طريقة عددية لحساب التكاملات الثنائية عددياً ذات المكاملات المختلة المشتقات الجزئية باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع تعجيل رومبرك عندما تكون اعداد الفترات الجزئية على البعدين غير متساوية

علي حسن محمد سرمد رحمان حسين زينب فليح حسن

كليـة التربية للبنـات –جــامعة الكـوفة

alhllilysarmad@gmail.com zainabalshamairy@gmail.com

الخلاصة

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة عددية لحساب التكاملات الثنائية البعد والتي مكاملاتها مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في منطقة التكامل , وإيجاد الصيغة العامة لصيغة الخطأ عندما يكون المكامل معتل المشتقة في احدى نهايتي منطقة التكامل. وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بتحسين نتائج التكاملات باستخدام تعجيل رومبرك١٩٦٧ , فوجدنا ان الطريقة RT_i (الطريقة مركبة من استخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الخارجي y والداخلي x) مع تطبيق تعجيل رومبرك عليها عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x غير مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي y (وبحالة خاصة $n_2 = 2n_1$) بمعنى ان $(h_2 = \frac{1}{2}h_1)$ حيث ان h_1 تعني المسافات بين الاحداثيات السينية و h_2 هي المسافات بين الاحداثيات الصادية . يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثنائية عددياً حيث اعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً.

الكلمات المفتاحية: (طريقة عددية , تكامل ثنائي , تعجيل رومبرك , قاعدة شبه المنحرف)

Abstract

The main aim of this search is to derive numerical rule to calculate double integrals, It's integrand continuous but it's partial deriveatives are singular at one end of region of the integrals and to find the general form of the errors (correction terms) to it. We use Romberg acceleration١٩٦٧ to improve the values of double integrals ,we yieled that the method RT_i (compound method by using Trapezoidal rule on both dimensions exterior y and interior x) with applying Romberg acceleration when the number of the intervals that divide to it the period of integral on the interior dimension x is un equal to the number of the intervals that divide to it the period of the integral on the exterior dimension y (especially $n_2 = 2n_1$) means that $\left(h_2 = \frac{1}{2}h_1 \right)$ where, h_1 means the distance between the coordinates y - axis and h_2 are the distances between the coordinates x -axis. It can be depend on it to find the values of double integrals numerically with high accuracy and using little subintervals.

Keywords : (Numerical Method , Double Integrals , Romberg acceleration, Trapezoidal Rule)

1-المقدمة

ان للتكاملات الثنائية أهمية في ايجاد مساحة السطوح وايجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وايجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي , ومثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho = 2(1 - \cos\theta)$ حول المحور القطبي , فضلاً عن اهميته في ايجاد مساحة سطح منحن كإيجاد مساحة قطعة السطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب $\rho = (1 - \cos\theta)$ او حساب مساحة قطعة الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ الواقعة داخل الأسطوانة $y^2 + z^2 = 6y$. فرانك

آريز 1988 , وقد عمل الكثير من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن عام 2002 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال , دافييز و روبينوتز عام 1975.

وفي عام 1984 عالج محمد التكاملات ذات المكاملات المستمرة او المعتلة في المشتقة أو المعتلة وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغاريتمي أم وذلك باستخدام طرائق مركبة ومنها

١. رومبرك (كاوس)التي استخدام فيها طريقة رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة كاوس على البعد الداخلي x.
٢. كاوس (رومبرك) التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعد الخارجي y وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي x.
٣. كاوس (كاوس)التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعدين الخارجي y والخارجي x.
٤. رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x.

وقد بين من خلال المقارنة بين الطرائق المراكبة أعلاه وعلى امثلة متعددة بان الطريقة المركبة من كاوس (كاوس) هي الافضل من بقيت الطرائق بالنسبة لحساب التكاملات التي مكاملاتها مستمرة على البعدين واثبت بنفس الوقت ان الطريقة المركبة من رومبرك (كاوس) هي الافضل في حساب التكاملات التي مكاملاتها معتلة المشتقة او معتلة والتي يمكن الغاء اعتلالها على البعد الداخلي x من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي عام 2002 قدم محمد طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع طريقة تعجيل رومبرك وعلى البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن الغاء الاعتلال فيها وعلى البعدين x, yواسماها طريقة رومبرك (رومبرك) حيث ان $\bar{E}(\bar{h})$ (حدود التصحيح للبعد الداخلي x) تعتمد على سلوك المكامل وقد اعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

اما الطائي فقد استخدمت في عام 2005 قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x مع اهمال الاعتلال على البعد الداخلي x وأعطت نتائج جيدة من حيث من الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وبعدد قليل من الفترات الجزئية.

وفي عام 2009 قدم كل من محمد واخرون بحثا في ايجاد القيم العددية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة وتنالوا فيه ثلاث طرائق وهي:

$RT(RS)$, $RM(RS)$, $RS(RS)$ اذ ان هذه الطرائق استخدمت قاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وكل من قاعدة سمبسون وقاعدة النقطة الوسطى وقاعدة شبه المنحرف على البعد الخارجي y وباستخدام تعجيل رومبرك على كلا البعدين x و y مع عدم اهمال الاعتلال في كلا البعدين. وقد اثبتوا ان طريقة $RM(RS)$ هي الافضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

وفي عام 2009 ايضاً استخدمت ضياء اربع طرائق عددية مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون لتعطي طرائق لحساب قيم التكاملات الثنائية سواء كانت مكاملاتها مستمرة او مستمرة ولكن مشتقاتها معتلة او معتلة وممكن الغاء الاعتلال فيها او التي من غير الممكن الغاء الاعتلال فيها وهذه الطرائق هي $RS\left(RS\right)$, $RS\left(RM\right)$, $RM\left(RM\right)$, $RM\left(RS\right)$ اذ انها توصلت الى ان الطريقة $RM\left(RS\right)$ هي الافضل في حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المستمرة لكن معتلة المشتقة مع الغاء الاعتلال . اما بالنسبة للتكاملات التي مشتقات مكاملاتها معتلة او التكاملات ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن الغاء الاعتلال فيها , فوجدت ان افضل طريقة هي طريقة $RM\left(RM\right)$.

وقد ناقشت الحالات الاتية عند استخراج صيغ الخطأ $\bar{E}(\bar{h})$:-

- الغاء الاعتلال على البعد الداخلي باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي , (محمد، 2002)
- فرض $y = a$ مع عدم الغاء الاعتلال حيث a هي نقطة الاعتلال محمد واخرون ٢٠٠٩ .
- فرض y ثابت مع الأخذ بنظر الاعتبار الاعتلال بالرغم من امكانية الغائه على الداخل , (محمد، 2002) .

وفي بحثنا هذا سنقوم بتطبيق طريقة تعجيل رو مبرك على القيم الناتجة من قاعدة شبه المنحرف على البعدين عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل الخارجي ضعف عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل الداخلي وقد اعطت هذه الطريقة نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية المستخدمة.

٢-التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة معتلة المشتقة

Double Integrals for Continuous Integrands with Singularity in Partial Derivatives

الحالة الاولى:-ليكن لدينا التكامل

$$I = \int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\ (x\ ,y\ )dxdy \qquad ...(1)$$

حيث $f\ (x\ ,y\ )$ دالة مستمرة في المنطقة $\left[x_0,x_n\right]\times\left[y_0,y_m\right]$ ولكنها معتلة المشتقة عند النقطة (x_0,y_0) عليه يمكن كتابة التكامل اعلاه كالاتي

$$I = \int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f\ (x\ ,y\ )dxdy = \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1} f\ (x\ ,y\ )dxdy + \int_{y_1}^{y_m}\int_{x_0}^{x_1} f\ (x\ ,y\ )dxdy + \int_{y_0}^{y_1}\int_{x_1}^{x_n} f\ (x\ ,y\ )dxdy + \int_{y_1}^{y_m}\int_{x_1}^{x_n} f\ (x\ ,y\ )dxdy \ ...(2)$$

بما ان الدالة معرفه عند النقطة (x_1,y_1) لذلك يمكن نشر $f\ (x\ ,y\ )$ باستخدام متسلسلة تايلر حول النقطة (x_1,y_1) وبذلك نحصل على

$$f\ (x\ ,y\ ) = \left(1+(x-x_1)D_x+(y-y_1)D_y+\frac{(x-x_1)^2}{2!}D_x^2+(x-x_1)(y-y_1)D_xD_y+\frac{(y-y_1)^2}{2!}D_y^2+\right.$$
$$\frac{(x-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_1)^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_1)^4}{4!}D_x^4$$

$$+\frac{(x-x_1)^3(y-y_1)}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_1)^2(y-y_1)^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_1)(y-y_1)^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y-y_1)^4}{4!}D_y^4+\frac{(x-x_1)^5}{5!}D_x^5+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\ldots(3)$$

الان نقوم بمكاملة المعادلة (3) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$ وبذا نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\Bigg((x_1-x_0)(y_1-y_0)-\frac{(x_1-x_0)^2(y_1-y_0)}{2}D_x-\frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)^2}{2}D_y$$
$$+\frac{(x_1-x_0)^3(y_1-y_0)}{6}D_x^2+\frac{(x_1-x_0)^2(y_1-y_0)^2}{4}D_xD_y+\frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)^3}{6}D_y^2-\frac{(x_1-x_0)^4(y_1-y_0)}{24}D_x^3$$
$$-\frac{(x_1-x_0)^3(y_1-y_0)^2}{12}D_x^2D_y-\frac{(x_1-x_0)^2(y_1-y_0)^3}{12}D_xD_y^2-\frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)^4}{24}D_y^3+\frac{(x_0-x_1)^5(y_1-y_0)}{120}D_x^4$$
$$+\frac{(x_1-x_0)^4(y_1-y_0)^2}{48}D_x^3D_y+\frac{(x_1-x_0)^3(y_1-y_0)^3}{36}D_x^2D_y^2+\frac{(x_1-x_0)^2(y_1-y_0)^4}{48}D_xD_y^3+\frac{(x_1-x_0)(y_1-y_0)^5}{120}D_y^4$$
$$-\frac{(x_1-x_0)^6(y_1-y_0)}{720}D_x^5+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\qquad\ldots(4)$$

ومن (4) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\Bigg(h_1h_2-\frac{h_1^2h_2}{2}D_x-\frac{h_1h_2^2}{2}D_y+\frac{h_1^3h_2}{6}D_x^2+\frac{h_1h_2^3}{6}D_y^2+\frac{h_1^2h_2^2}{4}D_xD_y-\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2$$

$$-\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3-\frac{h_1^3h_2^2}{12}D_x^2D_y-\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2-\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3+\frac{h_1^5h_2}{120}D_x^4+\frac{h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y+\frac{h_1^3h_2^3}{36}D_x^2D_y^2$$

$$+\frac{h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3+\frac{h_1h_2^5}{120}D_y^4-\frac{h_1^6h_2}{720}D_x^5+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\qquad\ldots(5)$$

ومن (3) نحصل على

$$i)\ f(x_0,y_0)=\Bigg(1+(x_0-x_1)D_x+(y_0-y_1)D_y+\frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^2+(x_0-x_1)(y_0-y_1)D_xD_y+\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^2+$$
$$\frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^3+\frac{(x_0-x_1)^4}{4!}D_x^4$$
$$+\frac{(x_0-x_1)^3(y_0-y_1)}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x_0-x_1)^2(y_0-y_1)^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x_0-x_1)(y_0-y_1)^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y_0-y_1)^4}{4!}D_y^4+$$
$$\frac{(x_0-x_1)^5}{5!}D_x^5+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\qquad\ldots(6)$$

كذلك

$$ii)\ f(x_1,y_0)=\Bigg(1+(y_0-y_1)D_y+\frac{(y_0-y_1)^2}{2!}D_y^2+\frac{(y_0-y_1)^3}{3!}D_y^3+\frac{(y_0-y_1)^4}{4!}D_y^4+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\ \ldots(7)$$

ايضاً

$$iii)\ f(x_0,y_1)=\Bigg(1+(x_0-x_1)D_x+\frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^2+\frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_0-x_1)^4}{4!}D_x^4+\frac{(x_0-x_1)^5}{5!}D_x^5+\ldots\Bigg)f(x_1,y_1)\ldots(8)$$

ومن المعادلات (6), (7), (8) نحصل على

$$i)\ f(x_0,y_0)=\left(1-h_1D_x-h_2D_y+\frac{h_1^2}{2!}D_x^2+h_1h_2D_xD_y+\frac{h_2^2}{2!}D_y^2-\frac{h_1^3}{3!}D_x^3-\frac{h_1^2h_2}{2!}D_x^2D_y-\frac{h_1h_2^2}{2!}D_xD_y^2-\frac{h_2^3}{3!}D_y^3+\right.$$
$$\left.\frac{h_1^4}{4!}D_x^4+\frac{h_1^3h_2}{3!}D_x^3D_y+\frac{h_1^2h_2^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{h_1h_2^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{h_2^4}{4!}D_y^4-\frac{h_1^5}{5!}D_x^5+\dots\right)f(x_1,y_1) \qquad \dots(9)$$

$$ii)\ f(x_1,y_0)=\left(1-h_2D_y+\frac{h_2^2}{2!}D_y^2-\frac{h_2^3}{3!}D_y^3+\frac{h_2^4}{4!}D_y^4+\dots\right)f(x_1,y_1)\ . \qquad \dots(10)$$

$$iii)\ f(x_0,y_1)=\left(1-h_1D_x+\frac{h_1^2}{2!}D_x^2-\frac{h_1^3}{3!}D_x^3+\frac{h_1^4}{4!}D_x^4-\frac{h_1^5}{5!}D_x^5+\dots\right)f(x_1,y_1) \qquad \dots(11)$$

بضرب المعادلات (9), (10), (11) بـ $-\frac{h_1h_2}{4}$ وبالجمع مع المعادلة (5) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\left(f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_0,y_0)+f(x_1,y_1)\right)+\left[-\frac{h_1^3h_2}{12}D_x^2-\frac{h_1h_2^3}{12}D_y^2-\right.$$
$$\frac{5h_1^3h_2^3}{144}D_x^2D_y^2+\frac{h_1^2h_2^3}{24}D_xD_y^2+\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{24}D_x^2D_y-\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2+\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3-\frac{h_1^5h_2}{80}D_x^4-\frac{h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y$$
$$\left.+\frac{h_1^3h_2^3}{36}D_x^2D_y^2-\frac{h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3-\frac{h_1h_2^5}{80}D_y^4+\frac{h_1^6h_2}{720}D_x^5+\dots.\right]f(x_1,y_1) \qquad \dots(12)$$

نلاحظ ان المعادلة (12) تمثل قيمة التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين y,x في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_0,y_1]$ بضمنها صيغة الخطأ (حدود التصحيح) حول النقطة (x_1,y_1) اما بالنسبة للتكاملات الثلاث الاخرى نلاحظ ان المكامل مستمر المشتقة في فترات تكاملها لذلك لا توجد أي مشكلة بالنسبة للاعتلال , عليه تكون قيمها الاتية

$$\int_{y_1}^{y_m}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\sum_{j=1}^{m-1}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\sum_{j=1}^{m-1}\left(f(x_0,y_j)+f(x_0,y_{j+1})+f(x_1,y_j)+f(x_1,y_{j+1})\right)$$
$$+A_1h_1^2+A_2h_2^2+A_3h_1^4+A_4h_2^4+\dots \qquad \dots(13)$$

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_1}^{x_n}f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_0)+f(x_i,y_1)+f(x_{i+1},y_1)+f(x_{i+1},y_1)\right]$$
$$+B_1h_1^2+B_2h_2^2+B_3h_1^4+B_4h_2^4+\dots \qquad \dots(14)$$

$$\int_{y_1}^{y_m}\int_{x_1}^{x_n}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\left(f(x_1,y_1)+f(x_1,y_m)+f(x_n,y_1)+f(x_n,y_m)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_1)+f(x_i,y_m)\right]\right.$$
$$\left.+2\sum_{j=1}^{m-1}\left[f(x_1,y_j)+f(x_n,y_j)\right]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_j)\right]\right)+C_1h_1^2+C_2h_2^2+C_3h_1^4+C_4h_2^4+\dots \qquad \dots(15)$$

حيث $A_l,B_l,C_l,\dots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية بالنسبة الى المتغيرين y , x $l=1,2,3,.$,

حيث $x_i=a+ih_1, i=1,2,\dots,n-1, y_j=c+jh_2, j=1,2,\dots,m-1$.

الان نقوم بجمع المعادلات $(12),(13),(14),(15)$ فنحصل على

$$\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h_1h_2}{4}\left(f(x_0,y_0)+f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_1,y_1)+f(x_1,y_1)+f(x_1,y_m)+f(x_n,y_1)+f(x_n,y_m)\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(f(x_0,y_j)+f(x_0,y_{j+1})+f(x_1,y_j)+f(x_1,y_{j+1})\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,y_0)+f(x_i,y_1)+f(x_{i+1},y_1)+f(x_{i+1},y_1)\right)$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_1)+f(x_i,y_m)\right]++2\sum_{j=1}^{m-1}\left[f(x_1,y_j)+f(x_n,y_j)\right]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_j)\right]\right)+Q_1h_1^2+Q_2h_2^2$$
$$+Q_3h_1^4+Q_4h_2^4+\ldots+\left[-\frac{h_1^3h_2}{12}D_x^2-\frac{h_1h_2^3}{12}D_y^2-\frac{5h_1^3h_2^3}{144}D_x^2D_y^2+\frac{h_1^2h_2^3}{24}D_xD_y^2+\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{24}D_x^2D_y-\right.$$
$$\left.\frac{h_1^2h_2^3}{12}D_xD_y^2+\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3-\frac{h_1^5h_2}{80}D_x^4-\frac{h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y+\frac{h_1^3h_2^3}{36}D_x^2D_y^2-\frac{h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3-\frac{h_1h_2^5}{80}D_y^4+\frac{h_1^6h_2}{720}D_x^5+\ldots.\right]f(x_1,y_1)\quad\ldots(16)$$

بفرض $h_2=\frac{1}{2}h_1$ في المعادلة (16) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h_1^2}{8}\left(f(x_0,y_0)+f(x_1,y_0)+f(x_0,y_1)+f(x_1,y_1)+f(x_1,y_1)+f(x_1,y_m)+f(x_n,y_1)+f(x_n,y_m)\right.$$
$$+\sum_{j=1}^{m-1}\left(f(x_0,y_j)+f(x_0,y_{j+1})+f(x_1,y_j)+f(x_1,y_{j+1})\right)+\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,y_0)+f(x_i,y_1)+f(x_{i+1},y_1)+f(x_{i+1},y_1)\right)$$
$$\left.+2\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_1)+f(x_i,y_m)\right]++2\sum_{j=1}^{m-1}\left[f(x_1,y_j)+f(x_n,y_j)\right]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_j)\right]\right)+Q_1h_1^2+Q_2h_1^4+\ldots$$
$$+\left[h_1^4\left(-\frac{1}{6}D_x^2-\frac{2}{3}D_y^2\right)+h_1^5\left(\frac{1}{3}D_xD_y^2+\frac{1}{12}D_x^3+\frac{1}{6}D_x^2D_y-\frac{2}{3}D_xD_y^2+\frac{2}{3}D_y^3\right)+h_1^6\left(-\frac{1}{40}D_x^4-\frac{1}{12}D_x^3D_y\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{2}{9}D_x^2D_y^2-\frac{1}{3}D_xD_y^3-\frac{2}{5}D_y^4\right)+\frac{1}{360}h_1^7D_x^5+\ldots.\right]f(x_1,y_1)\quad\ldots(17)$$

حيث $Q_1,Q_2,\ldots$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة الى المتغيرين x,y ولا تعتمد على h_1 المعادلة (17) تمثل قيمة التكامل (1)باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي yبالإضافة الى حدود التصحيح لوجود الاعتلال في النقطة (x_0,y_0) حول (x_1,y_1).

الحالة الثانية:-

نفرض لدينا التكامل $I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy$ ولتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة في منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_m]$ ولكنها معتلة المشتقة عند النقطة (x_n,y_m) التكامل اعلاه نستطيع كتابته بالصورة الاتية

$$I=\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy+\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy$$
$$+\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy\quad\ldots(18)$$

ولإيجاد التكامل الرابع نقوم بنشر الدالة بمتسلسلة تايلر حول النقطة (x_{n-1},y_{m-1})

$$f(x,y)=\left(1+(x-x_{n-1})D_x+(y-y_{m-1})D_y+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+(x-x_{n-1})(y-y_{m-1})D_xD_y+\frac{(y-y_{m-1})^2}{2!}D_y^2\right.$$

$$+\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_{m-1})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_{m-1})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_{m-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(x-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4$$
$$+\frac{(x-x_{n-1})^3(y-y_{m-1})}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_{n-1})^2(y-y_{m-1})^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_{m-1})^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y-y_{m-1})^4}{4!}D_y^4$$
$$+\frac{(x-x_{n-1})^5}{5!}D_x^5+\dots\Bigg)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \dots(19)$$

وبأخذ التكامل اولاً بالنسبة الى المتغير x والمحدد بالفترة $[x_{n-1},x_n]$ ثم بالنسبة الى المتغير y والمحدد بالفترة $[y_{m-1},y_m]$ للمعادلة (19) نحصل على

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\Bigg((x_n-x_{n-1})(y_m-y_{m-1})+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_m-y_{m-1})}{2}D_x+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_m-y_{m-1})^2}{2}D_y$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_m-y_{m-1})}{6}D_x^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_m-y_{m-1})^2}{4}D_xD_y+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_n-y_{m-1})^3}{6}D_y^2$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^4(y_m-y_{m-1})}{24}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_m-y_{m-1})^2}{12}D_x^2D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_m-y_{m-1})^3}{12}D_xD_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})(y-y_{m-1})^4}{24}D_y^3$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^5(y_m-y_{m-1})}{120}D_x^4+\frac{(x_n-x_{n-1})^4(y_m-y_{m-1})^2}{48}D_x^3D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_m-y_{m-1})^3}{36}D_x^2D_y^2+$$
$$\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_m-y_{m-1})^4}{48}D_xD_y^3+\frac{(x_n-x_{m-1})(y_m-y_{m-1})^5}{120}D_y^4+\frac{(x_n-x_{n-1})^6(y_m-y_{m-1})}{5!}D_x^5+\dots\Bigg)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \dots(20)$$

ومن المعادلة (20)

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\Bigg(h_1h_2+\frac{h_1^2h_2}{2}D_x+\frac{h_1h_2^2}{2}D_y+\frac{h_1^3h_2}{6}D_x^2+\frac{h_1^2h_2^2}{4}D_xD_y+\frac{h_1h_2^3}{6}D_y^2+\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3$$
$$+\frac{h_1^4h_2}{24}D_x^3+\frac{h_1^3h_2^2}{12}D_x^2D_y+\frac{h_1h_2^4}{24}D_y^3+\frac{h_1^5h_2}{120}D_x^4+\frac{h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y+\frac{h_1^3h_2^3}{36}D_x^2D_y^2+\frac{h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3+\frac{h_1h_2^5}{120}D_y^4+\frac{h_1^6h_2}{5!}D_x^5+\dots\Bigg)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \dots(21)$$

ومن المعادلة (19)

$$i)\ f(x_n,y_m)=\Bigg(1+(x_n-x_{n-1})D_x+(y_m-y_{m-1})D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+(x_n-x_{n-1})(y_m-y_{m-1})D_xD_y+\frac{(y_m-y_{m-1})^2}{2!}D_y^2$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_m-y_{m-1})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_m-y_{m-1})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y_m-y_{m-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^3(y_m-y_{m-1})}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x_n-x_{n-1})^2(y_n-y_{m-1})^2}{2!2!}D_x^2D_y^2+\frac{(x_n-x_{n-1})(y_m-y_{m-1})^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y_m-y_{m-1})^4}{4!}D_y^4$$
$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^5}{5!}D_x^5+\dots\Bigg)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \dots(22)$$

ايضاً

$$ii)\ f(x_{n-1},y_m)=\Bigg(1+(y_m-y_{m-1})D_y+\frac{(y_m-y_{m-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(y_m-y_{m-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(y_m-y_{m-1})^4}{4!}D_y^4+\dots\Bigg)f(x_{n-1},y_{m-1}) \quad \dots(23)$$

كذلك

$$iii)\ f(x_n,y_{m-1})=\Bigg(1+(x_n-x_{n-1})D_x+\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2!}D_x^2+\frac{(x_n-x_{n-1})^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_n-x_{n-1})^4}{4!}D_x^4$$

$$+\frac{(x_n-x_{n-1})^5}{5!}D_x^5+\ldots\Big)f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(24)$$

ومن المعادلات (22), (23), (24) نحصل على الاتي

$$f(x_n,y_m)=\Big(1+h_1D_x+h_2D_y+\frac{h_1^2}{2}D_x^2+h_1h_2D_xD_y+\frac{h_2^2}{2}D_y^2+\frac{h_1^3}{6}D_x^3+\frac{h_1^2h_2}{2}D_x^2D_y+\frac{h_1h_2^2}{2}D_xD_y^2+\frac{h_2^3}{6}D_y^3$$
$$+\frac{h_1^4}{24}D_x^4+\frac{h_1^3h_2}{6}D_x^3D_y+\frac{h_1^2h_2^2}{4}D_x^2D_y^2+\frac{h_1h_2^3}{6}D_xD_y^3+\frac{h_2^4}{24}D_y^4+\frac{h_1^5}{120}D_x^5+\ldots\Big)f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(25)$$

$$f(x_{n-1},y_m)=\Big(1+h_2D_y+\frac{h_2^2}{2}D_y^2+\frac{h_2^3}{6}D_y^3+\frac{h_2^4}{24}D_y^4+\ldots\Big)f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(26)$$

$$f(x_n,y_{m-1})=\Big(1+h_1D_x+\frac{h_1^2}{2}D_x^2+\frac{h_1^3}{6}D_x^3+\frac{h_1^4}{24}D_x^4+\frac{h_1^5}{120}D_x^5+\ldots\Big)f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(27)$$

بضرب المعادلات (25), (26) , (27) بـ $\frac{-h_1h_2}{4}$ وبالجمع مع المعادلة (21) نحصل على

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\big(f(x_n,y_m)+f(x_{n-1},y_m)+f(x_n,y_{m-1})+f(x_{n-1},y_{m-1})+\Big[\frac{-h_1^3h_2}{12}D_x^2+\frac{-h_1^3h_2}{12}D_y^2$$
$$+\frac{-h_1^3h_2^2}{24}D_x^2D_y+\frac{-h_1^2h_2^3}{24}D_xD_y^2+\frac{-h_1^5h_2}{8}D_x^4+\frac{-h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y+\frac{-5h_1^3h_2^3}{144}D_x^2D_y^2+\frac{-7h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3+\frac{-11h_1h_2^5}{480}D_y^4$$
$$+\frac{-13h_1^6h_2}{1440}D_x^5+\ldots\Big]f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(28)$$

نلاحظ ان المعادلة (28) تمثل قيمة التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين x , y في المنطقة $[x_{n-1},x_n]\times[y_{m-1},y_m]$ بضمنها صيغة الخطأ (حدود التصحيح) حول النقطة (x_{n-1},y_{m-1}) اما نواتج التكاملات الثلاث الاخرى التي تكون مكاملاتها مستمرة المشتقات الجزئية في فترات تكاملها فان قيمتها

$$\int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\Big(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{m-1})+f(x_{n-1},y_0)+f(x_{n-1},y_{m-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}\big[f(x_i,y_0)$$
$$+f(x_i,y_{m-1})\big]+2\sum_{j=1}^{m-1}\big[f(x_0,y_j)+f(x_{n-1},y_j)\big]\Big)+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\big[f(x_i,y_j)\big]+A_1h_1^2+A_2h_2^2+A_3h_1^4+A_4h_2^4+\ldots\ldots(29)$$

$$\int_{y_{m-1}}^{y_m}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(x,y)dxdy=\int_{y_{m-1}}^{y_m}\sum_{i=0}^{n-2}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\sum_{i=0}^{n-2}\big(f(x_i,y_{m-1})+f(x_i,y_m)+f(x_{i+1},y_m)$$
$$+f(x_{i+1},y_{m-1})\big)+B_1h_1^2+B_2h_2^2+B_3h_1^4+B_4h_2^4+\ldots \qquad \ldots(30)$$

$$\int_{y_0}^{y_{m-1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\sum_{j=0}^{m-2}\int_{y_j}^{y_{j+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy=\frac{h_1h_2}{4}\sum_{j=0}^{m-1}\big(f(x_{n-1},y_j)+f(x_{n-1},y_{j+1})+f(x_n,y_j)$$
$$+f(x_n,y_{j+})\big)+C_1h_1^2+C_2h_2^2+C_3h_1^4+C_4h_2^4+\ldots \qquad (31)$$

حيث $A_l,B_l,C_l,\ldots$ وان $l=1,2,3,\ldots$ هي ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة الى المتغيرين x, y وبجمع المعادلات (28), (29), (30), (31) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h_1h_2}{4}\Bigg(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_m)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_m)+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_0)++f(x_i,y_m)]$$
$$+2\sum_{j=1}^{m-1}\Big[f(x_0,y_j)+f(x_n,y_j\Big]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Big[f(x_i,y_j)\Big]\Bigg)+Q_1h_1^2+Q_2h_2^2+Q_3h_1^4+Q_4h_2^4+\ldots+\Bigg[\frac{-h_1^3h_2}{12}D_x^2+\frac{-h_1^3h_2}{12}D_y^2$$
$$+\frac{-h_1^3h_2^2}{24}D_x^2D_y+\frac{-h_1^2h_2^3}{24}D_xD_y^2+\frac{-h_1^5h_2}{8}D_x^4+\frac{-h_1^4h_2^2}{48}D_x^3D_y+\frac{-5h_1^3h_2^3}{144}D_x^2D_y^2+\frac{-7h_1^2h_2^4}{48}D_xD_y^3$$
$$+\frac{-11h_1h_2^5}{480}D_y^4+\frac{-13h_1^6h_2}{1440}D_x^5+\ldots\Bigg]f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(32)$$

وبفرض ان $h_2=\frac{1}{2}h_1$ في المعادلة (32) نحصل على

$$\int_{y_0}^{y_m}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h_1^2}{8}\Bigg(f(x_0,y_0)+f(x_0,y_m)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_m)+2\sum_{i=1}^{n-1}[f(x_i,y_0)++f(x_i,y_m)]$$
$$+2\sum_{j=1}^{m-1}\Big[f(x_0,y_j)+f(x_n,y_j\Big]+4\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{n-1}\Big[f(x_i,y_j)\Big]\Bigg)+\Im_1h_1^2+\Im_2h_1^4+\ldots+\Bigg[h_1^4\left(\frac{-1}{6}D_x^2+\frac{-1}{6}D_y^2\right)$$
$$+h_1^5\left(\frac{-1}{6}D_x^2D_y+\frac{-1}{6}D_xD_y^2\right)+h_1^6\left(\frac{-1}{4}D_x^4+\frac{-1}{12}D_x^3D_y+\frac{-5}{18}D_x^2D_y^2+\frac{-7}{3}D_xD_y^3++\frac{-11}{15}D_y^4\right)$$
$$+\frac{-13}{720}h_1^7D_x^5+\ldots\Bigg]f(x_{n-1},y_{m-1}) \qquad \ldots(33)$$

حيث $j=1,2,\ldots,m-1, i=1,2,\ldots,n-1$ و $\Im_1,\Im_2,\ldots$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة الى المتغيرين x, y ولا تعتمد على h_1 .

المعادلة (33) تمثل قيمة التكامل (1) باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y بالإضافة الى حدود التصحيح لوجود الاعتلال في النقطة (x_n,y_m) حول النقطة (x_{n-1},y_{m-1}) .

٣.الامثلة

١) $\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{x+y}\,dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.532211914227701 مقربة الى خمسة عشرة مرتبة عشرية.

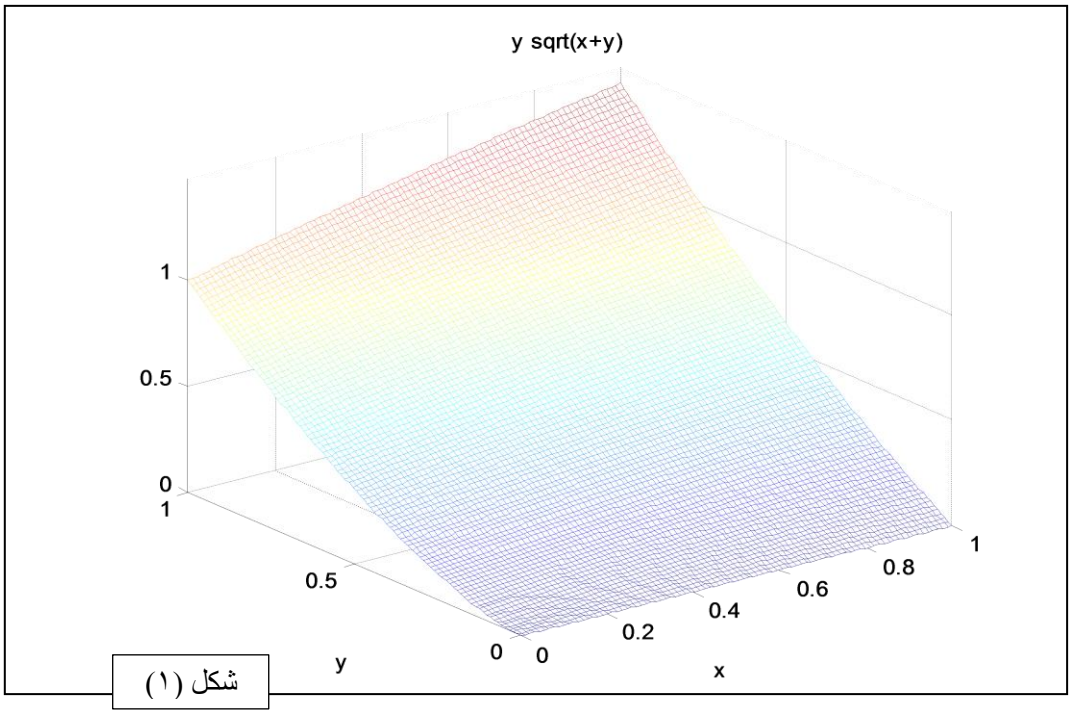
٢) $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.975161133198 مقربة الى اثنى عشر مرتبة عشرية.

٣) $\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3}\,dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية .

٤) $\int_{0.5}^1\int_{0.5}^1 \sin^{-1}(\frac{x+y}{2})dxdy$ اذ ان قيمته التحليلية هي 0.21609118883984 مقربة الى خمس عشر مرتبة عشرية .

٥. النتائج

بالنسبة للتكامل الاول $\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{x+y}\,dxdy$ المبينة دالته في الشكل (1)

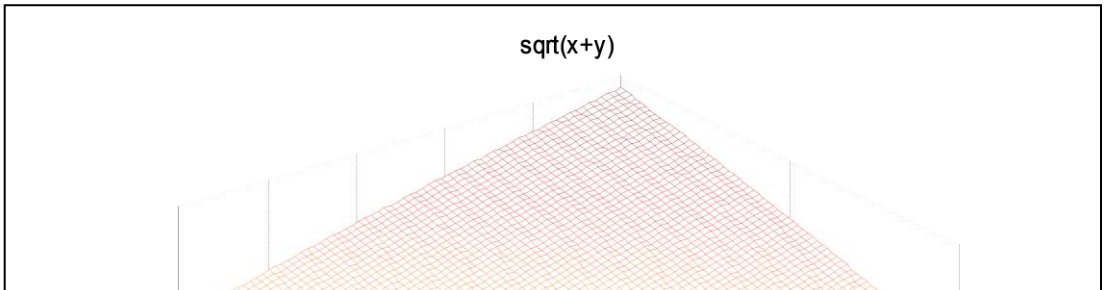


شكل (١)

المكامل هنا مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية عند النقطة $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري وحدود التصحيح هي $E_{T_i}(h)=A_1h_i^2+A_2h_i^{3.5}+A_3h_i^4+A_4h_i^6+A_5h_i^8+\cdots$ حيث $i=1,2,...$ و A_l ثوابت. نلاحظ عند تطبيق القاعدة T_i حصلنا على اربع مراتب عشرية صحيحة عند $n=32\,,m=64$, اما عند استخدام تعجيل رومبرك على النتائج , حصلنا على اثنى عشر مرتبة عشرية صحيحة عند $n=32\,,m=64$ (2^{11} فترة جزئية).وكما موضح في الجدول (1)

n	m	T_i قيم	$k=2$	$k=3.5$	$k=4$	$k=6$	$k=8$
1	**2**	**0.543258151868904**					
2	**4**	**0.534626590972456**	**0.531749404006973**				
4	**8**	**0.532776869731049**	**0.532160295983913**	**0.532200135385714**			
8	**16**	**0.532349195512571**	**0.532206637439745**	**0.532211130630127**	**0.532211863646421**		
16	**32**	**0.532245850647444**	**0.532211402359068**	**0.532211864357710**	**0.532211913272883**	**0.532211914060604**	
32	**64**	**0.532220362259022**	**0.532211866129548**	**0.532211911095962**	**0.532211914211845**	**0.532211914226749**	**0.532211914227401**
جدول (1) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1 y\sqrt{x+y}\,dxdy$ بتطبيق القاعدة RT_i							**0.532211914227701**

بالنسبة للتكامل الثاني $\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$ المبينة دالته في الشكل (٢)

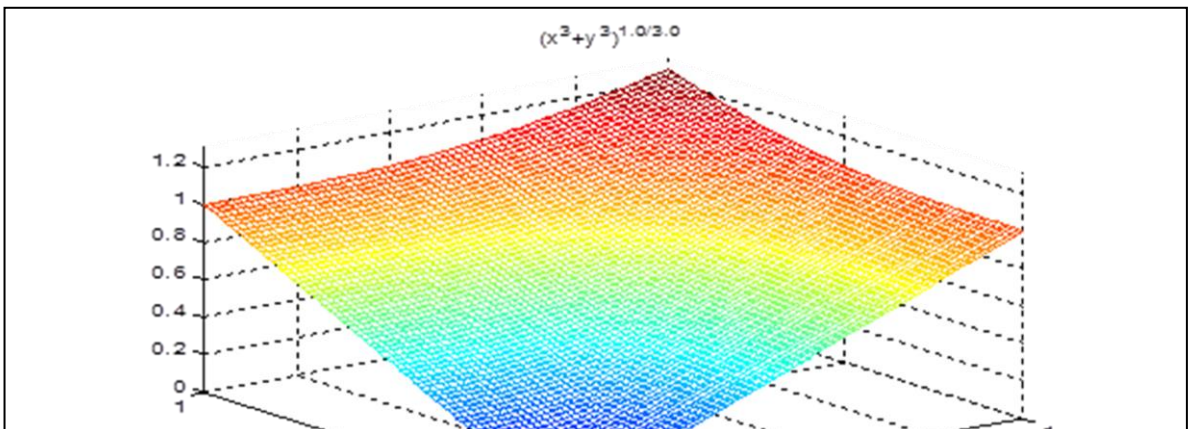


شكل (٢)

المكامل هنا مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية عند النقطة $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري وحدود التصحيح هي $E_{T_i}(h)=A_1h_i^2+A_2h_i^{2.5}+A_3h_i^4+A_4h_i^6+A_5h_i^8+\cdots$ حيث $i=1,2,...$ و A_l ثوابت. نلاحظ عند تطبيق القاعدة T_i حصلنا على ثلاث مراتب عشرية صحيحة عند $n=32\ ,m=64$ اما عند استخدام تعجيل رومبرك على النتائج , حصلنا على اثنى عشر مرتبة عشرية صحيحة عند $n=32\ ,m=64$ (2^{11} فترة جزئية).وكما موضح في الجدول (2)

n	m	قيم T_i	$k=2$	$k=2.5$	$k=4$	$k=6$	$k=8$
1	2	0.90973960844117					
2	4	0.95911649496738	0.97557545714279				
4	8	0.97120704982361	0.97523723477568	0.97516460584014			
8	16	0.97418284301078	0.97517477407317	0.97516136143469	0.97516114514100		
16	32	0.97491837812224	0.97516355649273	0.97516114766053	0.97516113340892	0.97516113322270	
32	64	0.97510076627563	0.97516156232676	0.97516113410507	0.97516113320138	0.97516113319808	0.97516113319799
جدول (2) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1\sqrt{x+y}\,dxdy$ بتطبيق القاعدة RT_i							0.975161133198

اما بالنسبة للتكامل الثالث $\int_0^1\int_0^1\sqrt[3]{x^3+y^3}\,dxdy$ المبينة دالته في الشكل (٣)



شكل (3)

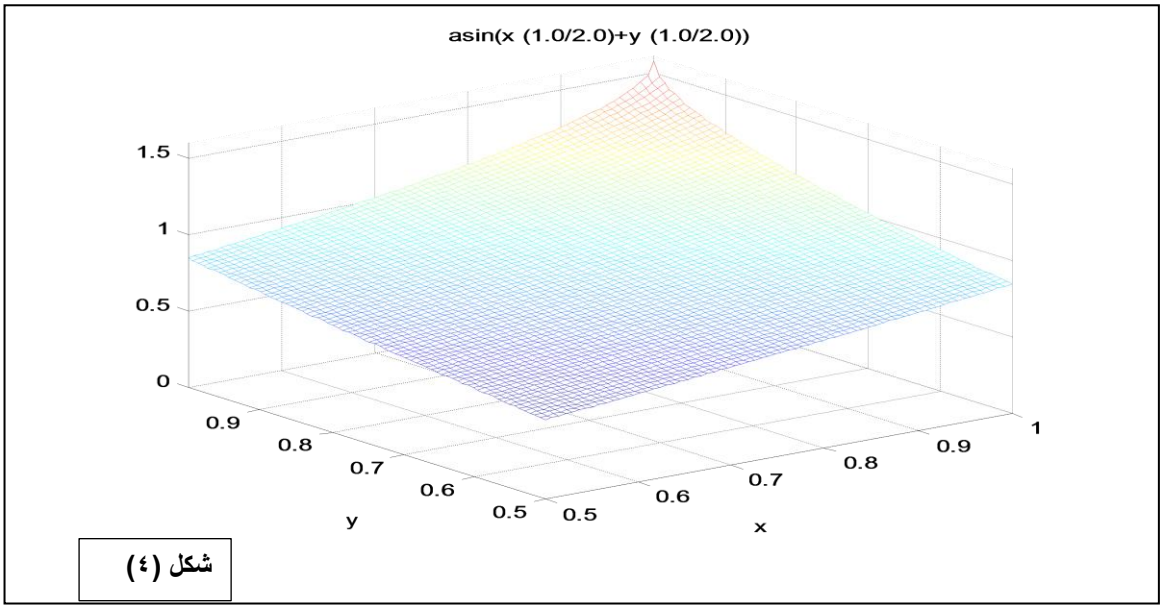
فهو غير معروف القيمة المضبوطة وهنا المكامل مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية عند $(0,0)$. لذا فان حدود التصحيح لهذا التكامل هي $E_{T_i}(h_i)=A_1h_i^2+A_2h_i^3+A_3h_i^4+A_4h_i^6+A_5h_i^8+\cdots$ حيث $i=1,2$ و A_l ثوابت. نلاحظ من الجدول (3) عندما $n=128$, $m=256$ (2^{15} فترة جزئية) , فان قيمة التكامل اعلاه كانت ثابتة افقياً (لأربعة عشر مرتبة عشرية) ولأربع اعمدة باستخدام قاعدة T_i مع تعجيل رومبرك اي أنها صحيحة على الاقل لأربعة عشر مرتبة عشرية هذا يعني ان التقارب هو بشكل صحيح نحو القيمة التحليلية حتى وان كانت قيمة التكامل غير معروفة لذا يمكن القول بأن قيمة التكامل هي 0.71441347501253 مقربة لأربعة عشر مرتبة عشرية.

n	m	قيم T_i	$k=2$	$k=3$	$k=4$
1	2	0.79250060911835			
2	4	0.73595045409254	0.71710040241727		
4	8	0.71999365481203	0.71467472171853	0.71432819590443	
8	16	0.71583061379009	0.71444293344944	0.71440982083957	0.71441526250192
16	32	0.71477037681772	0.71441696449360	0.71441325464276	0.71441348356297
32	64	0.71450301865811	0.71441389927157	0.71441346138271	0.71441347516538
64	128	0.71443590014064	0.71441352730148	0.71441347416290	0.71441347501491
128	256	0.71441908616182	0.71441348150221	0.71441347495946	0.71441347501257

$k=6$	$k=8$	$k=10$	$k=12$
0.71441345532585			
0.71441347503208	0.71441347510936		
0.71441347501252	0.71441347501245	0.71441347501235	
0.71441347501253	0.71441347501253	0.71441347501253	0.71441347501253

جدول(٣) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3}\,dxdy$ **بتطبيق القاعدة** RT_i

كذلك بالنسبة للتكامل $\int_{0.5}^{1}\int_{0.5}^{1} \sin^{-1}(\frac{x+y}{2})dxdy$ المبين دالته في الشكل (٤)



شكل (٤)

المكامل هنا مستمر في منطقة التكامل لكن معتل المشتقات الجزئية عند النقطة $(x,y)=(0,0)$ وحدود التصحيح هي $\cdots+ E_{T_i}(h)=A_1h_i^2+A_2h_i^{2.5}+A_3h_i^{3.5}+A_4h_i^4+A_5h_i^{4.5}$ حيث $i=1,2,...$ و A_l ثوابت. نلاحظ عند تطبيق القاعدة T_i حصلنا على ست مراتب عشرية صحيحة عند $m=256, n=128$ اما عند استخدام تعجيل رومبرك على النتائج , حصلنا على اربع عشر مرتبة عشرية صحيحة عند $m=256, n=128$ (2^{15} فترة جزئية).وكما موضح في الجدول (4) .

n	m	قيم T_i	$k=2$	$k=2.5$	$k=3.5$
1	2	0.22723918622662			
2	4	0.21882352874664	0.21601830958665		
4	8	0.21676421248413	0.21607777372996	0.21609054289561	
8	16	0.21625763900187	0.21608878117445	0.21609114488263	0.21609120325028
16	32	0.21613248035865	0.21609076081092	0.21609118591258	0.21609118989077
32	64	0.21610145484911	0.21609111301260	0.21609118864341	0.21609118890819
64	128	0.21609374528050	0.21609117542430	0.21609118882641	0.21609118884416
128	256	0.21609182617076	0.21609118646751	0.21609118883890	0.21609118884011

$k=4$	$k=4.5$	$k=5.5$	$k=6$
0.21609118900014			
0.21609118884269	0.21609118883541		
0.21609118883989	0.21609118883976	0.21609118883986	
0.21609118883984	0.21609118883984	0.21609118883984	0.21609118883984
			0.21609118883984

جدول(4) يبين قيمة التكامل الثنائي $\int_0^1\int_0^1 \sqrt[3]{x^3+y^3}\,dx\,dy$ **بتطبيق القاعدة** RT_i

٥.المناقشة

نستنتج من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية في منطقة التكامل باستخدام قاعدة شبه المنحرف (T_i) على البعدين (الداخلي والخارجي) وعندما تكون اعداد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الخارجي ضعف اعداد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها الفترة على البعد الداخلي قد اعطت هذه القاعدة قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة بالقيم الحقيقية للتكامل وباستعمال عدد من الفترات الجزئية بدون استعمال طريقة تعجيلية , وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة اعطت نتائج افضل من حيث سرعة التقارب وبعدد من الفترات الجزئية من القيم التحليلية , عليه يمكن الاعتماد على هذه الطريقة في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقة في احدى نهايتي منطقة التكامل.

المصادر

ضياء ,عذراء محمد ,٢٠٠٩ "طرائق عددية لا يجاد التكاملات الاحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab, رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة .

فرنك ايرز , ١٩٨٨"سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل" , دار ما كجر وهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الاساتذة المتخصصين .

محمد , علي حسن , ١٩٨٤ ,"ايجاد قيم تكاملات معتلة المكامل" رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة البصرة .

الطائي , عليه شاني , ٢٠٠٥ "بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات احادية وثنائية معتلة" , رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة.

Fox .1967,"Romberg integration for a class of singular integrands" , Com put . J.10,pp. 87-93.

Hans schjar and Jacobsen , 2002 , "Computer programs for One-and Two-Dimensional Romberg Integration of complex function " , The technical University of Denmark Lyngby , pp.21-28 .

Mohammed A.H. ,2002 " Evaluation of Double Integrations " comput J. Vo1.7 ,N0.3 , pp.21-28 .

Mohammed A.H., Hayder A.K. and Hassen A .f. , 2009 "On the Numerical Integration" ,an article accepted by scientific conference of Morocco .

phillip J . Davis and phillip Rabinowitz , 1975 " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company ,pp.1-2,599,113,chapter 5 .