دراسة حصانة كل من معياري شوارتز واكياكي لتقدير درجة نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى

إيهاب عبد السلام محمود *

الملخص:

إن موضوع تقدير درجة نموذج الانحدار الذاتي نال اهتماما واسعا من قبل العديد من الباحثين والدارسين في هذا المجال لما له من أهمية كبيرة تعتمد عليها اغلب الدراسات والخطط المستقبلية , حيث كلما كان تقدير النموذج متوافقا مع طبيعة البيانات المدروسة فان هذا يؤدي إلى أن تكون نتائج الدراسة دقيقة وبالتالي الدراسات والخطط المستقبلية ستكون صحيحة وذات أبعاد سليمة ، لذا سيتم في هذا البحث التطرق لدراسة حصانة كل من معياري شوارتز و اكياكي لتقدير درجة نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى ومن ثم المقارنة بين هاتين الطريقتين ولعدد من التوزيعات.

1- المقدمة :- *Introduction*

إن الاهتمام بتحديد درجة نموذج الانحدار الذاتي له أهمية كبيرة للدراسات و الخطط المستقبلية كون أن هذه الدراسات تعتمد على دقة النتائج التي تم الحصول عليها وهذه تعتمد على مدى كفاءة التقدير لكل من درجة النموذج ومعلماته ، وسيتم التركيز في هذا البحث لدراسة كفاءة التقدير لدرجة نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى من خلال دراسة حصانة كل من معياري شوارتز و اكياكي لبعض التوزيعات .

---

* مدرس مساعد / كلية الادارة والاقتصاد/جامعة الكوفة

مقبول النشر بتاريخ 2005/11/15

إن صيغة نموذج الانحدار الذاتي Autoregressive Model من الدرجة (P) والتي يرمز لها اختصاراً (AR(P هي :-

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots\ldots + \phi_p X_{t-p} + a_t \qquad \ldots\ldots.(1.1)$$

حيث أن :-

at :- متغير البواقي .

عندما تكون (P = 1) فان النموذج يطلق عليه نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى أو عملية ماركوف (AR(1 وصيغته هي :-

$$X_t = \phi X_{t-1} + a_t \qquad \ldots\ldots\ldots(1.2)$$

وعندما تكون قيمة (ϕ =1) فان النموذج يطلق عليه نموذج المسار العشوائي (Random Walk Model) وصيغته هي :-

$$X_t = X_{t-1} + a_t \qquad \ldots\ldots\ldots(1.3)$$

1-1 هدف البحث :-

من الملاحظ أن معياري شوارتز و اكياكي يتشابهان إلى حد كبير في الصيغ والمعادلات الرياضية وان درجة الاختلاف بينهما تكاد تكون ضئيلة ، لذا سيتم في هذا البحث دراسة حصانة كل من هذين المعيارين وإجراء المقارنة بينهما لمعرفة مدى أهمية هذا الاختلاف من خلال إتباع أسلوب المحاكاة لتوليد سلاسل زمنية لعدد من التوزيعات وباحجام عينات مختلفة لنموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى ولعدد من الحالات منها ما هو مستقر ، غير مستقر وعملية المسار العشوائي .

2 تقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي :-

يوجد عدد من الطرائق لتقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي منها :-

i - طريقة المربعات الصغرى :- (O.L.S) .

ii - طريقة الامكان الأعظم :- (M.L.E) .

iii- طريقة (Yule – Walker) او طريقة العزوم (Moments Method).

وسيتم التطرق للطريقة الثالثة بالتفصيل .

2-1 طريقة (Yule - Walker) :-

في هذه الطريقة تم اعتماد أسلوب العزوم لتقدير معالم نموذج الانحدار الذاتي من خلال الاعتماد على معامل الارتباط الذاتي من الدرجة (P) لتشكيل عدد من المعادلات ، وهي :-

$$\left\{\begin{array}{l} \rho_1 = \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_2 + \dots\dots\dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 + \dots\dots\dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ . \\ . \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots\dots\dots + \phi_p \rho_0 \end{array}\right\} \qquad \dots\dots(2.1)$$

وبحل هذه المعادلات يتم الحصول على متجه التقديرات التالي :-

$$\underline{\hat{\phi}} = P_p^{-1} \cdot \underline{\hat{\rho}}_p \qquad \dots\dots(2.2)$$

حيث أن :-

$$\underline{\hat{\phi}} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} , \quad P_p = \begin{pmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \hat{\rho}_2 & \hat{\rho}_1 & 1 & \dots & \hat{\rho}_{p-3} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} , \quad \hat{\rho}_p = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\rho}_p \end{pmatrix}$$

بسبب تعذر حساب (ρ_i) في التطبيق العملي ، لذا تم التعويض عنها بمقدراتها ($\hat{\rho}_i$) بدلا عنها .

3ـ معيار شوارتز : (SC)

ان تقدير درجة نموذج الانحدار الذاتي هو الركيزة الأساسية التي يستند اليها الباحث لدراسة التنبؤات المستقبلية للسلسلة المدروسة ، فعندما تكون دقة التقدير عالية فان هذا يؤدي إلى أن تكون النتائج المستخلصة دقيقة وذات مصداقية قريبة للواقع ، لذا فقد تم إتباع عدد من طرائق التقدير منها اعتماد دراسة سلوك دالة الارتباط الذاتي ودالة الارتباط الجزئي لتقدير درجة نموذج الانحدار الذاتي ، لكن هذا الأسلوب ليس صحيحا دائما كما يشير إليه الكثير من الباحثين لان تقديريهما يعتمد على سلوك تباين الخطأ وبالتالي فان النتائج ستكون غير دقيقة ، لان هذا التباين يتناقص نسبيا كلما ازدادت قيمة (P) ، لذلك فان ازدياد عدد المعالم يؤدي إلى تقيده ، وعليه فقد تم إيجاد طرائق أخرى ذات كفاءة عند ازدياد عدد المعالم ومنها طريقة الباحث شوارتز ، حيث اشتق المعيار الاتي :-

$$Sc(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + k \ \ln(n) / n \qquad .....(3.1)$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \hat{X}_t)^2 / n \qquad ......(3.2)$$

حيث أن :-

k : عدد معلمات النموذج .

n : حجم العينة .

ويتم اختيار افضل تقدير لـ (P) التي تحقق اقل قيمة للصيغة (3.1) أي أن :

$$Sc(\hat{P}) = \mathrm{Min}\ \{ \ Sc(k) \qquad , \ k = 1,2, \ ....., m \ \} \qquad ....(3.3)$$

4- معيار اكياكي : (AIC)

اشتق الباحث اكياكي (Akaike) معياراً سمي باسمه وعرف فيما بعد باسم { معيار معلومات اكياكي Akaike Information Criteration} (AIC) وصيغته هي :

$$AIC(k) = \ln \hat{\sigma}_k^2 + (2k / n) \qquad ......(4.1)$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \hat{X}_t)^2 / n \qquad .....(4.2)$$

وأيضا لاختيار أفضل تقدير لـ (P) هي التي تحقق اقل قيمة للصيغة (4.1) أي أن:

$$AIC(\hat{P}) = \text{Min}\ \{ AIC(k) \quad , k = 1,2, \ldots, m \} \qquad ....(4.3)$$

5- الجانب التجريبي : Experimental Part

سيتم في هذا الجانب استعراض وصفا لأسلوب توليد البيانات وكيفية تحليل نتائجها وفقا للحالات المدروسة.

5-1 وصف تجربة المحاكاة :

Simulation Experiment Description

لقد تم بناء تجربة المحاكاة لدراسة كفاءة كل من معياري شوارتز واكياكي ومن ثم المقارنة بينهم من خلال توليد بيانات لنموذج AR(1) بالفروض والموصفات التالية :

i – تم افتراض أحجام العينات الآتية : (n=10,25,50,100,200,300)..

ii – تم افتراض عدة قيم لمعلمة نموذج AR(1) منها مايجعل السلسلة مستقرة (ϕ= -0.8,-0.5,0.5,0.8) ومنها ما يجعل السلسلة غير مستقر (ϕ =-1.5,1.5) وسلسلة ذات مسار عشوائي عندما(ϕ=1) .

iii– تم اختيار التوزيعات الاتية كتوزيعات لحد الخطأ العشوائي : توزيع ويبل المستمر (Weibull

(Distribution بالمعلمتين ($\alpha = 2$ ؛ $\beta = 0.3$) , توزيع بيتا المستمر (Beta Distribution) بالمعلمتين ($\alpha = 3$ ؛ $\beta = 0.3$) والتوزيع الهندسي المتقطع (Geometric Distribution) بالمعلمة (P = 0.3) .

iv- بعد توليد البيانات وفقا للمواصفات اعلاه سيتم تقدير معالمات النموذج حسب طريقة (Yule - Walker) التي تم ذكرها سابقا وللحالات الاتية : عندما تكون (P=1) واقحام نموذجين عندما (P=2) و(P=3) لمعرفة مدى حصانة كل من معياري شوارتز واكياكي لتقدير درجة نموذج الأنحدار الذاتي .

v- تكرر التجربة (500) مرة لكل التوافيق السابقة .

vi- بعد تطبيق كل من طريقتي شوارتز واكياكي للنماذج السابقة الذكر يتم اعتماد المقياسين الاتيين لغرض التحري عن جودة كل منهما لتقدير درجة نموذج الانحدار الذاتـــي .

$$\text{TSR} = \frac{\text{عدد مرات توافق الدرجة المقدرة مع الدرجة الفعلية للنموذج}}{500} \quad .....(5.1)$$

$$\text{MSE} = \frac{\sum_{i=1}^{500} (\hat{p}_i - p_i)^2}{500} \quad .....(5.2)$$

حيث أن :

($\hat{p}_i$) : تمثل درجة نموذج الانحدار الذاتي المقدر.

5-2 استعراض النتائج التجريبية :
Demonstration of Experiment Results

يلاحظ أن هناك تشابه كبير بين نتائج كل من معياري شوارتز واكياكي , وسيتم في هذا الجانب استعراض اهم النتائج التجريبية التي تم الحصول عليها بالاعتماد على المقياسين (TSR) و (MSE) لكل توزيع وكما موضح ادناه .

أولا تـوزيـع ويبـــل : Weibull Distribution

من خلال دراسة نتائج الجدول رقم (1) يلاحظ ما ياتي :

i – تكون الحالة المثلى للمعيارين عندما تكون السلسلة غير مستقرة وذات مسار عشوائي وبكافة احجام العينات المدروسة ، سواء كانت الإشارة موجبة ام سالبة .

ii – عندما تكون السلسلة مستقرة وذات اشارة موجبة فان كلا المعيارين بصورة عامة أعطيا نتائج جيدة عند أحجام العينات الصغيرة ولكن تقل كفاءتهما تدريجيا عند ازدياد حجم العينة حيث يلاحظ انخفاض قيم (TSR) وازدياد قيم (MSE) ، أما في حالة كون الإشارة سالبة فان كلا المعيارين ضعيفين عند أحجام العينات الصغيرة ويفشلان بازدياد حجم العينة حيث يلاحظ أن قيم (TSR) تكون مساوية للصفر .

ثانيا تـوزيـع بيتـــا : Beta Distribution

من خلال دراسة نتائج الجدول رقم (2) يلاحظ ما ياتي :

i– تكون الحالة المثلى للمعيارين عندما تكون السلسلة غير مستقرة وبكافة أحجام العينات المدروسة . سواء كانت الاشارة موجبة ام سالبة .

ii– عندما تكون السلسلة مستقرة فان كلا المعيارين ضعيفين عند أحجام العينات الصغيرة ويفشلان بازدياد حجم العينة حيث يلاحظ أن قيم (TSR) تكون مساوية للصفر ، سواء كانت الإشارة موجبة أم سالبة .

iii– عندما تكون السلسلة ذات مسار عشوائي وذات حجم صغير فان كلا المعيارين أعطيا نتائج جيدة ولكن بازدياد حجم العينة ينهار كل منهما .

ثالثا : التـوزيـع الهندسـي Geometric Distribution

من خلال دراسة نتائج الجدول رقم (3) يلاحظ ما ياتي :

i – ان كلا المعيارين اعطى نتائج حصينة جدا عندما تكون السلسلة غير مستقرة وذات مسار عشوائي وبكافة احجام العينات المدروسة ، وسواء كانت الاشارة موجبة ام سالبة .

ii- عندما تكون السلسلة مستقرة فان كلا المعيارين اعطى نتائج حصينة عند حجوم العينات الصغيرة ولكن تنخفض جودة هذين المعيارين كلما ازدادت احجام العينات ، حيث يلاحظ انخفاض قيم (TSR) وازدياد قيم (MSE) بشكل ملحوظ ، ولا يوجد تاثير ملحوظ للاشارة .

6- الاستنتاجات والتوصيات :
Conclusion and Recommendation

6-1 الاستنتاجات :

من خلال تجربة المحاكاة التي اجريت وتحليل نتائجها ، فقد تم التوصل الى بعض الاستنتاجات هي :

i- ان الاختلاف في الصيغة الرياضية بين معياري شوارتز واكياكي لم يعطي اي فرق في النتائج للتجربة المدروسة .

ii- كلا المعيارين أعطيا نتائج حصينة جدا عندما تكون السلسلة غير مستقرة ولكافة التوزيعات المدروسة .

iii- بالنسبة لتوزيع ويبل تم الحصول على نتائج حصينة في حالة المسار العشوائي ولكافة أحجام العينات المدروسة ، وفي حالة كون السلسلة مستقرة فان النتائج عندما تكون الإشارة موجبة هي الأفضل ولكن تنخفض جودتها بازدياد حجم العينات .

iv- بالنسبة لتوزيع بيتا وفي حالة المسار العشوائي تم الحصول على نتائج جيدة في حالة كون حجم العينة صغير ولكنها تفشل بازدياد حجم العينة ، وفي حالة كون السلسلة مستقرة فان كلا المعيارين اعطى نتائج ضعيفة وينهار كل منهما بازدياد حجم العينات ولا يوجد تأثير للإشارة .

v- بالنسبة للتوزيع الهندسي تم الحصول على نتائج حصينة في حالة المسار العشوائي ، وفي حالة كون السلسلة مستقرة فان كلا المعيارين اعطى نتائج جيدة عند أحجام العينات الصغيرة ولكن تنخفض جودتهما بشكل ملحوظ عند احجام العينات الكبيرة ، وسواء كانت الاشارة موجبة ام سالبة .

2-6 التوصيات:

i- نوصي باستخدام احدى المعيارين عندما تكون السلسلة غير مستقرة ولكافة التوزيعات المدروسة ، وفي حالة المسار العشوائي لتوزيعي ويبل والهندسي .

ii- عند خضوع متغير الخطا لتوزيع ويبل نوصي باستخدام احدى المعيارين عندما تكون السلسلة مستقرة وذات اشارة موجبة لاحجام العينات الصغيرة .

iii- عند خضوع متغير الخطا للتوزيع الهندسي نوصي باستخدام احدى المعيارين عندما تكون السلسلة مستقرة ولاحجام العينات الصغيرة .

جدول رقم (1)

نتائج توزيع **Weibull**

n / ϕ		10	25	50	100	200	300
نتائج معيار شوارتز							
-1.5	TSR	0.928	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.156	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.928	2.032	1.942	1.756	1.456	1.246
-0.5	TSR	0.054	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.738	1.990	1.864	1.990	1.828	1.840
0.5	TSR	0.462	0.476	0.402	0.188	0.046	0.000
	MSE	0.538	0.524	0.598	0.812	0.954	1.000
0.8	TSR	0.612	0.570	0.582	0.596	0.566	0.494
	MSE	0.388	0.430	0.418	0.404	0.434	0.506
1	TSR	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
نتائج معيار اكياكي							
-1.5	TSR	0.912	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.178	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.988	2.272	2.290	1.810	1.450	1.126
-0.5	TSR	0.054	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.924	2.234	2.218	2.134	1.996	1.894
0.5	TSR	0.416	0.362	0.156	0.036	0.002	0.000

	MSE	0.584	0.638	0.844	0.964	0.998	1.000
0.8	TSR	0.614	0.448	0.348	0.320	0.204	0.130
	MSE	0.386	0..552	0.652	0.680	0.796	0.870
1	TSR	0.970	0.990	0.990	0.996	0.996	1.000
	MSE	0.030	0.010	0.010	0.004	0.004	0.000
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

جدول رقم (2)

نتائج توزيع Beta

نتائج معيار شوارتز							
n / ϕ		10	25	50	100	200	300
-1.5	TSR	0.994	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.018	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.100	1.876	1.93	2.266	1.870	2.512
-0.5	TSR	0.016	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.044	2.522	1.600	1.066	1.887	1.048
0.5	TSR	0.012	0.022	0.006	0.000	0.000	0.000
	MSE	0.988	0.978	0.994	1.000	1.000	1.000
0.8	TSR	0.130	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	0.870	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1	TSR	0.742	0.018	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	0.258	0.982	1.000	1.000	1.000	1.000
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

نتائج معيار اكياكي							
-1.5	TSR	0.980	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.032	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	2.278	1.558	1.564	1.738	2.062	1.966
-0.5	TSR	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	1.706	1.594	1.822	2.860	2.632	1.138
0.5	TSR	0.082	0.004	0.002	0.002	0.000	0.000
	MSE	0.918	0.996	0.998	0.998	1.000	1.000
0.8	TSR	0.110	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	0.890	1.00	1.000	1.000	1.000	1.000
1	TSR	0.794	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	MSE	0.206	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

جدول رقم (3)

نتائج توزيع Geometric

نتائج معيار شوارتز							
n / ϕ		10	25	50	100	200	300
-1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.500	0.544	0.256	0.048	0.000	0.000
	MSE	0.500	0.498	0.744	0. 952	1.000	1.000
-0.5	TSR	0.550	0.538	0.314	0.062	0.002	0.000
	MSE	0.880	0.810	1.080	1.190	1.130	1.102

0.5	TSR	0.801	0.742	0.677	0.600	0.368	0.226
	MSE	0.330	0.258	0.326	0.400	0.632	0.774
0.8	TSR	0.776	0.838	0.822	0.846	0.818	0.746
	MSE	0.224	0.162	0.178	0.154	0.182	0.254
1	TSR	0.956	0.950	0.958	0.972	0.976	0.984
	MSE	0.040	0.050	0.042	0.028	0.024	0.016
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
نتائج معيار اكياكي							
-1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.8	TSR	0.300	0.348	0.112	0.002	0.000	0.000
	MSE	0.700	0.754	0.888	0.998	1.000	1.000
-0.5	TSR	0.360	0.346	0.124	0.008	0.000	0.000
	MSE	1.200	1.194	1.476	1.472	1.330	1.108
0.5	TSR	0.611	0.578	0.480	0.306	0.134	0.026
	MSE	0.400	0.422	0.520	0.694	0.866	0.974
0.8	TSR	0.701	0.684	0.628	0.572	0.472	0.320
	MSE	0.332	0.316	0.372	0.428	0.528	0.680
1	TSR	0.821	0.884	0.910	0.924	0.894	0.924
	MSE	0120	0.116	0.090	0.076	0.106	0.076
1.5	TSR	1.000	1.000	1.000	0.954	1.000	1.000
	MSE	0.000	0.000	0.000	0.046	0.000	0.000

7ـ المصادر : Reference

7-1 المصادر العربية :

1- الخاقاني , طاهر ريسان دخيل .(2000) , "استخدام المحاكاة للتحري عن تقدير التنقية الموائمة (Adaptive Filtering) لنماذج الانحدار الذاتي مع تطبيق عملي " , رسالة ماجستير – كلية الادارة والاقتصاد , الجامعة المستنصرية .

2- عبد , صلاح حمزة وحسن , اياد جواد . (2003) , "استخدام المحاكاة للتحري عن حصانة معيار اكياكي لتقدير درجة عملية الانحدار الذاتي " , المجلة العراقية للعلوم الاحصائية (5) (-239 .216

7-2 المصادر الاجنبية :

1- Akaike , H . (1969)" Fitting Auto Regression For Prediction " Annals. of The Institute of Statistical Mathematics . 21,243-247 .
2- Judje , A . , Lee , R . and Griffths , T . (1987)" Theory And Practice of Econometric " Wiley Series .
3- Lutkepoh , H . (1985)" Comparison of Criteria For Estimating The Order of Avector Auto Regressive Process " J. Time Series Anal . 6, 35-52 . Correcting , 8 (1987) , 373 .
4- Rahmi ,Y . and Yakup , K . (1998)" Anticipated Versus Unanticipated Money in Turkey " Yapi Kredi Economic Review . (15-25)
5- Tapio , S . and Arnold , N . (2001)" Algorithm 808 : AR Fit A mat lab Package For The Estimation of Parameters And Eigenmodes of Multivariate Auto Regressive Models " ACM Transaction on Mathematical Software . Vol . 27 , No 1 March 2001 , 58-65 .

....

....

....