مجلة أبحاث كلية التربية الأساسية ، المجلد ١٩، العدد (١)، لسنة ٢٠٢٣

College of Basic Education Researchers Journal. ISSN: 7452-1992 *Vol. (19), No.(1), (2023)*

تكوين توزيع توب ليون رايلي المرفوع مع التطبيق

هند عادل أحمد **هيفاء عبد الجواد سعيد**

قسم الاحصاء والمعلوماتية/ كلية علوم الحاسوب والرياضيات/ جامعة الموصل/ الموصل/ العراق

(قدم للنشر في ٢٠٢٢/١٠/٣ قبل للنشر في ٢٠٢٢/١١/٨)

الخلاصة:

ان عائلة Topp-Leone (TL) هي احدى الطرق المستخدمة في تعميم التوزيعات الاحتمالية لتجعلها اكثر مرونة في التطبيق. فقد استخدم هذا التعميم في تعميم توزيع رايلي المرفوع Exponentiated Rayleigh (ER)، ودرست خصائص التوزيع الجديد تمثلت بالعزم ذو الرتبة (r) حول الصفر والوسيط والمنوال والربيعات والدالة المولدة للعزوم والالتواء والتفلطح. قدرت معلمات التوزيع بطريقة الامكان الاعظم ((Maximum likelihood (ML). طبقت نتائج التقدير على بيانات مولدة بأحجام عينات وقيم مختلفة للمعلمات. مع التطبيق على بيانات تمثلت بأطوال الالياف الكاربونية المشبعة توصل البحث الى اهم الاستنتاجات منها ان معلمة القياس ليس لها اي تأثير على مقياسي الالتواء والتفلطح في حين ان المعلمة المضافة كان لها تأثير على المقياسين. وقد اصبح توزيع (TLER) اكثر مرونة من توزيع (ER) وعندما يكون حجم العينة n=25,50,100 وتبين في الجانب التطبيقي ان متوسط مربعات الخطا (MSE) يقل بزيادة حجم العينة وثبوت معلمة القياس وعند المقارنة بين MSE للمقدرات عندما = λ 0.5,1,2 فقد تبين ان المقدرات عندما α=٠,٧٥ هي الافضل لامتلاكها اصغر MSE. وان اطوال الالياف الكاربونية تتبع توزيع (TLER).

الكلمات المفتاحية: عائلة Topp-Leone، توزيع رايلي المرفوع، توزيع رايلي، طريقة الامكان الاعظم.

مجلة أبحاث كلية التربية الأساسية ، المجلد ١٩، العدد (١)، لسنة ٢٠٢٣
College of Basic Education Researchers Journal. ISSN: 7452-1992 *Vol. (19), No.(1), (2023)*

Configure the Top Lion Riley distribution uploaded with the application

Hind Adel Ahmed **Haifa Abdel-Gawad Saeed**

Department of Statistics and Informatics/ College of Computer Science and Mathematics/ University of Mosul/ Mosul/ Iraq

Abstract

The Topp-Leone (TL) family is one of the methods used to generalize probability distributions to make them more flexible in application. This generalization was used to generalize the Exponentiated Rayleigh (ER) distribution, this distribution called Topp Leone Rayleigh (TLR). The statistical properties of the new distribution were studied represented by the r-order moments around zero, median, mode, quartiles, and moment generating function, skewness and kurtosis. The parameters of distribution were estimated by the maximum likelihood (ML) method. The results of the estimation method were applied to data generated with different sample sizes and values for the parameters. With the application of data represented by the lengths of the saturated carbon fibres, the research reached the most important conclusions, including that the scale parameter does not affect the skewness and kurtosis measures. While the additional parameter affected the two measures. The TLER distribution became more flexible than the ER distribution. On the practical side, it was found that the mean square error (MSE) decreases with increasing sample size. When the sample size is n = 25,50,100 and the scale parameter is fixed, and When λ = 0.5,1,2 it was found that the estimators when α = 0.75 are the best for having the smallest MSE. The lengths of carbon fibres follow the TLER distribution.

Keywords: Topp-Leone Family, Exponentiated Rayleigh Distribution, Rayleigh Distribution, maximum likelihood Method.

١. المقدمة

لقد حظيت التوزيعات الاحتمالية اهتماما كبيرا من اجل تحقيق مرونة افضل في نمذجة العديد من الظواهر اذ تفتقر التوزيعات الاحتمالية المعروفة الى تلك المرونة بالأخص عند وجود التواء في بيانات الظواهر المعقدة لذلك فقد تزايد اهتمام الباحثين الى تعميم تلك التوزيعات لتصبح اكثر مرونة في التطبيق. يعتمد اسلوب التعميم على اضافة معلمات الى معلمات التوزيعات الاساسية

فقد استندت بعض تلك الطرق على توزيع بيتا او توزيعات احتمالية من توزيع بيتا بحيث يكون منطلق (Domain) المتغير يقع ضمن الفترة [٠،١] فقد قدم Eugene et al (٢٠٠٢) عائلة توزيع بيتا مستخدمين الدالة التجميعية لمتغير عشوائي w~Beta(a,b) وهي:

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x w^{a-1} \quad (1-w)^{b-1} \quad dw \tag{1}$$

فاذا تم استبدال (x) بالدالة التجميعية G(x) لأي توزيع اساسي فان عائلة الدالة التجميعية لبيتا المعممة تصبح بالشكل الاتي:

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} \, dw \tag{2}$$

حيث ان B(a,b) تمثل دالة بيتا الكاملة

اقترحت توزيعات احتمالية ابسط من توزيع بيتا ومعرفة ضمن الفترة المغلقة (٠،١) كتوزيع كوماراسوامي وتوزيع توب− ليون فقد قدم Cordiero and Castro (2011) عائلة توزيعات كوماراسوامي اذ ان الدالة التجميعية لهذه العائلة تأخذ الشكل الاتي:

$$F(x) = 1 - (1 - (G(x))^{\alpha})^{\beta}$$

قدم Nadarajah and Kotz (2013) توزيع توب ليون الذي يعد من ابسط التوزيعات الاحتمالية الذي استخدمه الاحصائيون كبديل عن توزيع بيتا حيث ان دالته التجميعية تأخذ الشكل الاتي:

$$F_{TL(x)} = x^{\alpha} \quad (2-x)^{\alpha} \qquad \text{حيث ان} \quad 0 < x < 1,\ \alpha > 0 \tag{3}$$

واستخدم Shomrani et al (2016) الدالة التجميعية المعرفة في المعادلة (٣) اعلاه ليقدموا تعميما جديدا كبديل عن تعميم بيتا سمي بعائلة توزيعات توب ليون حيث ان الدالة التجميعية لهذا التعميم تأخذ الشكل الاتي:

$$G_{TL-G(x)} = \left(F(x)\right)^{\alpha} (2 - F(x))^{\alpha} \qquad -\infty < x < \infty,\ \alpha > 0 \tag{4}$$

باشتقاق طرفي المعادلة (٤) نسبة الى (x) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية لعائلة توب ليون وهي كالاتي :

$$g_{TL-G(x)}) = 2\alpha f(x)\left(1 - F(x)\right)F(x)^{\alpha-1}(2 - F(x))^{\alpha-1} \tag{5}$$

واعطوا Shomrani et al (2016) مثالا عن استخدام التعميم المعرف في المعادلة (٤) على التوزيع الاسي

واستخدم Al - Saiary and Bakoban (2020) هذا التعميم على التوزيع الاسي المقلوب المعمم للتوزيع الاساسي ودرست خصائص التوزيع ومقدراته بطريقة الامكان الاعظم (ML)

يعد توزيع رايلي المرفوع هو تعميم لتوزيع رايلي والذي نتج من رفع الدالة التجميعية لتوزيع رايلي لقوى معينة موجبة فاذا كان المتغير العشوائي x~ER(λ,ө) تكون الدالة التجميعية ودالة كثافة الاحتمال للتوزيع تأخذ الشكل الاتي:

$$F(x) = (1 - e^{-\theta x^2})^{\lambda} \tag{6}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2\lambda\theta x e^{-\theta x^2} (1 - e^{-\theta x^2})^{\lambda-1} & \lambda, \theta, x > 0 \\ 0 & 0.w \end{cases} \tag{7}$$

فاذا كان توزيع *ER* هو توزيع اساسي وبتعويض كل من *F(x)* و *f(x)* المعرفة في المعادلتين (٦) و(٧) بالمعادلتين (٤) و(٥) العامة نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية لتوزيع توب ليون رايلي المرفوع وكما بالصورة الاتية :

$$G(x) = (1 - e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha}(2 - (1 - e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha} \tag{8}$$

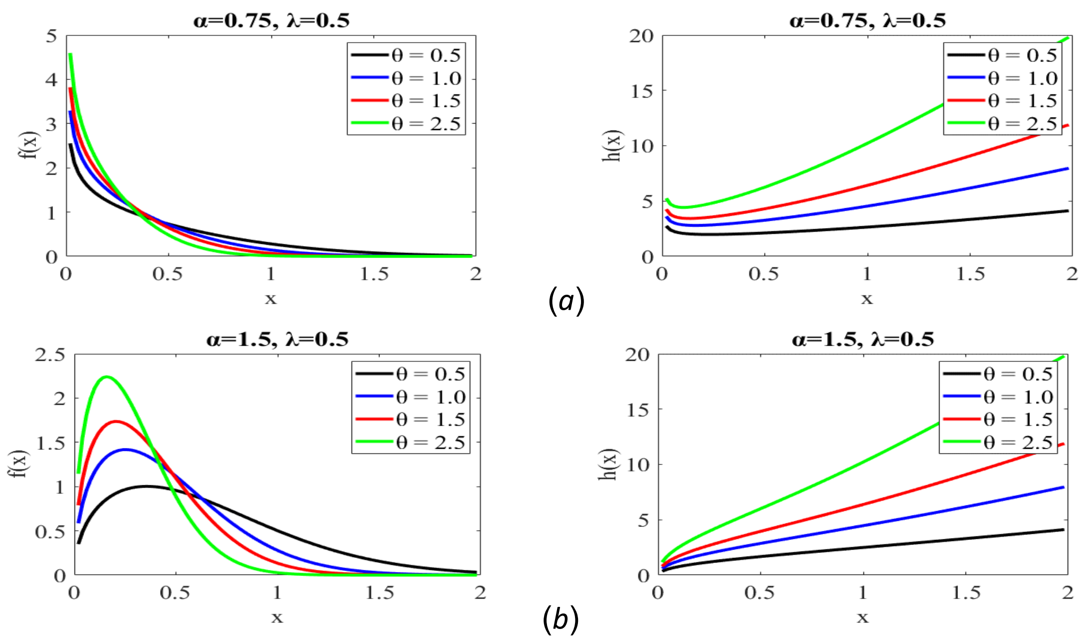
$$g(x)=\begin{cases}4\alpha\theta\lambda x e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha-1}(1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha-1} & x,\alpha,\theta,\lambda>0\\ 0 & 0.w\end{cases} \quad (9)$$

يوصف هذا التوزيع ب $x\sim TLER(\alpha,\theta,\lambda)$ اذ ان αوλ تمثلان معلمتي الشكل و θ تمثل معلمة القياس

وتكون دالتي الموثوقية والخطر معرفتين وفق المعادلتين (٩) و(١٠) على الترتيب:

$$s(x)=1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha}(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha} \quad (10)$$

$$h(x)=\frac{4\alpha\theta\lambda x e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha-1}(1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha-1}}{1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha}(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha}} \quad (11)$$



الشكل ١. رسم دالتي كثافة الاحتمال والخطر لتوزيع TLER عند قيم مختلفة للمعلمات.

٢. خصائص التوزيع:

يتم في هذا الجزء دراسة بعض خصائص توزيع TLER وكالاتي:

العزم ذو الرتبة r حول الصفر:

يكون العزم ذو الرتبة r حول الصفر للمتغير العشوائي x هو:

$$Ex^r=4\alpha\theta\lambda x\int_0^{\infty}x^{r+1}e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha-1}(1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha-1}\,dx \quad (12)$$

حيث ان r هو عدد صحيح موجب

وباستخدام مفكوك ذو الحدين على المقدار $(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha-1}$ وبعد اجراء التبسيطات الرياضية نحصل على:

$$Ex^r=2^{\alpha+1}\alpha\theta\lambda\sum_{k=0}^{\infty}C_k^{\alpha-1}(-\tfrac{1}{2})^k[\int_0^{\infty}x^{r+1}e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda(\alpha+k)-1}dx-\int_0^{\infty}x^{r+1}e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda(\alpha+k+1)-1}dx \quad (13)$$

وباستخدام مفكوك ذو الحدين على المقدارين $(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda(\alpha+k)-1}$ و $(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda(\alpha+k+1)-1}$ واجراء التبسيطات الرياضية تصبح المعادلة (١٢).

$$Ex^r = 2^{\alpha+1}\alpha\theta\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{2}\quad C_k^{\alpha-1}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\quad C_j^{\lambda(\alpha+k)-1}\frac{\Gamma\frac{r+2}{2}}{2((j+1)\theta)^{\frac{r+2}{2}}}-$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{2}\quad C_k^{\alpha-1}\sum_{r=0}^{\infty}C_r^{\lambda(\alpha+k+1)-1}\;\frac{\Gamma\frac{r+2}{2}}{2((r+1)\theta)^{\frac{r+2}{2}}} \tag{14}$$

المنوال:

يمثل المنوال قيمة المتغير العشوائي (x) الذي يجعل f(X) التي سبق تعريفها في المعادلة (٨) ليمثل حلا للمعادلة الاتية نسبة الى (x):

$$\frac{1}{x}-2\theta x+(\lambda\alpha-1)\frac{2\theta xe^{-\theta x^2}}{\left(1-e^{-\theta x^2}\right)}-\frac{2\lambda\theta xe^{-\theta x^2}\left(1-e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(1-\left(1-e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)}-(\alpha-1)\frac{2\lambda\theta xe^{-\theta x^2}\left(1-e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(2-\left(1-e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)}=0 \tag{15}$$

تستخدم الطرق العددية كطريقة نيوتن رافسون في حل المعادلة (١٣) وقد حسب المنوال عند قيم مختلفة للمعلمات والنتائج مبينة في الجدول (١).

الجدول ١. مقاييس الالتواء والتفلطح والوسيط والمنوال لتوزيع TLER عند قيم مختلفة لمعلماته.

λ	α	Θ	Mo	Me	SK	Kur
0.5	0.75	0.5	٠	٠.٣١٩٩	٠.٢٣٥	١.١٩٩٣
		1	٠	٠.٢٢٦٢	٠.٢٣٥	١.١٩٩٣
		1.5	٠	٠.١٨٤٧	٠.٢٣٥	١.١٩٩٣
		2.5	٠	٠.١٤٣١	٠.٢٣٥	١.١٩٩٣
	1.5	0.5	٠.٣٥٦٧	٠.٥٧٧٢	٠.١٢٨١	١.٢٠١٣
		1	٠.٢٥٢٢	٠.٤٠٨١	٠.١٢٨١	١.٢٠١٣
		1.5	٠.٢٠٦	٠.٣٣٣٢	٠.١٢٨١	١.٢٠١٣
		2.5	٠.١٥٩٥	٠.٢٥٨١	٠.١٢٨١	١.٢٠١٣

دالة الربيعات:

يتم ايجاد دالة الربيعات في حل المعادلة (١٤) ادناه نسبة الى (x) وهي:

$$(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha}(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha}=q$$

وبعد اجراء التبسيطات على المعادلة (١٤) تصبح بالشكل الاتي :

$$2(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda}-((1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^2=(q)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{16}$$

نفرض ان

$$w=(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda} \tag{17}$$

بتعويض المعادلة (١٦) في المعادلة (١٥) نحصل على:

$$w^2-2w+(q)^{\frac{1}{\alpha}}=0 \tag{18}$$

يتم حل المعادلة (١٧) نسبة الى w نحصل على:

$$w = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(q)^{\frac{1}{\alpha}}}}{2}$$

ويتم اختيار w التي تكون قيمتها محصورة بين (١,٠) حيث ان

$$w = \frac{2 - \sqrt{4-4(q)^{\frac{1}{\alpha}}}}{2} \qquad (19)$$

بتعويض المعادلة (١٨) في المعادلة (١٦) واجراء العديد من العمليات الرياضية تكون دالة الربيعات هي:

$$x(q) = \sqrt{\frac{-\ln\left(1-(q)^{\frac{1}{\alpha}}\right)}{\theta}} \qquad (20)$$

حيث ان ٠<q<1 وتستخدم المعادلة (١٩) في توليد المشاهدات العشوائية من توزيع TLER وعند التعويض عن $q=\frac{1}{2}$ نحصل على الوسيط للتوزيع وعند $q=\frac{1}{4}$ نحصل على الربيع الاول وعندما $q=\frac{3}{4}$ نحصل على الربيع الثالث وحسب الوسيط عند قيم مختلفة للمعلمات وكما مبين في الجدول (١).

الالتواء والتفلطح:

يتم ايجاد الالتواء والتفلطح رياضيا باستخدام دالة الربيعات من خلال الصيغ الاتية على التوالي:

$$skewness = \frac{Q(3/4)+Q(1/4)-2Q(1/2)}{Q(3/4)-Q(1/4)} \qquad (21)$$

$$kurtosis = \frac{Q(3/8)-Q(1/8)+Q(7/8)-Q(5/8)}{Q(6/8)-Q(2/8)} \qquad (22)$$

حسب مقياسي الالتواء والتفلطح عند قيم مختلفة للمعلمات وكما مبينة في الجدول (١) Cordeiro and Lemonte (٢٠١٢)

الدالة المولدة للعزوم (m.g.f):

تكوم الدالة المولدة للعزوم للمتغير العشوائي (x) لتوزيع TLER

$$M_x(t) = 4\alpha\theta\lambda \int_0^\infty e^{tx}\, e^{-\theta x^2}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha-1}(1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda}) \qquad (23)$$

وباستخدام مفكوك ماكلوريان على e^{tx} واجراء التبسيطات الرياضية تكون(m.g.f) بالشكل الاتي :

$$M_x(t) = 2^{\alpha+1}\alpha\theta\lambda \sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{2}\quad C_k^{\alpha-1}\ \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\quad C_j^{\lambda(\alpha+k)-1}\ \frac{\Gamma\frac{m+2}{2}}{2((j+1)\theta)^{\frac{m+2}{2}}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-1}{2}\quad C_k^{\alpha-1}\ \sum_{r=0}^{\infty}\ C_r^{\lambda(\alpha+k+1)-1}\ \frac{\Gamma\frac{m+2}{2}}{2((r+1)\theta)^{\frac{m+2}{2}}} \qquad (24)$$

التقدير بطريقة الامكان الاعظم (ML):

يتم في هذا الجزء تقدير معلمات التوزيع بطريقة (ML) وبفرض جميع المعلمات غير معلومة وعند توفر (n) من المشاهدات العشوائية تكون دالة الامكان بالشكل الاتي:

$$L(\alpha,\theta,\lambda) = 4^n\alpha^n\theta^n\lambda^n \prod_{i=1}^{n} xi\ \ e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} xi^2} \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda\alpha-1} \prod_{i=1}^{n}(1-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda}) \prod_{i=1}^{n}(2-(1-e^{-\theta x^2})^{\lambda})^{\alpha-1} \qquad (25)$$

بأخذ اللوغارتم الطبيعي لطرفي المعادلة (٢٤) نحصل على:

$$\ln l(\alpha,\theta,\lambda) = nln4 + nln\alpha + nln\theta + nln\lambda + \sum_{i=1}^{n} lnxi - \theta \sum_{i=1}^{n} xi^2 + (\lambda\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - e^{-\theta x^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right) + (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} ln\left(2 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right) \quad (26)$$

بأخذ المشتقات الجزئية الاولى لطرفي المعادلة (٢٥) نسبة الى λوθوα ومساواة المشتقات الجزئية بالصفر نحصل على:

$$\frac{n}{\alpha} + \lambda \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - e^{-\theta x^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} ln\left(2 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right) = 0 \quad (27)$$

$$\frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} xi^2 + (\lambda\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{xi^2 e^{-\theta xi^2}}{\left(1 - e^{-\theta x^2}\right)} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda xi^2 e^{-\theta xi^2}\left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(1 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)} - (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda xi^2 e^{-\theta xi^2}\left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(2 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{n}{\lambda} + \alpha \sum_{i=1}^{n} ln\left(1 - e^{-\theta x^2}\right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{2\lambda\theta xi e^{-\theta xi^2}\left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(1 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)} - (\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n} \frac{2\lambda\theta xi e^{-\theta xi^2}\left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda-1}}{\left(2 - \left(1 - e^{-\theta x^2}\right)^{\lambda}\right)} = 0 \quad (29)$$

ان منظومة المعادلات اللاخطية ٢٦ و٢٧ و٢٨ يتم حلها بأحد الطرق العددية كطريقة نيوتن رافسون

التوزيع التقريبي لمتجه المعلمات المقدرة́$(\alpha, \theta, \lambda)$ $\underline{\delta}$ هو $(\underline{\delta}, V)$ N3 ~ $\hat{\underline{\delta}}$ حيث ان

$$V = -\left[\frac{\partial^2 \mathrm{lnL}\,(\underline{\delta})}{\partial \underline{\delta} \partial \underline{\delta}'}\right]^{-1}$$

٣. الجانب التطبيقي:

يتضمن هذا الجزء استخدام بيانات مولدة من توزيع TLER مع استخدام بيانات حقيقية

البيانات المولدة:

تم توليد مشاهدات عشوائية من توزيع TLER بأحجام عينات مختلفة (n=25,50,100) وقيم مختلفة للمعلمات α = (0.75,1.5,2.5) و(θ=0.5,,١,١.٥,٢.٥) و (λ=٠.٥,١,٢) وقد استخدمت الدالة العكسية المعرفة في المعادلة (١٩) في توليد مشاهدات العينات وكررت التجربة ١٠٠٠ مرة. قدرت معلمات التوزيع بطريقة (ML) وباستخدام طريقة نيوتن رافسون في حل المعادلات اللاخطية المعرفة في المعدلات (٢٨-٢٦) وحسب معيار متوسط مربعات الخطا (MSE) والنتائج مبينة في الجدول (٢):

College of Basic Education Researchers Journal. ISSN: 7452-1992 *Vol. (19), No.(1), (2023)*

الجدول ٢. مقدر الامكان الاعظم ومتوسط مربعات الخطا لمعلمات توزيع TLER عند قيم مختلفة للمعلمات

λ	n	α	θ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	MSE
0.5	25	0.75	0.5	٠,٨٧١٨	٠,٦٨٩٢	٠,٦٦٨٣	٠,٥٨٥٦
			1	٠,٧٧٠٢	١,٢٦٢٥	٠,٧٤٤	٠,٩١٢٦
			1.5	٠,٨٦٣٨	١,٦٥١٧	٠,٦٠١٦	٠,٦٧٢٨
			2.5	٠,٩٤١٩	٢,٨٥٨٤	٠,٥٧٨٦	١,١٤٧
	50		0.5	٠,٨٠٩٩	٠,٥٥٨٦	٠,٥٩٣٩	٠,٣٠٢١
			1	٠,٧٨٦	١,٠٧٩٩	٠,٥٦٥	٠,٢٤٨
			1.5	٠,٨٩٤٣	١,٥٧٧٣	٠,٥٢٣١	٠,٤٦١
			2.5	٠,٨٤٨٦	٢,٦٠٨٥	٠,٥٥٦٦	٠,٤١٩
	100		0.5	٠,٧٦٩٢	٠,٥٥١٧	٠,٦٧٨٦	٠,٤٢
			1	٠,٨٤٥٩	١,٠٨٧٦	٠,٥٨٣٦	٠,٣٥٣
			1.5	٠,٧١٥٦	١,٦٧٧٨	٠,٦٨١٩	٠,٥٢٨
			2.5	٠,٧٥٥٦	٢,٦٢٢٧	٠,٦١٣٧	٠,٥٦٤
	25	1.5	0.5	١,٤٦	٠,٦٣٧٣	٠,٧٢٥٣	٠,٨٠٤٥
			1	١,٣٨٧	١,٢٣٩١	٠,٧٦٢٤	١,٠٢٣٥
			1.5	١,٤٩٠٨	١,٩٣٤٢	٠,٦٩٥٥	١,٣٨٢٥
			2.5	١,٦٨٥٦	٢,٨٧٥٧	٠,٥٣٩٦	١,١٢٨٦
	50		0.5	١,٤٧٣	٠,٥٧١٦	٠,٥٩٢٦	٠,٢٧٩٢
			1	١,٥١٣٥	١,٠٥٨٦	٠,٥٥٦٦	٠,٢٧٨١
			1.5	١,٤٣٨٢	١,٦٤٩٣	٠,٥٨٩٧	٠,٤٥٢٢
			2.5	١,٥٠٢٣	٢,٧٠٩٧	٠,٥٨٤	٠,٥٧٦٥
	100		0.5	١,٣٩٠١	٠,٥١٨٤	٠,٥٦٠٢	٠,١٦٥٢
			1	١,٤٦٢٥	١,٠٤٧١	٠,٥٤٩٩	٠,٢٠٢٩
			1.5	١,٣٩٢٢	١,٦٣٣٣	٠,٥٩٧	٠,٣٧٨٥
			2.5	١,٣٧٤٣	٢,٥٢١٢	٠,٥٧٥٥	٠,٣٨٦١
	25	2.5	0.5	٢,٤٠٩	٠,٥٧٥٣	٠,٥٨٨٧	٠,٣٢١٥
			1	٢,٥١٤٢	١,١٢٢٨	٠,٥٦٤١	٠,٤٩٤١
			1.5	٢,٥١٤٦	١,٦٣	٠,٥٧٢٨	٠,٧٣٥١
			2.5	٢,٤٩٣١	٢,٨٩١٨	٠,٥٩٩٢	١,٤٧٣
	50		0.5	٢,٥٣٦٩	٠,٥٣٧٣	٠,٥٣٣٩	٠,٢٤٠٥
			1	٢,٤٥٦٨	١,٠٧٣٣	٠,٥٦٩٥	٠,٢٨٦٦
			1.5	٢,٥٢٣٤	١,٥٨٩٢	٠,٥٢٧	٠,٢٨١٤
			2.5	٢,٤٩٧١	٢,٦٣٥٢	٠,٥٣٧٩	٠,٤٥١٦
	100		0.5	٢,٤٧٩٣	٠,٥١٩٣	٠,٥١٦	٠,٠٨٩٢
			1	٢,٥٠٧١	١,٠٥٤٧	٠,٥٢٦١	٠,١٨٣٥
			1.5	٢,٤٧٦٧	١,٥٨	٠,٥٣٠٩	٠,٢٢٢
			2.5	٢,٤٨٧	٢,٦٤٦٨	٠,٥٤٠٥	٠,٥١٣٣

λ	n	α	θ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	MSE
1	25	0.75	0.5	٠,٨٢٧٣	٠,٥٢٧٢	٠,٠٩٠٥
			1	٠,٨٤٩٧	١,١١٨٣	٠,١٥٠١
			1.5	٠,٨٤٠١	١,٦٩٠٥	٠,٣٦٥٨
			2.5	٠,٨٣٢١	٢,٨٥٠١	٠,٧٨
	50		0.5	٠,٧٩٠٣	٠,٥٢٨٨	٠,٠٣٥٢
			1	٠,٧٩٥	١,٠٥٣٩	٠,٠٧٤٦
			1.5	٠,٨٠٥٤	١,٦٣٩٢	٠,١٣٩٣
			2.5	٠,٧٨٩٧	٢,٦٠٢٤	٠,٣٦٤
	100		0.5	٠,٧٤٦١	٠,٥٠٧٣	٠,٠١٠٥
			1	٠,٧٦٨٨	١,٠٣٦٤	٠,٠٣٧٤
			1.5	٠,٧٦٨٦	١,٥٢٧٢	٠,٠٥٩٢
			2.5	٠,٧٦١٣	٢,٥٢٣٩	٠,١١٥٥
	25	1.5	0.5	١,٧٠٠٣	٠,٥٥٥٩	٠,٣٢١٩
			1	١,٥٥٨٥	١,٠٣٣	٠,٢٧٠٨
			1.5	١,٧١٩٣	١,٥٩٨	٠,٦٢٢٣
			2.5	١,٧٣١٩	٢,٧١٦٣	١,٠٤٠١
	50		0.5	١,٦٤٩٦	٠,٥٢٦٨	٠,١٥٣٤
			1	١,٥٥٨٩	١,٠١٨٣	٠,١٧٩١
			1.5	١,٦١٩٣	١,٥٨٢	٠,٢١٦٦
			2.5	١,٦٠٤١	٢,٦٣١٧	٠,٣٤٦٦
	100		0.5	١,٥٢٥٤	٠,٥٠٨٨	٠,٠٦١١
			1	١,٥٥٣٣	١,٠٢٥٧	٠,٠٦٧٦
			1.5	١,٥٣٢٩	١,٥٠٨٢	٠,٠٨٠٧
			2.5	١,٥٩٣٥	٢,٦١٥٩	٠,١٩٤٩
	25	2.5	0.5	٢,٥٩٢٢	٠,٥١٦٧	٠,٥٢٧
			1	٢,٩٤٣٤	١,٠٧٨٣	١,٠٦٩
			1.5	٢,٩٥٢٢	١,٦١٧٩	١,٣٥١٦
			2.5	٣,٠٦٨٥	٢,٦٦٧٨	٣,٨٥٩١
	50		0.5	٢,٧٤٠٩	٠,٥١٨٤	٠,٤٣٨٨
			1	٢,٦٣٤١	١,٠٢١٦	٠,٣٥٨١
			1.5	٢,٦٧٨١	١,٥٥١٨	٠,٣٥٤
			2.5	٢,٦٣٥٥	٢,٥١٥	٠,٥١٢٧
	100		0.5	٢,٦٠٤٢	٠,٥٠٩١	٠,١٤٧٥
			1	٢,٥٧٦	١,٠١٦٣	٠,١٧٦٣
			1.5	٢,٦٥٤٧	١,٥٣١٤	٠,٣٠١٧
			2.5	٢,٦١٥١	٢,٥٤٣١	٠,٢٨٢

λ	n	α	θ	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$	MSE
2	25	0.75	0.5	٠,٨٧١٦	٠,٥٣٩٥	٢,١٢٠١	٠,٤٨٤
			1	٠,٨٨٤٧	١,٠٦٦٧	٢,٠٥٥	٠,٥٨٩٦
			1.5	١,١٠٩٧	١,٦٣٧	٢,٠٤١٨	١,٤٦٥٤
			2.5	١,٢١٤٥	٢,٨٥٥٩	٢,١١٦٦	٢,٤٨٥٢
	50		0.5	٠,٨١	٠,٥٢١٦	١,٩٩٧٤	٠,١٢١٤
			1	٠,٩٤٩٩	١,٠٠٨٨	١,٩٩٢٦	٠,٧٦٥٥
			1.5	١,٠٠٥٣	١,٥٣٩٦	١,٩٧٨٣	٠,٩٨٠٥
			2.5	٠,٩٤٢٧	٢,٥٣٩٨	١,٩٩٨	٠,٩٠٧٢
	100		0.5	٠,٨٤١٨	٠,٥٠٤٨	٢,٠٣٨٢	٠,٤٩٦١
			1	٠,٨٥٧٦	٠,٩٩٣٣	١,٩١٣٢	٠,٢٨٥٩
			1.5	٠,٩٣٦٤	١,٥٠٨٢	١,٨٩٣٦	٠,٥٦٩٣
			2.5	٠,٨٨٨٣	٢,٥١٢٣	١,٩٩٢٧	٠,٧٠٣٢
	25	1.5	0.5	١,٥٦٧٤	٠,٥١٨٨	٢,١٥٤	٠,٤١٧٧
			1	١,٦٥٩٣	١,٠٤٨٤	٢,٠٩٨٩	٠,٧٤٢٤
			1.5	١,٨١٧٢	١,٥٨٦٧	٢,٢٧٦١	٢,٠٤٨٧
			2.5	١,٧٩٦٣	٢,٧٨٥	٢,٤٩٤٢	٣,٢٠١٥
	50		0.5	١,٥٨٤٢	٠,٥٠٩٢	٢,٠٧٤٦	٠,٤١٨٨
			1	١,٦٥٦٤	١,٠٣٦١	٢,٠٦٩٨	٠,٥٥٥٩
			1.5	١,٧٠٧٤	١,٥٦٠٣	٢,٠٣٨	٠,٦١٨٢
			2.5	١,٦٦٣٦	٢,٦٢٥٧	٢,١٣٤	١,١٣٦٥
	100		0.5	١,٥٣٩٩	٠,٥٠٧٦	٢,٠٧٧٨	٠,٢٠٧٧
			1	١,٥٥٣٩	١,٠٠٩٣	١,٩٩٢٦	٠,١٠٥٣
			1.5	١,٦٢٧٧	١,٥٢٥٦	٢,٠٤١٦	٠,٥٠٦٧
			2.5	١,٦٠٦٣	٢,٦١٢٧	٢,٣٠٦٧	١,٤٣٧٧
	25	2.5	0.5	٢,٥٧٦٢	٠,٥٢٨٦	٢,١٤٤٢	٠,٢٩٩٩
			1	٢,٦٥٩٦	١,٠١٨	٢,١٠٦٢	١,٢٢٨٦
			1.5	٢,٥٦٧١	١,٦٣٨٣	٢,٣٩٩٦	١,٤٥٨٢
			2.5	٢,٧١٦٧	٢,٦٧٨١	٢,٤٧٩٨	٣,٢٢٠٣
	50		0.5	٢,٥٦٤٢	٠,٥١٧٥	٢,١٢٨٣	٠,٣١٩١
			1	٢,٥٥٠٧	١,٠٢٨١	٢,١٢٦	٠,٦٤٨٣
			1.5	٢,٦٦٤١	١,٥٥٤	٢,١٤٥٢	١,٢٧٢٢
			2.5	٢,٤٥٤٢	٢,٧٣١١	٢,٥٧٢٣	٢,٣٥٨٩
	100		0.5	٢,٥٠٧٧	٠,٤٩٩٢	٢,٠٠٩٤	٠,٠٤٣١
			1	٢,٥٤٢٩	١,٠٢٣٩	٢,٠٦٥٢	٠,٠٩٧٢
			1.5	٢,٥٧٣٢	١,٥٤٢١	٢,١٦٢١	٠,٩٢١
			2.5	٢,٦٥٥	٢,٥٦٣٣	٢,٢٠١	١,٥٢٠٧

نلاحظ من الجدول (٢) اعلاه:

١- يقل MSE لمقدرات ML بزيادة حجم العينة وثبوت معلمات التوزيع

- البيانات الحقيقية:

تم استخدام بيانات Ahmed et al (2021) اطوال الالياف الكاربونية المشبعة (بمقياس ١٠ مليمتر) تحت الشد والجدول (٣) يمثل بيانات الدراسة.

الجدول ٣. اطوال الالياف الكاربونية المشبعة مقاسة بالعشرة مليمتر تحت تأثير الشد.

1.901, 2.132, 2.203, 2.228, 2.257, 2.350, 2.361, 2.396,2.397, 2.445, 2.454, 2.474, 2.518, 2.522, 2.525, 2.532, 2.575, 2.614, 2.616, 2.618, 2.624,2.659, 2.675, 2.738, 2.740, 2.856, 2.917, 2.928, 2.937, 2.937, 2.977, 2.996, 3.030, 3.125,3.139, 3.145, 3.220, 3.223, 3.235, 3.243, 3.264, 3.272, 3.294, 3.332, 3.346, 3.377, 3.408, 3.435, 3.493, 3.501, 3.537, 3.554, 3.562, 3.628, 3.852,3.871, 3.886, 3.971, 4.024, 4.027,4.225, 4.395, 5.020

تم اختبار جودة توفيق البيانات المبينة في الجدول (٣) اعلاه باختباري مربع كاي وكولموكروف سمير نوف عند مستوى معنوية (٠.٠٥) وكانت النتائج مبينة بالجدول (٤) الاتي:

الجدول ٤. اختبار حسن المطابقة لبيانات الدراسة

test	Calculated value	Critical value
Chi-squar	٢.٨٥٤	٣.٨٤١
k.s.	٠.٠٨٤٦	٠.١٧٦

لذلك فان بيانات الجدول (٣) تتبع توزيع TLER

قدرت معلمات التوزيع بطريقة الامكان الاعظم وكما مبينة في الجدول (٥) ادناه:

الجدول ٥. مقدرات الإمكان الأعظم لمعلمات توزيع TLER للبيانات الحقيقية

Parameters	ML	MSE
α	31.9824840	16.23672
θ	0.5291509	0.0001805998
λ	0.1508879	0.00617105

٤. الاستنتاجات:

نلخص اهم الاستنتاجات في البحث بالاتي:

١. ليس لمعلمة القياس اي تأثير على مقياس الالتواء والتفلطح بينما المعلمة المضافة α لها تأثير على الالتواء والتفلطح حيث يقل الالتواء ويزداد التفلطح بزيادة قيمة المعلمة المضافة.
٢. لقد اصبح توزيع TLER اكثر مرونة من توزيع ER وهذا واضح من الاشكال المختلفة لمنحنى دالة المخاطرة للتوزيع. حيث يكون في (a) منحنى دالة كثافة الاحتمال يأخذ الشكل الاسي المتناقص بسرعة بينما دالة الخطر تأخذ الشكل (J) المتزايد ببطئ ويقترب من الشكل الخطي عندما تكون معلمة القياس ٠.٥=ɵ بينما في الشكل (b) اخذ منحنى (p.d.f) الالتواء الموجب ومنحنى دالة الخطر اخذ شكل (J) المقلوب والمتزايد ببطئ.
٣. يقل متوسط مربعات الخطا لمقدرات ML بزيادة حجم العينة وثبوت معلمات التوزيع.
٤. نستنتج ان التقدير بنموذج TLR افضل من TLER وذلك لكون MSE عندما λ =١ اقل من MSE عند القيم الاخرى ل λ وعندما$\alpha.$ =٠.٧٥,1.5
٥. عندما يكون حجم العينة n=25,50,100 وثبوت معلمة القياس وعند المقارنة بين MSE للمقدرات عندما $\lambda =$ 0.5,1,2 فقد تبين ان المقدرات عندما $\alpha =$ ٠.٧٥ هي الافضل لامتلاكها اصغر MSE.
٦. لقد تبين ان اطوال الالياف الكاربونية تتبع توزيع TLER.

5. References

[1] Z.A. AL- Saiary and R.A. Bakoban, "The Topp- leone generalized inverted exponential distribution with real data applications", *Entropy*, 22 , pp. 1-15, 2020.

[2] A. AL-Shomrani, O. Arif, A. Shawky, S. Hanif and M.Q. Shahbaz, "Topp-Leone Family of distribution: some properties and Application", *Pak.j.stat.oper.res*. vol. 12, no. 3, pp. 443-451, 2016.
[3] A. Ahmad, R. Tripathi and A. Afaq, "Topp Leone Power Rayleigh Distribution With Properties And Appligation In Engineering Science", vol. 20, Issue 11, pp. 2853-2877, 2021.
[4] G.M. Cordeiro and M.de Castro, "A new family of generalized distribution", *J. of stat. comp. and sim*. vol. 81, no. 7, pp. 883-898, 2011.
[5] G.M. Cordeiro and A.J. Lemonte, "The Mcdonald inverted beta distribution", *Journal of the Franklin Institute,* 349(3) pp. 1174-1197, 2012.
[6] N. Eugene, C. Lee and F. Famoye, "Beta-Normal distribution and its applications", *comm.in statist: Theory and Methods*, vol. 31, pp. 497-512, 2002.
[7] F. Famoye, C. Lee, and O. Olumolade, "The Beta-Weibull Distribution", *Journal of statistical Theory and Applications*, 4(2), pp. 121-136, 2005.
[8] S. Hanook, M.Q. Shahbaz, M. Mohsin and G. Kibria, "A Note on Beta Inverse Weibull Distribution",*Comm. In Statist :Theory and Methods*, 42(2), pp. 320-335, 2013.
[9] S. Nadarajah and S. Kots, "Moments of some J-shaped distribution". *Journal of Applied Statistics,* 30, pp. 311-317. 2003.