفات المتغيرات التي استخدمها سلفه بارتلت .

وبعد هذا وذاك من الطروحات آنفة الذكر ، برزت لدينا ثلاث تساؤلات مرتبطة بعضها ببعض أيما أرتباط ، وتطرح نفسها بقوة ، وهي :

1) لماذا اقترح بارتلت قيم دالة ناتجة عن تلفيف متغيرين فقط كأوزان في حين أقترح بارزن قيم دالة ناتجة عن تلفيف أربع متغيرات كأوزان عند تقدير دالة كثافة الطيف ؟
2) كم هو عدد المتغيرات المثالي الذي ينبغي أن يتم تلفيفها على بعضها البعض لينتج دالة وزن مثلى بالنسبة لأي مشكلة قيد أجراء تحليل الطيف ؟
3) أليس من المنطقي أكثر الربط بين سلوك العملية التصادفية التي تسيطر على الظاهرة قيد التحليل وعدد المتغيرات الملتفة على بعضها البعض ، والتي ينتج عنها دالة وزن تستخدم لتقدير دالة كثافة طيف تلك الظاهرة ؟ فقد يلائم ظاهرة ما اكثر استخدام اوزان هي عبارة عن قيم دالة ناتجة عن ستة متغيرات ملتفة على بعضها البعض عند تقدير دالة كثافة الطيف لتحليل تلك الظاهرة ، بينما يلائم ظاهرة اخرى أكثر ، ولنفس الغرض اعلاه استخدام أوزان هي عبارة عن قيم دالة ناتجة عن ثمانية متغيرات ملتفة على بعضها البعض .

سنقوم فيما يلي من فقرات بأقتراح أجابة للتساؤلات أعلاه ، هذه الاجابة ستكون هي هدف ومحور وتوجه بحثنا هذا .

IV ـ مقترح دالة وزن

سبق في الفقرة (II) وذكرنا بأن كريمر عام 1946 [6]، قد توصل الى صيغة عامة لتلفيف n من المتغيرات العشوائية $y_1, y_2, ..., y_n$ المستقلة عن بعضها البعض والتي يخضع كل واحد منها للتوزيع المنتظم المستمر على الفترة $(0,1)$ ، بمعنى أنه قد توصل لصيغة عامـــة لدالـــة كثافة احتمال المتغير $y = \sum_{i=1}^{n} y_i$. ان هذه الصيغة هي التالية :

$$g_n(y) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\,(y-\ell) \qquad ----(8)$$

$$(\ell, \ell+1)$$

حيث تمثل المعادلتين (2) و (5) حالتين خاصة من الدالة اعلاه عند $n=2$ و $n=4$ علـــى التوالي . فلو أجرينا التحويل $v = T(2y/n-1)$ ، $\partial y/\partial v = n/2T$ ، لحصلنا على الصـــيغة التالية لدالة كثافة أحتمال المتغير v :

$$g_n^*(v) = \frac{n^{n+1}}{2^n T\, n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\left[\frac{v}{T}-\left(\frac{2\ell}{n}-1\right)\right]^{n-1} \qquad ----(9)$$

$$\left[T\left(\frac{2\ell}{n}-1\right), T\left(\frac{2(\ell+1)}{n}\right)\right]$$

وبما أن $\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\,(1-2\ell/n)^{n-1} = 1$ فأن $g_n^*(0) = \frac{n^{n+1}}{2^n T\, n!}$ ، فيمكن في ضوء ذلك كتابة :

$${}_n k_T(v) = \frac{g_n^*(v)}{g_n^*(0)} = \sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\left[\frac{v}{T}-\left(\frac{2\ell}{n}-1\right)\right]^{n-1} \qquad ----(10)$$

$$\left[T\left(\frac{2\ell}{n}-1\right), T\left(\frac{2(\ell+1)}{n}-1\right)\right]$$

<u>لتمثل مقترح دالة وزن عامة</u> . اذ ان دالة وزن بارتلت (المعادلة 4) ودالة وزن بارزن

(المعادلة 7) ، عبارة عن حالتين خاصة من الدالة في (10) اعلاه ، وذلك عند $n=2$ و $n=4$ على التوالي .

ولكي يعطي استخدام دالة الوزن في (10) اعلاه مع الصيغة في (1) افضل تقدير متسق لدالة كثافة الطيف ، فأنه ينبغي أختيار n التي تمثل عدد المتغيرات الملتفة مع بعضها و T التي تمثل قيمة معلمة عرض الحزمة ، بشكل يتفق وسلوك الظاهرة قيد الدراسة والعملية التصادفية التي تسيطر على هذا السلوك .

ان للصيغة المقترحة كدالة وزن في (10) اعلاه جملة من الخصائص ، نذكر منها :

1) بما ان الجزء $(2y/n-1)$ من التحويل $v=T(2y/n-1)$ ، يعني ان نقوم بتحويل الفترة التي يعمل فيها متغير المتوسط $(y=\sum_{i=1}^{n} y_i)/n$ من $(0,1)$ الى $(-1,1)$ ، فأنه استنادا" للصيغة الشائعة للدالة المميزة $\left(\dfrac{Sin(u/n}{u/n}\right)^n$ ، لمتغير متوسط على الفترة $(-1,1)$ ، والتحويل $v=T(2y/n-1)$ ، ستكون الدالة المميزة للمتغير v ، الذي يمتلك دالة كثافة احتمال على وفق الصيغة (9) ، عبارة عن :

$$\Phi_v(u)=\left(\frac{Sin(uT/n)}{uT/n}\right)^n \qquad ----(11)$$

2) دالة توزيع المتغير v ، هي عبارة عن :

$$\begin{aligned} G_n^*(v) &= \frac{n^{n+1}}{2^n T\, n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\int_{T(2\ell/n-1)}^{v}\left[\frac{v}{T}-\left(\frac{2\ell}{n}-1\right)\right]^{n-1} dv \\ &= \frac{(n/2)^n}{n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}\, C_{\ell}^{n}\left[\frac{v}{T}-\left(\frac{2\ell}{n}-1\right)\right]^{n} \qquad ----(12) \end{aligned}$$

3) التوزيع متماثل حول المتوسط $E(v)=0$ ، وبمعامل التواء مقداره صفر ، وعليه فأن العزوم الفردية للمتغير v ستكون أيضا" مساوية للصفر ، أي ان $E(v)^{2r-1}=0$ ، لكل قيم $r=1,2,3,...$ ، اما العزوم الزوجية فيمكن استخراجها على النحو التالي ، ولكل قيم $r=1,2,3,...$ ،

$$E(v)^{2r}=\frac{2n^{n+1}}{(2T)^n n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}C_{\ell}^{n}\int_{T(2\ell/n-1)}^{0}v^{2r}\left[v-T(2\ell/n-1)\right]^{n-1}dv$$

لقد تم في المعادلة اعلاه مايلي :

a) ترتيب حدود دالة كثافة احتمال المتغير v (المعادلة (9)) .

b) لان توزيع المتغير v متماثل حول الصفر ، فقد تم أخذ حدود التكامل من أقل قيمة لمدى المتغير v ، البالغة $T(2\ell/n-1)$ ، ولغاية قيمة تماثل التوزيع $v=0$ وذلك بعد أن تم ضرب المعادلة في 2 للتعويض عن أخذ نصف مدى المتغير فقط .

وبما أن $v^{2r}=(-v)^{2r}$ **وأن** $B(p,q)(b-a)^{p+q-1}=\int_a^b (x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}dx$

فأن :

$$E(v)^{2r}=\frac{n^{n+1}T^{2r}\,B(n,2r+1)}{2^{n-1}n!}\sum_{\ell=0}^{n-1}(-1)^{\ell}C_{\ell}^{n}(1-2\ell/n)^{n+2r}\qquad ----(13)$$

حيث أن $a=T(2\ell/n-1)$ **و** $b=0$ **و** $p=n$ **و** $q=2r+1$.

أما تباين المتغير v فيمكن أستخراجه بالشكل :

$$\begin{aligned}Var(v)&=T^2\,Var(2y/n-1)\\&=\frac{4T^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(y_i)\\&=T^2/3n\qquad ----(14)\end{aligned}$$

يتضح من الصيغة (14) اعلاه ، العلاقة الطردية مابين عدد المتغيرات الملتفة مع بعضها البعض وتجانس قيم المتغير v،فكلما يزداد عدد المتغيرات الملتفة n يزداد تجانس قيم (تتقلص قيمة تباين) المتغير v ، والعكس بالعكس .

4) سبق وذكرنا في معرض تعليقنا على المعادلة (1) بأن دالة الوزن فيها تعمل على ترجيح دالة الارتباط الذاتي ، وأن تحويل فورير لتلك الدالة سينتج مايدعى بمنفذ الطيف ، الذي

يعمل بدوره كدالة وزن لترجيح دالة مخطط الدورية ، لينتج عن ذلك صيغة متسقة أخرى لدالة كثافة الطيف تتكافأ من حيث النتيجة مع الصيغة في (1) .

إن تحويل فورير لدالة الوزن المقترحة من قبلنا والذي يمثل منفذ الطيف المناظر لتلك الدالة ، قد تم التوصل له بعد جملة من العمليات الرياضية ، فكان على وفق الصيغة التالية :

$$ {}_{n}K_{n}(\theta) = \frac{(2/nT)^{n-1}(n-1)!}{n\pi}\left(\frac{Sin(T\theta/n)}{(2/n)Sin(\theta/2)}\right)^{n} \qquad ----(15) $$

ان صيغتي منفذي الطيف المناظرين لدالتي وزن بارتلت [1] وبارزن [15] ،هما عبارة عن حالتين خاصتين من صيغة منفذ الطيف المذكورة في (15) اعلاه ، اذ يذكر برستلي عام 1988 [17] صيغتي المنفذين المذكورين في الصفحتين 439 و 444 على التوالي .

وحيث ان الاوزان ، سواء استخدمت لترجيح دالة الارتباط الذاتي او لترجيح دالة مخطط الدورية ، يجب ان لا تكون سالبة [17] ، فأنه ينبغي أختيار عدد المتغيرات الملتفة مع بعضها البعض في دالة الوزن المقترحة بحيث يكون زوجيا" ، وذلك لان أختيار عدد فردي من المتغيرات ليلتف مع بعضه البعض سينشأ عنه بعض الاوزان السالبة (على وفق المعادلة 15) لترجيح دالة مخطط الدورية .

ان هذا السبب هو الذي دعا بارتلت ليختار متغيرين فقط $n=2$ ليلتفا مع بعضهما البعض ، ودعا بارزن ليختار اربع متغيرات لتلتف مع بعضها البعض $n=4$ ، عند اقتراحهما لدالتي الوزن الشهيرة باسميهما .

V - الجانب التجريبي

تم انجاز دراسة تجريبية بأستخدام المحاكاة لغرض تبيان كيفية تطبيق ماذهبنا اليه في الفقرات السابقة والكشف عن مدى جودة مقترحنا لدالة وزن عامة قياسا" بحالتيها الخاصة ، دالتي الوزن المقترحة من قبل بارتلت وبارزن ، المشهود لهما بالجودة والكفاءة عند تقدير دالة كثافة الطيف وعلى نحو ماسبق واسلفنا من ذكر مصادر تقول بهذا .

V.1- وصف تجربة المحاكاة

تم اجراء تجربة المحاكاة على وفق المواصفات والفروض التالية :

1) تم توليد مشاهدات تخضع لعمليات مستقرة ، لكون التحليل على وفق الصيغة رقم (1) قيد الدراسة يتطلب ذلك ، وبنماذج هي التالية :

(a) انموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ ، وبقيمتي المعلمة $\alpha_1 = 0.5$ و $\alpha_1 = 0.9$ ، وبدالة كثافة طيف فعلية هي :

$$f(w) = \frac{(1-\alpha_1^2)}{2\pi}(1-2\alpha_1 Cos(w)+\alpha_1^2)^{-1} \qquad , \qquad -\pi \le w \le \pi \quad ----(16)$$

(b) انموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ ، وعلى وفق القيم التالية لمعلمتيه $(\alpha_1 = 0.4 \ , \alpha_2 = 0.3)$ و $(\alpha_1 = 0.9 \ , \alpha_2 = 0.8)$ ، وبدالة كثافة طيف فعلية هي :

$$f(w) = \frac{(1-\alpha_2)\left[(1-\alpha_2)^2 - \alpha_1^2\right]}{2\pi(1+\alpha_2)\left[(1-\alpha_2)^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1(1+\alpha_2)Cos(w) + 4\alpha_2 Cos^2(w)\right]} \ , -\pi \le w \le \pi$$

$$----(17)$$

(c) انموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الاولى $X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$ ، وبقيمتي المعلمة $\beta_1 = 0.5$ و $\beta_1 = 0.9$ ، وبدالة كثافة طيف فعلية هي :

$$f(w) = \frac{1-2\beta_1 Cos(w) + \beta_1^2}{2\pi(1+\beta_1^2)} \qquad , \quad -\pi \le w \le \pi \qquad ----(18)$$

(d) انموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية $X_t = \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1} - \beta_2 \varepsilon_{t-2}$ ، وعلى وفق القيم التالية لمعلمتيه $\beta_1 = \beta_2 = 0.5$ و $\beta_1 = \beta_2 = 0.9$ ، وبدالة كثافة طيف فعلية هي :

$$f(w) = \frac{(1+\beta_2)^2 + \beta_1^2 + 2\beta_1(\beta_2 - 1)Cos(w) - 4\beta_2 Cos^2(w)}{2\pi(1+\beta_1^2+\beta_2^2)} \ , \ -\pi \le w \le \pi$$

$$----(19)$$

(e) انموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى الخليط مع المتوسطات المتحركة من الدرجة الاولى $X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \beta_1 \varepsilon_{t-1}$ ، وباقيام المعالم $\alpha_1 = \beta_1 = 0.5$ و $\alpha_1 = \beta_1 = 0.9$ ، وبدالة كثافة طيف فعلية هي :

$$f(w) = \frac{1+\beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1}{2\pi(1-\alpha_1^2)}\left(\frac{1+\beta_1^2 - 2\beta_1 Cos(w)}{1+\alpha_1^2 - 2\alpha_1 Cos(w)}\right) \quad , -\pi \le w \le \pi \quad ----(20)$$

وفي الواقع ، فأنه حتى لو افترضنا بأن $\{X_t\}$ عبارة عن عملية غير مستقرة ، مكونة من $\{X_t^{(i)}\}$ ، $t_i < t \le t_{i+1}$ من العمليات المختلفة المستقرة ، فأنه يمكن دراسة خصائص وسلوك $\{X_t\}$ من خلال دراسة طيف كل عملية مستقرة $\{X_t^{(i)}\}$ ، وعلى وفق الفترة $(t_i, t_{i+1}]$ المناظرة لها ، وكما ورد في الفقرات آنفة الذكر من دراسة للعمليات المستقرة ، لتكتمل فيما بعد صورة مجمل العملية غير المستقرة قيد التحليل . ان هذه الحالة هي ماتدعى في الادبيات العلمية [17] بأسم تحليل الطيف المعتمد على الزمن Time - dependent spectrum)) . وبناء" على ماورد اعلاه ، يمكن القول بأن التجريب على سلاسل زمنية تخضع لعمليات مستقرة ، لا يلغي عمومية الحالة وأمكانية تطبيقها على السلاسل الزمنية التي تخضع للعمليات غير المستقرة .

2) تم أفتراض أن جميع القيم الابتدائية ل X_t و ε_t الضرورية لتوليد X_t $(t = 1,2,...,N)$ ، على وفق النماذج في الفقرة (1) اعلاه ، مساوية للصفر .

3) تم استعمال حجوم عينات مختلفة ، منها ماهو صغير $N = 10$ ، ومنها ماهو متوسط $N = 40$ ، ومنها ماهو كبير $N = 100$.

4) تم اجراء تجريبات مختلفة لجميع التوافيق الممكنة للفروض اعلاه وبحجم مكرر مقداره $R = 500$ لكل مرة .

5) تم افتراض خضوع متغير البواقي ε_t للتوزيع الطبيعي القياسي ، وقد تم توليد مشاهداته على وفق اسلوب بوكس – ميلر ، اذ لو افترضنا ان U_1 و U_2 عبارة عن مشاهدتين مستقلتين عن بعضهما البعض وتخضع كل منهما للتوزيع المنتظم المستمر على الفترة $(0,1)$ فأن :

$$\varepsilon_1 = (-2\,LnU_1)^{1/2}\,Cos(2\pi U_2)$$

$$\varepsilon_2 = (-2\,LnU_1)^{1/2}\,Sin(2\pi U_2)$$

ستكونا عبارة عن مشاهدتين مستقلتين عن بعضهما البعض وتخضع كل منهما للتوزيع الطبيعي القياسي .وبتكرار العملية اعلاه ، فأنه يتم الحصول على حجم العينة المطلوب .

وفي الواقع ، فأننا قد أخترنا خضوع متغير البواقي للتوزيع الطبيعي القياسي فقط ، لسببين هما :

(i) ان صيغة التقدير المتسق لدالة كثافة الطيف ، قيد الاهتمام ، هي صيغة تقدير لامعلمية ، أي انها لا تتأثرمطلقا" بتغير توزيع بواقي السلسلة المزمع اجراء تحليلها بواسطة تلك الصيغة .

(ii) ان الافتراض الاساسي المهم الذي تقوم عليه النماذج المذكورة في (1) اعلاه هو ان تخضع بواقيها لعملية ضوضاء بيضاء (white noise) ، وبما ان كل سلسلة مشاهدات مستقلة عن بعضها البعض وتخضع لذات التوزيع تمثل [17] سلسلة ضوضاء بيضاء ، فأننا وبأختيار خضوع متغير البواقي للتوزيع الطبيعي القياسي وبمشاهدات مستقلة عن بعضها البعض ، نكون قد حققنا هذا الافتراض .

6) ينبغي ان نؤشر بأننا سوف لن نقوم بتقدير قيم معالم أي من النماذج الواردة في الفقرة (1) اعلاه ، لعدم الحاجة لذلك على وفق اهداف البحث ، بل سيتم استخدام صيغ تلك النماذج لغرض توليد مشاهدات سلاسل تخضع لها ، فيما سيتم استخدام قيم دوال كثافة الطيف الفعلية المناظرة لها (على وفق الصيغ من 16 ولغاية 20) لاغراض المقارنة مع القيم التقديرية الناتجة عن تطبيق الصيغة المتسقة لدالة كثافة الطيف (على وفق المعادلة رقم 1) وكما في الفقرة (7) التالية .

7) لغرض التحري عن جودة دالة الوزن المقترحة في هذا البحث،فقد تم استعمال المعايير التالية:

(a) متوسط مربعات خطأ تقدير دالة كثافة الطيف ، وعلى وفق الصيغة التالية :

$$MSE_s = \sum_{j=1}^{500} \frac{\sum_{i=-\pi}^{\pi} \left(\hat{f}_T^{(j)}(w_i) - f^{(j)}(w_i) \right)^2}{(500)(2\pi / 0.01)} \qquad ----(21)$$

حيث ان

i) $f^{(j)}(w_i)$ تمثل قيمة دالة كثافة الطيف الفعلية عند التكرار w_i والمكرر j ، وذلك على وفق الصيغ من 16 ولغاية 20 ، وبأستخدام اقيام المعالم الاصلية المؤشرة في الفقرة (1) .

ii) $\hat{f}_T^{(j)}(w_i)$ تمثل القيمة التقديرية للصيغة المتسقة لدالة كثافة الطيف عند التكرار w_i والمكرر j ، وذلك على وفق المعادلة (1) .

iii) تم اخذ قيم i ابتداء" من $-\pi$ ومن ثم بزيادة مقدارها 0.01 حتى تصل لقيمة π .

(b) مقدار التحيز المطلق عند تقدير دالة كثافة الطيف ، وعلى وفق الصيغة التالية :

$$BIAS_s = \sum_{j=1}^{500} \frac{\sum_{i=-\pi}^{\pi} \left| \hat{f}_T^{(j)}(w_i) - f^{(j)}(w_i) \right|}{(500)(2\pi / 0.01)} \qquad ----(22)$$

(c) متوسط مربعات خطأ التنبؤ بقيمة X_t ، وعلى وفق الصيغة التالية :

$$MSE_p = \sum_{j=1}^{500} \frac{\sum_{t=1}^{N} \left(\hat{X}_t^{(j)} - X_t^{(j)} \right)^2}{N(500)} \qquad ----(23)$$

حيث أن :

i) $X_t^{(j)}$ تمثل قيمة المشاهدة الفعلية ذات التسلسل t عند المكرر j ، والمولدة على وفق النماذج المؤشرة في

الفقرة (1) آنفة الذكر .

ii) $\hat{X}_t^{(j)}$ تمثل القيمة التقديرية للمشاهدة ذات التسلسل t عند المكرر j .

(d) مقدار التحيز المطلق عند التنبؤ بقيمة X_t ، وعلى وفق الصيغة التالية :

$$BIAS_p = \sum_{j=1}^{500} \frac{\sum_{t=1}^{N} \left| \hat{X}_t^{(j)} - X_t^{(j)} \right|}{N(500)} \qquad ----(24)$$

هذا ومن الجدير بالذكر بأن :

i) تم احتساب قيمة $\hat{X}_t^{(j)}$ باستخدام دالة الارتباط الذاتي المقدرة من خلال تحويل فورير المعكوس للصيغة المتسقة لدالة كثافة الطيف . إن هذا الأسلوب كفوء وشائع جدا" للتنبؤ بقيم أية ظاهرة قيد أجراء تحليل الطيف لها .

ii) لا يعول على المعيارين الأولين في التطبيقات العملية ، وذلك لكون دالة كثافة الطيف الفعلية غير معلومة في الواقع . إن المعيارين الأخيرين هما اللذان يعول عليهما في التطبيقات العملية ، إضافة" إلى انه يعول عليهما جنبا" الى جنب مع المعيارين الأولين في التجريب وذلك لامكانية افتراض صيغة دالة كثافة الطيف الفعلية ، وكما جاء في الفقرة (1) أعلاه .

8) لغرض استخراج افضل قيمة لمعلمة عرض الحزمة T ، التي تستخدم لانجاز تحليل طيف اية مسألة قيد الدراسة ، سيتم استعمال احد ابرز طرق استخراج تلك القيمة على الاطلاق ، الا وهي طريقة اغلاق المنفذ [17] ، وهذه الطريقة تقوم على اساس البدء بقيمة صغيرة لمعلمة عرض الحزمة T وحساب دالة كثافة الطيف المقدرة على وفق الصيغة رقم (1) عندها ، والتي ستكون في هذه الحالة ممهدة جدا" (very smooth function) ، ثم نبتدأ بعد ذلك بزيادة قيمة T واحتساب دالة كثافة الطيف كما ورد اعلاه على وفق كل قيمة من قيم T ، فتبدأ تلك الدالة بأظهار التفاصيل شيئا" فشيئا" ،وبأستخدام أي من معايير جودة تمثيل تلك الدالة للمسألة قيد الدراسة (كالمعيارين الأخيرين الواردين في الفقرة السابقة) ، سنتمكن من الوصول الى قيمة T التي تجعل من تقدير دالة كثافة الطيف أفضل مايمكن تمثيلا" للمسألة قيد أنجاز تحليل الطيف .

وفي الواقع ، فأنه لغرض تسريع خوارزمية العمل ، سيتم اللجوء لفكرة الباحث جنكنز عام 1965 [12] ، الذي اقترح ان يتم أخذ ثلاث قيم لمعلمة عرض الحزمة T ، اولهما صغيرة القيمة T_1 ، والثانية متوسطة القيمة T_2 ، والثالثة كبيرة القيمة T_3 ، وان يتم أحتساب

تقدير دالة كثافة الطيف على وفق الصيغة رقم (1) عند كل قيمة من تلك القيم وأحتساب قيم أحد أو بعض معايير الجودة ، وبعد أن يتم ملاحظة عند أي

قيمتين من قيم T تكون دالة كثافة الطيف المقدرة أفضل على وفق هذا المعيار ، نقوم بأخذ ثلاث قيم ل T فيما بينها ، وهكذا نعيد تكرار وتكرار العملية ، حتى نصل الى قيمة T التي تجعل من تمثيل دالة كثافة الطيف للمسألة المدروسة أفضل مايمكن .

9) عند أستخدام دالة الوزن المقترحة ، فأنه ولغرض تحديد أفضل عدد من المتغيرات التي ينبغي لها أن تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي أفضل تقدير لدالة كثافة الطيف (على وفق الصيغة رقم 1) ، فقد تم ولكل مكرر من مكررات توافيق الفروض المختلفة للتجربة ، أستخدام خوارزمية شبيهة بتلك المستخدمة لتحديد قيمة معلمة عرض الحزمة ، والمذكورة في الفقرة السابقة . ان هذا يعني بأن أفضل عدد من المتغيرات التي ينبغي لها ان تلتف مع بعضها البعض ،قد يكون أثنين ، فتصبح دالة الوزن المقترحة ، ماهي الا الدالة المقترحة من قبل بارتلت ، أو قد يكون أفضل عدد من المتغيرات التي ينبغي لها أن تلتف مع بعضها البعض ، هو أربعة ، فتصبح دالة الوزن المقترحة ، ماهي الا الدالة المقترحة من قبل بارزن ، كما قد يكون هذا الافضل عدد من المتغيرات التي ينبغي لها أن تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي أفضل تقدير لدالة كثافة الطيف ، أي عدد زوجي غير الاثنين والاربعة ، على ان لا تزيد قيمته بأي حال من الاحوال على عدد مشاهدات السلسلة قيد التحليل ، اذ ان كل متغير من تلك المتغيرات سيعبر عن مجموعة معينة متجانسة فيما بينها من مشاهدات السلسلة المذكورة ، وسيعطيها بعدها التأثيري ، أي على وفق تأثير كل منها ، فيما تتمخض عنه عملية الالتفاف من دالة تؤثر بشكل كبير في مسار عملية تقدير دالة كثافة الطيف كونها تستخدم في ترجيح أحد ابرز مكونات دالة كثافة الطيف الا وهي دالة الارتباط الذاتي .

وبناء" على ماورد اعلاه ، يمكن لنا أن نستشرف امكانية الاستفادة من معيار آخر للحكم على مدى جودة دالة الوزن المقترحة . ان هذا المعيار يتمثل بالنسبة المئوية لعدد المكررات التي لا يكون العدد الامثل من المتغيرات التي ينبغي لها ان تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي أفضل تقدير لدالة كثافة الطيف ، أحد العددين أثنين أو أربعة .

V . 2 أستعراض النتائج التجريبية

لغرض وضع تجربة المحاكاة الواردة مواصفاتها وفروضها في الفقره (V.1) السابقة موضع التنفيذ ، فقد قام الباحث بكتابة برنامج بلغة فجوال بيزك لهذا الغرض ، وبعد تشغيل البرنامج ، أمكن الحصول على النتائج الواردة مناقشتها أدناه :

1) تتبين في الجدول رقم (1) القيم التجريبية لمتوسط مربعات خطأ تقدير دالـــة كثافـــة الطيـــف MSE_s ، حيث نلاحظ بأن تقدير دالة كثافة الطيف يكون أفضل بزيادة حجم العينـــة لـــدوال الوزن المستخدمة الثلاث ولكافة النماذج قيد التجريب ، على أن :

a) النتائج الناجمة عن أستخدام دالة الوزن المقترحة أفضل من تلك الناجمة عن أستخدام دالتي وزن بارتلت وبارزن ، كما أن النتائج الناجمة عن أستخدام دالة وزن بارزن أفضل من تلك الناجمة عن أستخدام دالة وزن بارتلت .

b) النتائج المتحصل عليها عند التجريب على نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الاولى هي الافضل على الاطلاق ، تليها النتائج المتحصل عليها عند التجريب على انموذج المتوســطات المتحركة من الدرجة الثانية ثم تلك المتحصل عليها عند التجريب على أنموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى ثم النتائج المتحصل عليها عند التجريب على الانموذج الخلــيط للانحــدار الــذاتي والمتوسطات المتحركة من الدرجة الاولى ، وأخيرا" تلك المتحصل عليها عنــد التجريــب علـــى انموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية .

c) النتائج المتحصل عليها عند التجريب على سلاسل قريبة من عــدم الاســتقرارية وعــدم الانعكاسية ، اقل جودة" من تلك المتحصل عليها عند التجريب على سلاسل لا تتمتــع بهــذه المواصفة .

2) تتعزز الرؤية التي أوردناها في النقطة (1) اعلاه ، عند النظر بعين التأمل للجداول المرقمة (2) و(3) و(4) ، حيث تتبين في الجدول رقم (2) القيم التجريبية للتحيز المطلق عند تقدير دالة كثافة الطيف $Bias_s$ ، وتتبين في الجدول رقم (3) القيم التجريبية لمتوسط مربعات خطأ التنبؤ MSE_p ، وتتبين في الجدول رقم (4) القيم التجريبية لمقدار التحيز المطلق للتنبؤ $Bias_p$.

وفي الواقع فأنه وبسبب طبيعة دالة كثافة الطيف وتقديراتها ذات القيم الصغيرة ، فأن القيم الواردة في الجدولين (1) و (2) قد بدت للعيان ، قريبة من بعضها البعض ، وأن صحت أستنتاجاتنا الواردة في النقطة (1) اعلاه على وفقها ، على أن تلك الاستنتاجات تكون أوضح تفصيلا" لمتتبع الجدولين (3) و (4) .

3) تتبين في الجدول رقم (5) النسبة المئوية لعدد المكررات التي لا يكون العـدد الامثـل مـن المتغيرات التي ينبغي لها ان تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي أفضل تقدير لدالـة كثافـة الطيف ، أحد العددين أثنين أو أربعة ، وذلك عند استخدام دالة الطيف المقترحة . حيث نلاحظ مايلي :

a) ان النسب بمجملها ذات أقيام مهمة تؤشر بدورها ضرورة استخدام دالة الوزن المقترحة لتعطي أفضل تقدير لدالة كثافة الطيف .

b) تزايد تلك النسب بزيادة حجوم العينات ، وهذا الامر له مايبرره اذا ما استذكرنا ما سـبق وأدرجنا من ان كل متغير من المتغيرات قيد الالتفاف سيعبر عن مجموعة معينة متجانسـة فيمـا بينها من مشاهدات السلسلة قيد التحليل ليعطيها بعدها التأثيري ، أي على وفق تأثير أي من تلك المشاهدات عند الالتفاف . ان هذا يعني بأن زيادة عدد المشاهدات ستؤدي الى زيادة المتغيـرات التي تعبر عنها ، وهذا يعني بدوره زيادة نسبة المكررات التي لا يكون العدد الامثل من المتغيرات التي ينبغي أن تلتف مع بعضها البعض ، أثنين أو أربعة .

c) ان النسب اكبر في نماذج المتوسطات المتحركة من مثيلاتها في نماذج الانحدار الـذاتي ، وهذا الامر له ما يبرره ايضا" لكون مساهمة العشوائية في تكوين قيمة المشاهدة الحاليـة التـي تخضع لنموذج متوسطات متحركة اكبر من تلك التي تخضع لنموذج انحدار ذاتي [3] . ان هـذا الواقع يدفع بأتجاه زيادة الاختلاف مابين قيم المشاهدات ، الامر الذي يؤدي الى ضـرورة زيـادة عدد المتغيرات التي تعبر عنها والتي ينبغي لها ان تلتف مـع بعضـها الـبعض لتترتـب تلـك المشاهدات على وفق اهميتها التأثيرية . ان الامر اعلاه سيؤدي الى زيادة نسبة المكررات التـي لا يكون العدد الامثل من المتغيرات التي ينبغي ان تلتف مع بعضها البعض ، أثنين أو أربعة .

4) قد يتساءل متساءل ويقول بأن نسبة المكررات التي يكون العدد الامثل من المتغيـرات التـي ينبغي ان تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي افضل تقدير لدالة كثافة الطيـف ، أثنـين أو أربعة ، هو الاخر لا يستهان به ، نقول ، هذا صحيح ، ولكن :

a) بالرغم من ان هذا العدد لايستهان به ، الا انه يبقى اقل (وفي معظم الاحيان بكثير) من نسبة المكررات التي لا يكون العدد الامثل من المتغيرات التي ينبغي ان تلتف مع بعضها البعض ، أثنين أو أربعة ، وبما أن تفكيرنا يجب ان ينصب على ما سيحدث في الواقع التطبيقي ، فأننا يجب أن نفكر منطقيا" بأن النسبة الاعلى هي الافضل ، ذلك لكون كل مكرر تجريبي يمكن ان يتمثل بسلسلة زمنية مشاهدة على أرض الواقع .

ان مخلص الكلام يعني بأن التعامل مع الواقع التطبيقي يقتضي أخذ النسبة الاعلى النجمة عن التجريب بعين الاعتبار .

b) ان دالة الوزن المقترحة تتضمن دالة وزن بارتلت (المؤلفة من متغيرين ملتفين على بعضهما البعض) ، ودالة وزن بارزن (المؤلفة من أربع متغيرات ملتفة على بعضها البعض) كحالات خاصة ، مما يعني بأن استخدامها عندما تقتضي الحالة لا يفسد في الود قضية مع من يتبنى التساؤل الوارد اعلاه .

دالة الوزن	حجم العينة N	النموذج AR(1) $\alpha_1 = 0.5$	AR(1) $\alpha_1 = 0.9$	AR(2) $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.3$	AR(2) $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.8$	MA(1) $\beta_1 = 0.5$	MA(1) $\beta_1 = 0.9$	MA(2) $\beta_1 = 0.5$, $\beta_2 = 0.5$	MA(2) $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = 0.9$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.5$, $\beta_1 = 0.5$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.9$, $\beta_1 = 0.9$
بارتلت	10	0.0252	0.0276	0.0545	0.0596	0.0152	0.0166	0.0172	0.0188	0.0285	0.0312
	40	0.0151	0.0174	0.0327	0.0377	0.0091	0.0105	0.0103	0.0119	0.0171	0.0197
	100	0.0088	0.0161	0.0190	0.0348	0.0053	0.0097	0.0060	0.0109	0.0099	0.0182
بارزن	10	0.0163	0.0186	0.0352	0.0402	0.0098	0.0112	0.0111	0.0127	0.0184	0.0210
	40	0.0131	0.0154	0.0284	0.0334	0.0079	0.0093	0.0089	0.0105	0.0148	0.0174
	100	0.0070	0.0093	0.0150	0.0201	0.0042	0.0056	0.0047	0.0063	0.0079	0.0105
المقترحة	10	0.0111	0.0134	0.0241	0.0291	0.0067	0.0081	0.0076	0.0092	0.0125	0.0151
	40	0.0056	0.0080	0.0122	0.0172	0.0034	0.0048	0.0038	0.0054	0.0063	0.0090
	100	0.0036	0.0059	0.0079	0.0129	0.0022	0.0036	0.0025	0.0041	0.0041	0.0067

جدول رقم (1) : تتبين فيه القيم التجريبية لمتوسط مربعات خطأ تقدير دالة كثافة الطيف MSE_S ، عند حجوم عينات N مختلفة وتحت النماذج التي تمت محاكاتها في الفقرة (V.1.1) ولدوال الوزن المختلفة المذكورة فيه .

دالة الوزن	حجم العينة N	النموذج AR(1) $\alpha_1=0.5$	AR(1) $\alpha_1=0.9$	AR(2) $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$	AR(2) $\alpha_1=0.9$, $\alpha_2=0.8$	MA(1) $\beta_1=0.5$	MA(1) $\beta_1=0.9$	MA(2) $\beta_1=0.5$, $\beta_2=0.5$	MA(2) $\beta_1=0.9$, $\beta_2=0.9$	ARMA(1,1) $\alpha_1=0.5$, $\beta_1=0.5$	ARMA(1,1) $\alpha_1=0.9$, $\beta_1=0.9$
بارتلت	10	0.1498	0.1567	0.3235	0.3722	0.0913	0.1008	0.1005	0.1139	0.1646	0.1963
	40	0.0896	0.0996	0.2039	0.2200	0.0550	0.0654	0.0592	0.0683	0.0995	0.1209
	100	0.0557	0.0985	0.1092	0.2145	0.0315	0.0595	0.0354	0.0665	0.0596	0.1085
بارزن	10	0.1005	0.1144	0.2245	0.2489	0.0620	0.0709	0.0661	0.0748	0.1070	0.1240
	40	0.0782	0.0939	0.1685	0.1923	0.0479	0.0586	0.0573	0.0632	0.0860	0.1117
	100	0.0422	0.0565	0.0921	0.1179	0.0250	0.0321	0.0282	0.0380	0.0452	0.0637
المقترحة	10	0.0678	0.0864	0.1429	0.1709	0.0393	0.0514	0.0439	0.0577	0.0798	0.0914
	40	0.0323	0.0473	0.0742	0.1074	0.0196	0.0309	0.0237	0.0344	0.0391	0.0582
	100	0.0224	0.0366	0.0474	0.0739	0.0129	0.0230	0.0144	0.0256	0.0243	0.0401

جدول رقم (2) : تتبين فيه القيم التجريبية للتحيز المطلق عند تقدير دالة كثافة الطيف BIASS ، عند حجوم عينات N مختلفة وتحت النماذج التي تمت محاكاتها في الفقرة (V.1.1) ولدوال الوزن المختلفة المذكورة فيه .

دالة الوزن	حجم العينة N	النموذج AR(1) $\alpha_1=0.5$	AR(1) $\alpha_1=0.9$	AR(2) $\alpha_1=0.4$, $\alpha_2=0.3$	AR(2) $\alpha_1=0.9$, $\alpha_2=0.8$	MA(1) $\beta_1=0.5$	MA(1) $\beta_1=0.9$	MA(2) $\beta_1=0.5$, $\beta_2=0.5$	MA(2) $\beta_1=0.9$, $\beta_2=0.9$	ARMA(1,1) $\alpha_1=0.5$, $\beta_1=0.5$	ARMA(1,1) $\alpha_1=0.9$, $\beta_1=0.9$
بارتلت	10	20.580	34.596	44.334	82.840	12.543	22.440	13.786	25.318	22.684	43.646
	40	12.300	22.205	28.127	48.936	7.543	14.780	8.148	15.181	13.638	26.899
	100	7.667	21.899	15.010	47.767	4.345	13.255	4.862	14.790	8.215	24.166
بارزن	10	13.779	19.227	30.864	47.681	8.550	13.575	9.065	14.361	14.764	23.738
	40	10.790	15.013	23.216	36.854	6.592	11.206	7.871	12.082	11.827	21.372
	100	5.797	8.101	12.661	22.536	3.436	6.161	3.876	7.272	6.223	12.211
المقترحة	10	9.339	10.695	19.711	27.099	5.389	8.139	6.046	9.144	10.981	14.500
	40	4.425	7.522	10.170	16.976	2.695	4.890	3.264	5.465	5.364	9.201
	100	3.090	5.787	6.515	11.725	1.775	3.643	1.978	4.034	3.348	6.347

جدول رقم (3) : تتبين فيه القيم التجريبية لمتوسط مربعات خطأ التنبؤ MSE_p ، عند حجوم عينات N مختلفة وتحت النماذج التي تمت محاكاتها في الفقرة (V.1.1) ولدوال الوزن المختلفة المذكورة فيه .

دالة الوزن	حجم العينة N	النموذج AR(1) $\alpha_1 = 0.5$	AR(1) $\alpha_1 = 0.9$	AR(2) $\alpha_1 = 0.4$ $\alpha_2 = 0.3$	AR(2) $\alpha_1 = 0.9$ $\alpha_2 = 0.8$	MA(1) $\beta_1 = 0.5$	MA(1) $\beta_1 = 0.9$	MA(2) $\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.5$	MA(2) $\beta_1 = 0.9$ $\beta_2 = 0.9$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.5$ $\beta_1 = 0.5$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.9$ $\beta_1 = 0.9$
بارتلت	10	74.81	113.233	167.538	269.48	45.581	75.959	49.892	100.639	82.025	167.56
	40	47.552	87.932	112.592	181.357	29.719	51.819	33.977	62.136	50.379	98.827
	100	30.262	71.653	51.995	171.77	16.345	49.401	18.680	49.931	30.421	78.733
بارزن	10	42.756	54.701	103.672	123.041	26.838	30.947	30.857	37.094	43.052	58.324
	40	35.898	46.345	66.676	116.495	17.330	27.036	20.213	29.360	39.774	51.732
	100	17.252	21.168	32.248	60.306	10.439	19.376	13.140	19.729	17.568	36.535
المقترحة	10	13.252	19.818	30.629	33.819	7.307	12.192	11.082	16.688	19.568	28.565
	40	9.146	10.092	12.265	28.418	4.560	5.897	7.047	8.613	8.754	16.387
	100	6.557	9.086	11.966	18.596	2.977	4.466	2.411	7.322	5.343	9.686

جدول رقم (4) : تتبين فيه القيم التجريبية للتحيز المطلق للتنبؤ $BIAS_p$ ، عند حجوم عينات N مختلفة وتحت النماذج التي تمت محاكاتها في الفقرة (V.1.1) ولدوال الوزن المختلفة المذكورة فيه .

حجم العينة N	النموذج AR(1) $\alpha_1 = 0.5$	AR(1) $\alpha_1 = 0.9$	AR(2) $\alpha_1 = 0.4$ $\alpha_2 = 0.3$	AR(2) $\alpha_1 = 0.9$ $\alpha_2 = 0.8$	MA(1) $\beta_1 = 0.5$	MA(1) $\beta_1 = 0.9$	MA(2) $\beta_1 = 0.5$ $\beta_2 = 0.5$	MA(2) $\beta_1 = 0.9$ $\beta_2 = 0.9$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.5$ $\beta_1 = 0.5$	ARMA(1,1) $\alpha_1 = 0.9$ $\beta_1 = 0.9$
10	55.111	60.733	31.189	42.305	57.290	69.322	58.012	68.798	43.628	51.227
40	71.918	76.543	49.652	55.489	74.578	79.212	75.369	78.331	68.595	73.278
100	81.325	87.899	66.291	76.211	88.642	94.007	88.197	91.594	71.506	83.992

جدول رقم (5) : تتبين فيه النسبة المئوية لعدد المكررات التي لا يكون العدد الامثل من المتغيرات التي ينبغي لها ان تلتف مع بعضها البعض بحيث تعطي افضل تقدير لدالة كثافة الطيف ، احد العددين اثنين او اربعة ،وذلك عند استخدام دالة الوزن المقترحة .

المصادر

1) Bartlett , M. (1950) " Periodogram analysis and continuous spectra " , Biometrika , Vol.37 , pp.1-16 .

2) Bartlett , M. (1963) " Statistical estimation of density functions " , Sankhya , Ser.A , Vol.25 , pp.245-254 .

3) Brockwell ,P. and Davis ,R. (2002) " Introduction to time series and forecasting " , Springer texts in statistics , USA .

4) Broersen ,P. and Waele ,S. (2001) " Windowed periodograms and moving average models " , Delft university research bulletin , Vol.10 , No.3 , pp.58-71 .

5) Broersen ,P. and waele ,S. (2002) " Some Benefits of aliasing in time series analysis " ,Scandanafian Journal of statistics , Vol.25 , No.4 , pp. 25-43 .

6) Cramer , H. (1946) " Mathematical methods of statistics " , Princeton university press .

7) Daniell , P. (1946) " Discussion on symposium on autocorrelation in time series " , JRSS , Suppl. -8 , pp. 88-90 .

8) Hald , D. (1982) " Kernel discriminate analysis " , John wiley & sons Ltd. , London .

9) Hardle , W. &Kerkyacharian , G. & Picard , D. and Tsybakov , A. (2003) " Wavelets , approximation and statistical applications " , Springer & Verlag , New York .

10) Hare , S. and Francis , R. (1998) " on time series analysis " , Alaska Fishery Research bulletin , Vol.5 , No.1 , pp.67-73 .

11) Harris , F. (1978) " on the use of windows for harmonic analysis with the discrete fourier transform " Proceedings of the IEEE , Vol.66 , No.1 , pp. 51-83 .

12) Jenkins ,G. (1965) " A survey of spectral analysis " ,Appl. Stat. Vol.14 , pp.2-32 .

13) Lanczos , C. (1956) " Applied Analysis " ,Prentice - Hall Company .

14) Neave , H. (1972) " A comparison of lag window generators " , JASA , Vol.67 , No.337 , pp.152-158 .

15) Parzen , E. (1961) " Mathematical considerations in the estimation of spectra " , Technometrics , Vol.3 , pp.167-190 .

16) Priestley , M. (1962) " Basic considerations in the estimation of power spectra " , Technometrics , Vol.4 , pp.551-564 .

17) Priestley , M. (1988) " Spectral analysis and time series " , Academic press , USA .
18) Rosenblatt , M.(1956) " Remarks on some non parametric estimation of adensity function " , Ann. Math. Stat. , Vol.27 , pp.832-837 .
19) Tukey , J. (1949) " The sampling theory of power spectrum estimates " , Proc. Symp. On applications of autocorrelation analysis to physical problems , pp.47-67 , office of naval research , Dept. of the navy , washingeton , USA .
20) Tukey , J. (1959) " An introduction to the measurement of spectra " , in probability and statistics " , ed. U. Grenander , pp.300-330 ,wiley sons , USA .
21) Whittle , P. (1957) "Curve and periodogram smoothing " , JRSS , Ser.B , Vol.19 , pp.38-47 .
22) Wei ,W. (1991) " Time series analysis " , Addison wesley , USA .

....

....

....