مجلة جامعة بابل / العلوم الهندسية/ المجلد 11/ العدد 5 : 2006

# التحليل العددي لانتقال الحرارة بالحمل الطبيعي غير المستقر في وسط مسامي موضوع بين اسطوانتين عموديتين متحدتي المركز

**علاء لايق هاشم**

كلية الهندسة– جامعة القادسية

**الخلاصة**

في هذا البحث تم إجراء دراسة عددية لانتقال الحرارة بالحمل الطبيعي غير المستقر في وسط مسامي مشبع موضوع بين اسطوانتين عموديتين متحدتي المركز، واعتبار الجدران العمودية غير نفاذة للمائع ودرجة حرارتها ثابتة، فالاسطوانة الداخلية تحتفظ بدرجة الحرارة العالية والأسطوانة الخارجية تحتفظ بدرجة الحرارة المنخفضة وتكون الجدران الأفقية معزولة عزلا تاما.

إن المعادلات المتحكمة بالمسألة هي ( معادلة الاستمرارية ومعادلة الزخم ومعادلة الطاقة ) ، ضمن ظروف انسياب دارسي ( Darcy ) وتقريب بوسينيسك ( Boussinesq ) وقد صيغت المعادلات بالصيغة اللابعدية وحلت عدديا باستخدام طريقة الاتجاه المتناوب الضمني واستخدام طريقة الفروق المحددة لحساب عدد نسلت. ولقد تمت الدراسة ضمن مجال معين من عدد رالي المطور ($100 \le Ra^* \le 1000$) ونسبة نصف القطر ($2 \le \gamma \le 10$) والنسبة الباعية ($1 \le A \le 5$) واعتبار الحالة غير مستقرة ( أي بإدخال تأثير الزمن).

لقد تمت مقارنة قيم عدد نسلت الداخلي الناتجة من البرنامج المستخدم في هذه الدراسة مع الأعمال السابقة باستعمال نفس الظروف الحدية من أجل التحقق من صحة الحل العددي، ووجد إن الحل العددي صحيح.

ولقد بينت النتائج إن عدد نسلت الداخلي يزداد بزيادة عدد رالي المطور ويقل بزيادة كل من الزمن ونسبة نصف القطر والنسبة الباعية.

ولقد بينت الدراسة الحالية إن عدد نسلت الداخلي هو دالة قوية من عدد رالي المطور والزمن ونسبة نصف القطر والنسبة الباعية.

وإن أفضل معادلة تقريبية لحساب عدد نسلت الداخلي كدالة من عدد رالي المطور والزمن والنسبة الباعية ونسبة نصف القطر والتي شملت كل مجال النتائج وضعت كالآتي :

$$Nu_i = 0.477 \cdot A^{-0.383} \cdot Ra^{*0.508} \cdot \gamma^{-0.399} \cdot \tau^{-0.057}$$

**المقدمة**

إن الحمل الطبيعي يحدثً في الوسط المسامي المشبع بالمائع، ولا بد من التفريق بين الوسط المسامي والوسط المسامي المشبع.

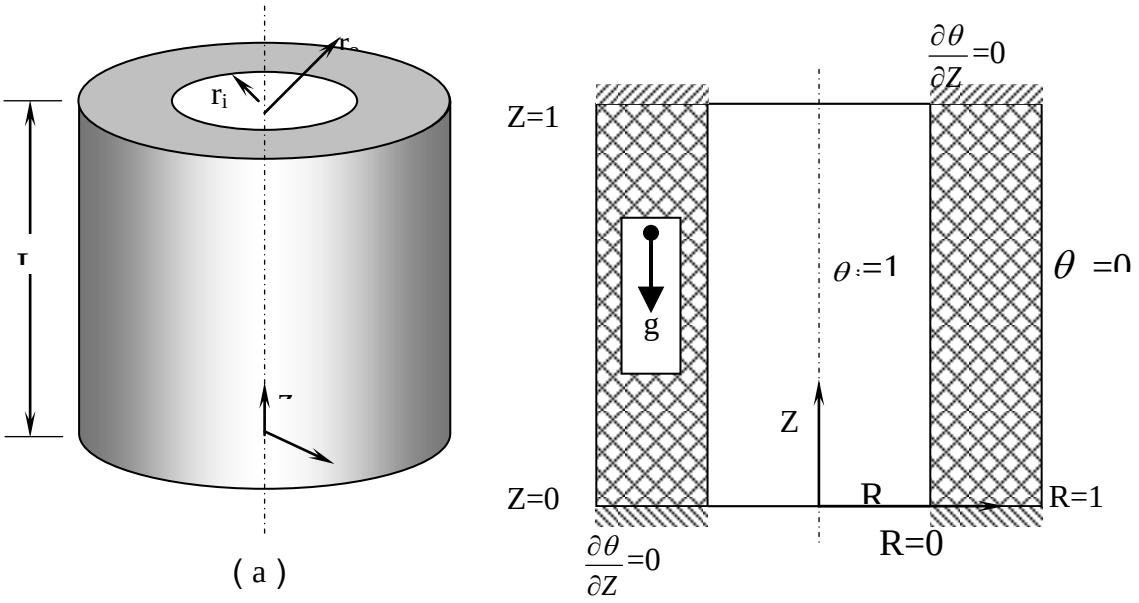
فالوسط المسامي عبارة عن مادة صلبة تحتوي على ثقوب وفجوات تترابط مع بعضها لتعمل كممرات ومسامات ينساب المائع من خلالها بتأثير الضغط الموضعي.

أما الوسط المسامي المشبع عبارة عن مادة صلبة يشغل مساماتة مائع ذو طور واحد.

أنَّ استخدام الوسط المسامي في عمليات انتقال الحرارة بالحمل يرجع إلى فترات زمنية طويلة، فإن كتاب دارسي، الذي يستند في عملة على تدفق الماء خلال طبقات من الرمل (تطبيق ترشيح الماء) قد نشر في عام 1856 . وفي الوقت نفسه حلل هيجان ( Hagen ) و بويسيويل (Poiseuille) تدفق مائع ذي طور واحد

خلال الانابيب ، اللذان أستعملا طور ميكانيك الموائع السابقة مِن قِبل نايفرستوك ( Navier- stokes ) و بويسسون( Poisson ) والقسيس فينانت( Venant ) [ 1 ] .

أن العديد من هذه البحوث كانت ضمن انسياب دارسي ثنائي البعد والقليل منها كانت ثلاثية الأبعاد [4,5,6].




**شكل رقم ( 1 ) يمثل الشكل الهندسي للمسألة.**

**الفرضيات**

- ❖ الوسط متساوي الخواص في جميع الاتجاهات ( Isotropic ) .
- ❖ اعتبار الشكل متناظر مع تغير الزاوية.
- ❖ تُفرض كثافة المائع على إنها ثابتة إلا عِندَّما تتسبب مباشرةً من قوة الطفو

$$\rho = \rho_o[1-\beta(T-T_o)] \quad \text{.....(1)}$$

- ❖ كل خواص المائع الأخرى تُفرض بأنها ثابتة.
- ❖ الوسط متجانس، أي المادة الصلبة والمائع المنساب خلال المسامات موزعة بشكل متساوي في الوسط المسامي.
- ❖ في أي نقطة في الوسط المسامي الحبيبات الصلبة في حالة توازن حراري مع المائع المنساب في الثقوب.
- ❖ الحرارة المفقودة بتأثير اللزوجة مهملة.

**المعادلات المتحكمة**

اذا رمزنا للمسامية بالرمز ( $\varepsilon$ ) فيمكن تمثيلها بالشكل التالي :

$$\varepsilon = \frac{V_{total} - V_{solid}}{V_{total}} \quad \text{.....(2)}$$

واذا رمزنا للنفاذية بالرمز ( $\xi$ )، فيمكن أن يُعرف معدل الكمية على إنه :

$$\bar{\xi} = \frac{1}{V}\int \xi \, dV \quad \text{.....(3)}$$

وبفرض المائع غير انضغاطي ثنائي البعد ومتساوي الخواص في جميع الاتجاهات فستكون معادلة الاستمرارية للمحاور القطرية كالأتي :

$$\frac{\partial(ru)}{\partial r}+\frac{\partial(rv)}{\partial z}=0 \qquad \text{.....(4)}$$

أن معادلة التوازن باتجاه المحور القطري ( $r$ ) :

$$u=\frac{-K}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} \qquad \text{.....(5)}$$

وباتجاه المحور العمودي ( $z$ ) :

$$v=\frac{-K}{\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g\right) \qquad \text{.....(6)}$$

من خلال الفرضيات التي ذكرت سابقاً وبتعويض المعادلة ( 1 ) في المعادلة (6) فسوف نحصل على :

$$v=\frac{-K}{\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial z}+\rho_o g\left(1-\beta\left(T-T_o\right)\right)\right] \qquad \text{.....(7)}$$

ولتسهيل الحل سوف نقوم بتفاضل المعادلتين (5) و (7)، الأولى نسبة إلى( $z$ ) والثانية نسبة إلى ( $r$ ) حَتى نحصل على معادلة الزخم أو ما يُعرف بتقريب بوسينسك :

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{-\rho_o g\beta K}{\mu}\frac{\partial T}{\partial r} \qquad \text{.....(8)}$$

كمية الحرارة المنتقلة تتمثل بالتوصيل والحمل معاً وبفرض الوسط المسامي ثنائي البعد غير مستقر وعدم وجود توليد حرارة وبإهمال حد اللزوجة فسوف تكون معادلة الطاقة كالأتي :

$$\sigma\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial r}+v\frac{\partial T}{\partial z}=\alpha_e\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \qquad \text{.....(9)}$$

حَيث إن $\sigma$ هي عزم القصور الحراري ( thermal inertia of the medium ) للوسط المسامي المتجانس والذي يعتمد على عزم القصور الذاتي للمادة الصلبة والمادة السائلة وتساوي :

$$\sigma=\frac{\varepsilon\rho_f c_{p_f}+(1-\varepsilon)\rho_s c_s}{\rho_f c_{p_f}} \qquad \text{.....(10)}$$

وإن $\alpha_e$ هي ألانتشارية الفعالة ( effective thermal diffusivity ) للوسط المسامي المتجانس وتساوي :

$$\alpha_e=\frac{k_e}{\rho_f\cdot c_{p_f}} \qquad \text{.....(11)}$$

وإن $k_e$ هي الموصلية الحرارية الفعلية للوسط المسامي ( effective thermal conductivity ).

إن الأبعاد اللابعدية تُعرف كالأتي :

$$R=\frac{r-r_i}{r_o-r_i}=\frac{r-r_i}{D} \qquad \text{.....(12)}$$

$$Z=\frac{z}{L} \qquad \text{.....(13)}$$

$$A=\frac{L}{D} \qquad \text{.....(14)}$$

$$\gamma = \frac{r_o}{r_i} \qquad \text{.....(15)}$$

$$\eta = \frac{D}{r_i} \quad = \gamma - 1 \qquad \text{.....(16)}$$

إن درجة الحرارة اللابعدية تعرف كالأتي :

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \quad = \frac{T - T_c}{\Delta T} \qquad \text{.....(17)}$$

ودالة الجريان معرفة في حد مركبة السرعة التي جاء ذكرها في معادلة الاستمرارية

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial z} \;\; , \;\; v = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad \text{.....(18)}$$

و تعرف دالة الجريان اللابعدية تعرف كالأتي :

$$\hat{\psi} = \frac{D}{\alpha_e r_i L}\psi \qquad \text{.....(19)}$$

وتعرف دالة الزمن اللابعدية تعرف كالأتي :

$$\tau = \frac{\alpha}{D^2 \sigma} t \qquad \text{.....(20)}$$

ودالة مركبتي السرعة اللابعدية تعرف كالأتي :

$$U = \frac{u}{\alpha_e / D} \;\; , \;\; V = \frac{v}{\alpha_e / D} \qquad \text{.....(21)}$$

وبَعدَّ استخدام هذه المتغيرات اللابعدية وتعويضها بمعادلة الزخم (8) فتصبح كالأتي :

$$-\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial R^2} - \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial Z^2} + \frac{\eta}{(\eta R + 1)}\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R} + \frac{1}{A} Ra^* (\eta R + 1)\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \qquad \text{.....(22)}$$

حَيثُ أنَّ $Ra^*$ هو عدد رالي المطور الذي ينتج من حاصل ضرب عدد رالي $Ra$ في عدد دارسي $Da$، والذي يمثل نسبة القوة الطفوية إلى مقاومة اللزوجة للوسط المسامي. ويساوي:

$$Ra^* = Ra \cdot Da = \frac{DK\rho_o g \beta \Delta T}{\mu \alpha_e} \qquad \text{.....(23)}$$

حَيثُ أنَّ عدد دارسي يمثل :

$$Da = \frac{K}{D^2} \qquad \text{.....(24)}$$

وان معادلة الطاقة بالصيغة اللابعدية توضع كالأتي :

$$(\eta R + 1)\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial Z}\frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial R}\frac{\partial \theta}{\partial Z} = (\eta R + 1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \eta \frac{\partial \theta}{\partial R}$$
$$+ \frac{1}{A}(\eta R + 1)\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \qquad \text{.....(25)}$$

إن الظروف الأولية الابتدائية توضع كالأتي :

$$\text{at } \tau = 0$$
$$\theta = 0, \qquad \hat{\psi} = 0 \qquad \text{at} \quad \text{any} \quad R,Z \qquad \text{.....(26)}$$

وان الظروف الحدية توضع كالأتي :

$$\text{at } \tau > 1$$

$$\theta = 1, \qquad \hat{\psi} = 0 \qquad \text{at } R = 0, \qquad \text{any } Z \qquad \text{.....(27)}$$

$$\theta = 0, \qquad \hat{\psi} = 0 \qquad \text{at } R = 1, \qquad \text{any } Z \qquad \text{.....(28)}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} = 0, \qquad \hat{\psi} = 0 \qquad \text{at } Z = 0,1 \qquad \text{any } R \qquad \text{.....(29)}$$

إن عدد نسلت مهم جداً في عمليات انتقال الحرارة بالحمل الطبيعي ويعرف على انه نسبة انتقال الحرارة بالحمل إلى انتقال الحرارة بالتوصيل التام ( pure conduction ).

$$Nu = \frac{Q_{conv.}}{Q_{cond.}} \qquad \text{.....(30)}$$

**الطريقة العددية**

نفرض إن معادلة الطاقة العامة ثنائية البعد للوسط المسامي المتجانس غير المستقر هي :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_e \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \qquad \text{in general} \qquad \text{.....(31)}$$

فأنَّ معادلة الخطوة الأولى توضع كالأتي :

$$\frac{T_{i,j}^{l+1/2} - T_{i,j}^{l}}{\Delta t/2} = k_e \left[ \frac{T_{i+1,j}^{l} - 2T_{i,j}^{l} + T_{i-1,j}^{l}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i.j+1}^{l+1/2} - 2T_{i,j}^{l+1/2} + T_{i,j-1}^{l+1/2}}{(\Delta y)^2} \right] \qquad \text{.....(32)}$$

في المعادلة (32) إن تقريب $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ يُكتب ظاهرياً عند نقطة الأساس $t^l$، حيث أن قيم درجات الحرارة معلومة. ولذلك، هناك فقط ثلاث حدود لدرجات الحرارة في تقريب $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ مجهولة.

أما معادلة الخطوة الثانية عِندما يتغير الزمن من $t^{l+1/2}$ إلى $t^{l+1}$ توضع كالأتي :

$$\frac{T_{i,j}^{l+1} - T_{i,j}^{l+1/2}}{\Delta t/2} = k_e \left[ \frac{T_{i+1,j}^{l+1} - 2T_{i,j}^{l+1} + T_{i-1,j}^{l+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1}^{l+1/2} - 2T_{i,j}^{l+1/2} + T_{i,j-1}^{l+1/2}}{(\Delta y)^2} \right] \qquad \text{.....(33)}$$

وبالمقارنة مع المعادلة (32)، فإن تقريب $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ضمني الآن.

وهنا فإن معادلة الخطوة الأولى للزخم هيَّ :

$$-\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1/2} - 2\hat{\psi}_{i,j}^{l+1/2} + \hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1/2}}{(\Delta R)^2} - \frac{1}{A^2}\frac{\hat{\psi}_{i,j+1}^{l+1/2} - 2\hat{\psi}_{i,j}^{l+1/2} + \hat{\psi}_{i,j-1}^{l+1/2}}{(\Delta Z)^2}$$
$$+\frac{\eta}{(\eta R+1)}\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1/2} - \hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1/2}}{2\Delta R} + \frac{1}{A}Ra^*(\eta R+1)\frac{\theta_{i+1,j}^{l} - \theta_{i-1,j}^{l}}{2\Delta R} = 0 \qquad \text{.....(34)}$$

ومعادلة الخطوة الثانية للزخم هيَّ :

$$-\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1} - 2\hat{\psi}_{i,j}^{l+1} + \hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1}}{(\Delta R)^2} - \frac{1}{A^2}\frac{\hat{\psi}_{i,j+1}^{l+1} - 2\hat{\psi}_{i,j}^{l+1} + \hat{\psi}_{i,j-1}^{l+1}}{(\Delta Z)^2}$$
$$+\frac{\eta}{(\eta R+1)}\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1} - \hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta R} + \frac{1}{A}Ra^*(\eta R+1)\frac{\theta_{i+1,j}^{l+1} - \theta_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta R} = 0 \qquad \text{.....(35)}$$

و معادلة الخطوة الأولى للطاقة تصبح :

$$(\eta R+1)\frac{\theta_{i,j}^{l+1/2}-\theta_{i,j}^{l}}{2\Delta\tau}-\frac{\hat{\psi}_{i,j+1}^{l+1/2}-\hat{\psi}_{i,j-1}^{l+1/2}}{2\Delta Z}\cdot\frac{\theta_{i+1,j}^{l}-\theta_{i-1,j}^{l}}{2\Delta R}$$
$$+\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1/2}-\hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1/2}}{2\Delta R}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{l+1/2}-\theta_{i,j-1}^{l+1/2}}{2\Delta Z}=(\eta R+1)\frac{\theta_{i+1,j}^{l}-2\theta_{i,j}^{l}+\theta_{i-1,j}^{l}}{(\Delta R)^2}$$
$$+\eta\frac{\theta_{i+1,j}^{l}-\theta_{i-1,j}^{l}}{2\Delta R}+\frac{(\eta R+1)}{A^2}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{l+1/2}-2\theta_{i,j}^{l+1/2}+\theta_{i,j-1}^{l+1/2}}{(\Delta Z)^2} \qquad \text{.....(36)}$$

و معادلة الخطوة الثانية للطاقة هي :

$$(\eta R+1)\frac{\theta_{i,j}^{l+1}-\theta_{i,j}^{l+1/2}}{2\Delta\tau}-\frac{\hat{\psi}_{i,j+1}^{l+1}-\hat{\psi}_{i,j-1}^{l+1}}{2\Delta Z}\cdot\frac{\theta_{i+1,j}^{l+1}-\theta_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta R}$$
$$+\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}^{l+1}-\hat{\psi}_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta R}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{l+1/2}-\theta_{i,j-1}^{l+1/2}}{2\Delta Z}=(\eta R+1)\frac{\theta_{i+1,j}^{l+1}-2\theta_{i,j}^{l+1}+\theta_{i-1,j}^{l+1}}{(\Delta R)^2}$$
$$+\eta\frac{\theta_{i+1,j}^{l+1}-\theta_{i-1,j}^{l+1}}{2\Delta R}+\frac{(\eta R+1)}{A^2}\cdot\frac{\theta_{i,j+1}^{l+1/2}-2\theta_{i,j}^{l+1/2}+\theta_{i,j-1}^{l+1/2}}{(\Delta Z)^2} \qquad \text{.....(37)}$$

ومن التعريف لدالة الجريان ستكون مركبتي السرعة كالأتي :

$$U=\frac{-1}{(\eta R+1)}\cdot\frac{\hat{\psi}_{i,j+1}-\hat{\psi}_{i,j-1}}{2\Delta Z} \qquad \text{.....(38)}$$

$$V=\frac{A}{(\eta R+1)}\frac{\hat{\psi}_{i+1,j}-\hat{\psi}_{i-1,j}}{2\Delta R} \qquad \text{.....(39)}$$

يتم حساب كمية الحرارة المنتقلة من الداخل والخارج، وذلك بأجراء عملية التكامل على التدرج في درجات الحرارة على الجدار الداخلي وحسب العلاقة التالية :

$$Q_i=-\int_0^1\left.\frac{\partial\theta}{\partial R}\right|_{at\,R=0}dZ \qquad \text{.....(40)}$$

وعلى الجدار الخارجي حسب العلاقة التالية :

$$Q_o=\int_0^1\left.\frac{\partial\theta}{\partial R}\right|_{at\,R=1}dZ \qquad \text{.....(41)}$$

و بطريقة الفروق المحددة باستخدام صيغة الفروق من جانب واحد اً، فللجدار الداخلي للأسطوانة تحسب الحرارة كالأتي :

$$(Q_i)_w=-\sum_{j=1}^{M-1}\frac{-11\theta_{0,j}+18\theta_{1,j}-9\theta_{2,j}+2\theta_{3,j}}{6\Delta R}\cdot\Delta Z \qquad \text{.....(42)}$$

وللزاوية العليا :

$$(Q_i)_{hc}=-\frac{-11\theta_{0,M}+18\theta_{1,M}-9\theta_{2,M}+2\theta_{3,M}}{6\Delta R}\cdot\Delta Z \qquad \text{.....(43)}$$

وللزاوية السفلي :

$$(Q_i)_{lc}=-\frac{-11\theta_{0,0}+18\theta_{1,0}-9\theta_{2,0}+2\theta_{3,0}}{6\Delta R}\cdot\Delta Z \qquad \text{.....(44)}$$

وللحصول على كمية الحرارة الكلية نطبق العلاقة التالية :

$$(Q_i)_{Total} = (Q_i)_w + \frac{(Q_i)_{hc} + (Q_i)_{lc}}{2} \quad \text{.....(45)}$$

وللجدار الخارجي للأسطوانة تحسب الحرارة كالأتي :

$$(Q_o)_w = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{11\theta_{N,j} - 18\theta_{N-1,j} + 9\theta_{N-2,j} - 2\theta_{N-3,j}}{6\Delta R} \cdot \Delta Z \quad \text{.....(46)}$$

وللزاوية العليا :

$$(Q_o)_{hc} = \frac{11\theta_{N,M} - 18\theta_{N-1,M} + 9\theta_{N-2,M} - 2\theta_{N-3,M}}{6\Delta R} \cdot \Delta Z \quad \text{.....(47)}$$

وللزاوية السفلي :

$$(Q_o)_{lc} = \frac{11\theta_{N,0} - 18\theta_{N-1,0} + 9\theta_{N-2,0} - 2\theta_{N-3,0}}{6\Delta R} \cdot \Delta Z \quad \text{.....(48)}$$

وللحصول على كمية الحرارة الكلية نطبق العلاقة التالية :

$$(Q_o)_{Total} = (Q_o)_w + \frac{(Q_o)_{hc} + (Q_o)_{lc}}{2} \quad \text{.....(49)}$$

ولحساب عدد نسلت الداخلي وحسب المعادلة ( 30 )

$$Nu_i = \frac{(Q_i)_{conv.}}{(Q_i)_{cond.}} \quad \text{.....(50)}$$

ولحساب عدد نسلت الخارجي

$$Nu_o = \frac{(Q_o)_{conv.}}{(Q_o)_{cond.}} \quad \text{.....(51)}$$

وبما أنَّ الوسط المسامي معزول مِن الجهتين العليا والسفلى فأنَّ كمية الحرارة المنتقلة على السطح الداخلي للأسطوانة يجب أن يكون مساوياً لكمية الحرارة الكلية المنتقلة على السطح الخارجي للأسطوانة ولذلك فإنَّ :

$$Nu_i = \gamma \cdot Nu_o \quad \text{.....(52)}$$

## المقارنة مع البحوث الأخرى

لقد تمت المقارنة بالحمل الطبيعي بعدَّ الوصول الى حالة الاستقرارية مع عدد من البحوث للمسألة نفسها والظروف الحدية فظهرت النتائج كما بين في الجدول (1).

**جدول رقم ( 1 ) مقارنة بين البحث الحالي والحل العددي للباحثين Prasad & Kulacki [8] والباحثين Hickox & Gartig [9] في حالة الحمل عندما Ra*=100**

| $A$ | $\gamma$ | $Q_i$ | | |
|---|---|---|---|---|
| | | **Prasad & Kulacki [8]** | **Hickox & Garting [9]** | **Present work** |
| **2** | **2** | **4.190** | **4.048** | **4.0659** |
| | **3** | **4.741** | **4.738** | **4.7337** |
| | **5** | **5.590** | **5.716** | **5.6813** |
| **4** | **2** | **3.216** | **3.123** | **3.182** |
| | **3** | **3.750** | **3.692** | **3.7397** |

**النتائج والمناقشة**

ان الاشكال (2-3) يمثل تغير ثبوت درجات الحرارة مع الزمن في حالة التوصيل التام ($Ra^*$=0.0) عند ( $\gamma = 2$ )، حيث يتبين إن خطوط ثبوت درجات الحرارة متناظرة حول المحور الأفقي والذي يوضح انتقال الحرارة بالتوصيل التام باتجاه المحور القطري فقط.

عند زيادة عدد رالي المطور نلاحظ ظهور الحركة الدورانية لتيارات الحمل باتجاه عقارب الساعة حول نقطة تمثل أعلى قيمة لدالة الانسياب ( $\hat{\psi}_{\max}$ ) وذلك نتيجة لقوة الطفو أو ما تسمى بقوة التعويم وهي ناتجة بسبب الفرق في كثافة المائع، حيث انه عند زيادة درجة حرارة المائع المحاذي للجدار العمودي للأسطوانة الداخلية يسخن وتقل كثافته ثم يبدأ بالارتفاع وعندما يواجه الجدار الأفقي العلوي المعزول ستعاني تلك المنطقة من ارتفاع درجات الحرارة بسبب العزل وسوف تجبر المائع على تغيير اتجاهه الى المنطقة الباردة ( الجدار العمودي للأسطوانة الخارجية )، ولهذا يتوجب على المائع أن يسلك أقصر طريق للوصول إلى الجدار العمودي للأسطوانة الخارجية الباردة وبذلك فأن جميع الطبقات تأخذ الوضع المائل كما في الاشكال ( 4–5 –6–7–8–9–10–11) لقيم مختلفة لرقم رالي المطور.

الشكل ( 12–13)، يوضح العلاقة بين عدد نسلت الداخلي وعدد رالي المطور عند قيم مختلفة لنسبة نصف القطر والزمن وعندما ( A=1 )، وبصورة عامة وكما مبين في الشكل فأنة كلما زاد عدد رالي المطور يزداد عدد نسلت الداخلي لنفس نسبة نصف القطر والزمن. وعند زيادة نسبة نصف القطر سوف نلاحظ انخفاضا في مقدار الزيادة بعدد نسلت الداخلي بزيادة عدد رالي، أي إن ميلان الخطوط سوف يقل بزيادة نسبة نصف القطر كما هو ملاحظ في الأشكال من ( a-12 ) الى ( c-12 ). وعند زيادة النسبة الباعية سوف نلاحظ أيضا انخفاضا في مقدار الزيادة بعدد نسلت الداخلي بزيادة عدد رالي المطور .وهكذا لبقية الاشكال.حيث تم توضيح العلاقة بين عدد نسلت الداخلي والنسبة الباعية عند قيم مختلفة لعدد رالي والزمن عندما ( $\gamma = 2$ )، وبصورة عامة وكما مبين في الشكل فعند زيادة النسبة الباعية يقل عدد نسلت الداخلي عند العوامل الأخرى نفسها . وعند زيادة عدد رالي المطور يزداد ميلان الخطوط بزيادة النسبة الباعية أي يزداد مقدار الانخفاض في عدد نسلت بزيادة النسبة الباعية كما مبين في الأشكال من ( a-14) الى ( c-14 ).

**المعادلات التقريبية وعلاقات انتقال الحرارة**

إن انتقال الحرارة بالحمل الطبيعي عند جدار الأسطوانة الداخلية ( المتمثلة بعدد نسلت الداخلي) يمكن وضعة دالة من (الزمن وعدد رالي المطور والنسبة الباعية ونسبة نصف القطر ). إن مدى المجال المستخدم لهذه المعادلات هو لعدد رالي من (100 الى 1000) ونسبة نصف القطر ($2 \le \gamma \le 10$) والنسبة الباعية ( $1 \le A \ge 5$ )، بحيث انه عندما نعوض أية قيمة لهذه المغيرات ضمن هذا المجال سوف نحصل على عدد نسلت الداخلي التقريبي.

ان تقييم ثوابت الارتباط يعتمد بالأساس على أعلى قيمة لمعامل الأرتباط ( $R^2$ ) ( Correlation coefficient).

لقد استخدم برنامج ( Statistica)، الإصدار (الخامس) في عملية التحليل الإحصائي واستخدم طريقة ( Simplex and Quasi-Newton ) للتحليل الإحصائي، وإن الخطأ يمثل ( الفرق المربع بين القيمة المحسوبة والقيمة المتوقعة )،وإن المعادلة التقريبية العمة لحساب عدد نسلت يمكن وضعها كالأتي :

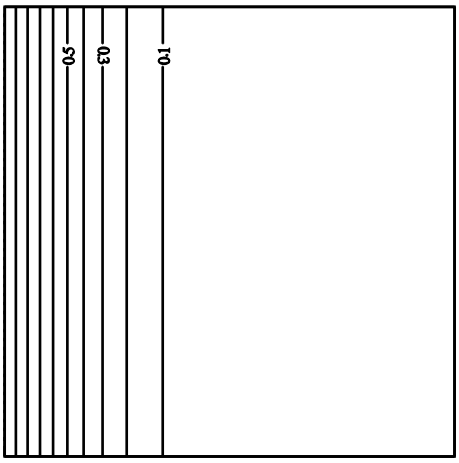
$$Nu_i = a \cdot A^b \cdot Ra^{*c} \cdot \gamma^d \cdot \tau^e \qquad \text{.....( 57 )}$$

عند استخدام كل مجال النتائج المحصلة للحصول على المعادلة التقريبية، فأنها تصبح كالأتي :

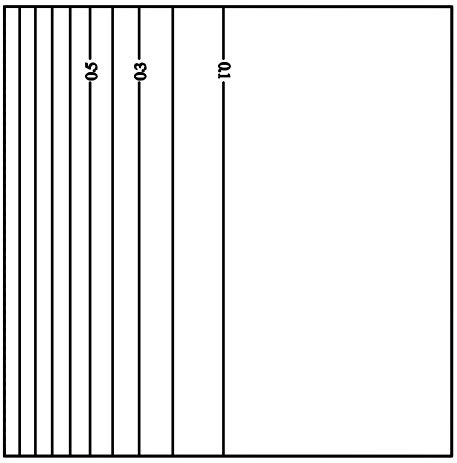
$$Nu_i = 0.477 \cdot A^{-0.383} \cdot Ra^{*0.508} \cdot \gamma^{-0.399} \cdot \tau^{-0.057} \qquad \text{.....(58)}$$

$R^2$=0.995

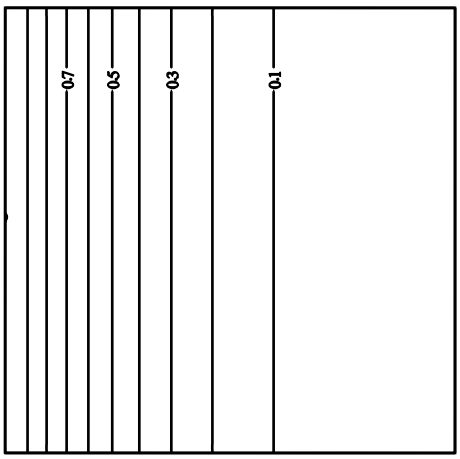
نلاحظ ان معامل الأرتباط ( $R^2$ ) قريب جدا من رقم واحد، وهذا يدل على ان العلاقة جيدة وقوية ويمكن استخدامها لإيجاد عدد نسلت لأعداد مختلفة من عددد رالي ونسبة نصف القطر والنسبة الباعية وعند اية مدة زمنية.



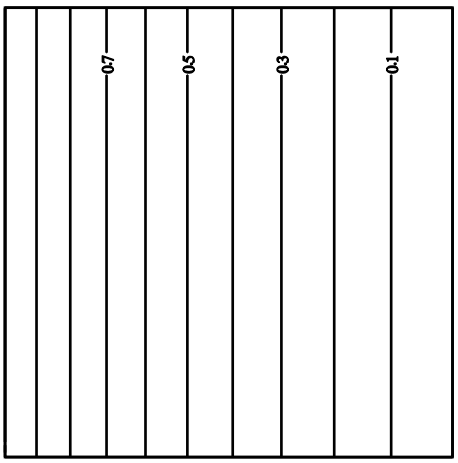

τ=0.025




τ=0.05



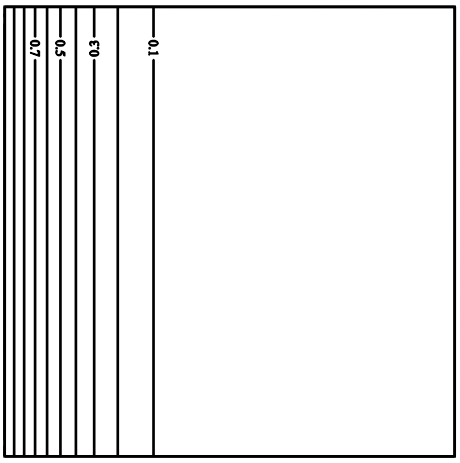

τ=0.075

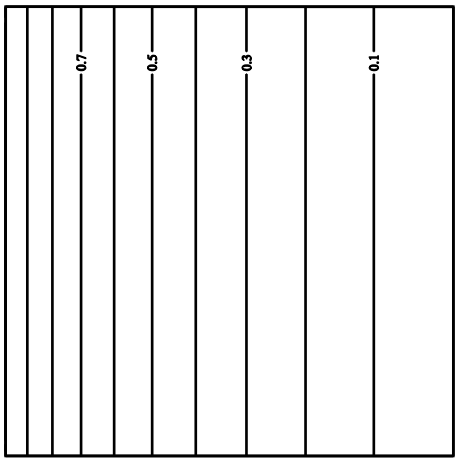



حالة الأستقرار

**شكل ( 2 ) تغير ثبوت درجات الحرارة مع الزمن عند**

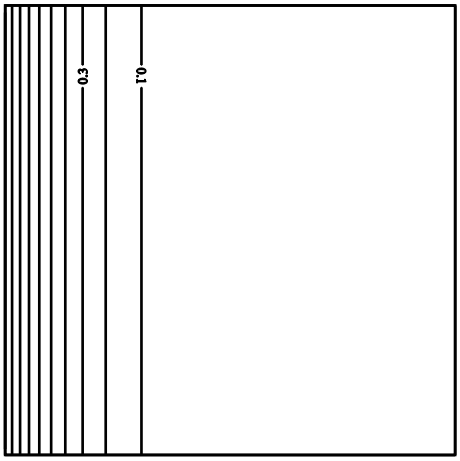
$$A=1,\gamma=2,Ra^*=0.0$$

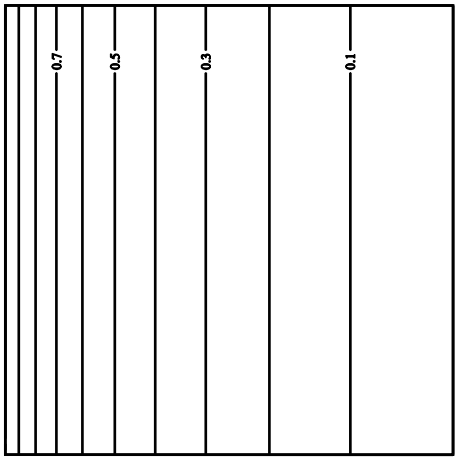



τ=0.025 حالة الأستقرار

$\gamma = 5$

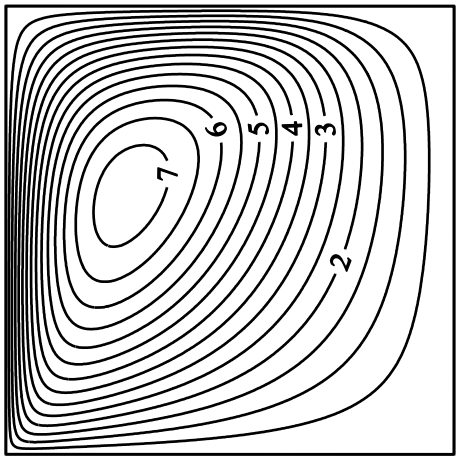


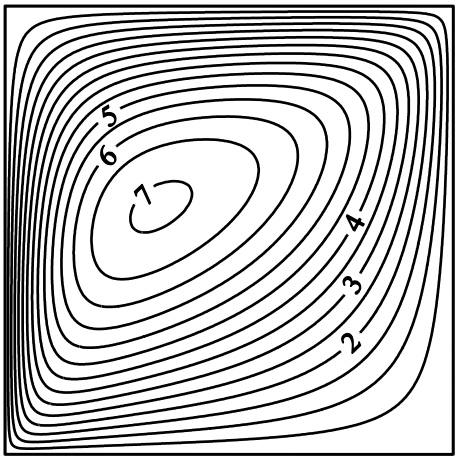

τ=0.025 حالة الأستقرار

$\gamma = 10$

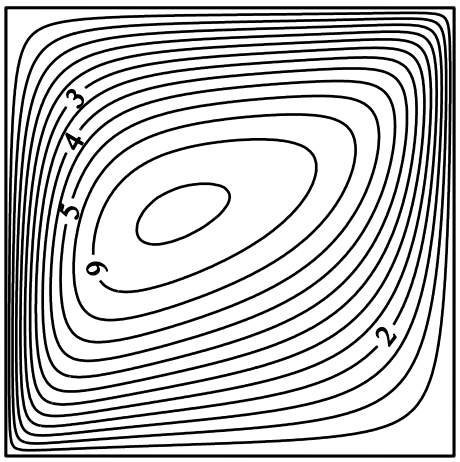
**شكل ( 3 ) يوضح تأثير تغير نسبة نصف القطر على**
**خطوط ثبوت درجات الحرارة عند** $A = 1, Ra^* = 0.0$



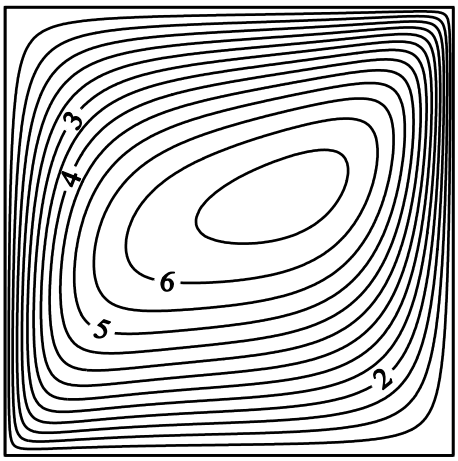

τ=0.025




τ=0.05



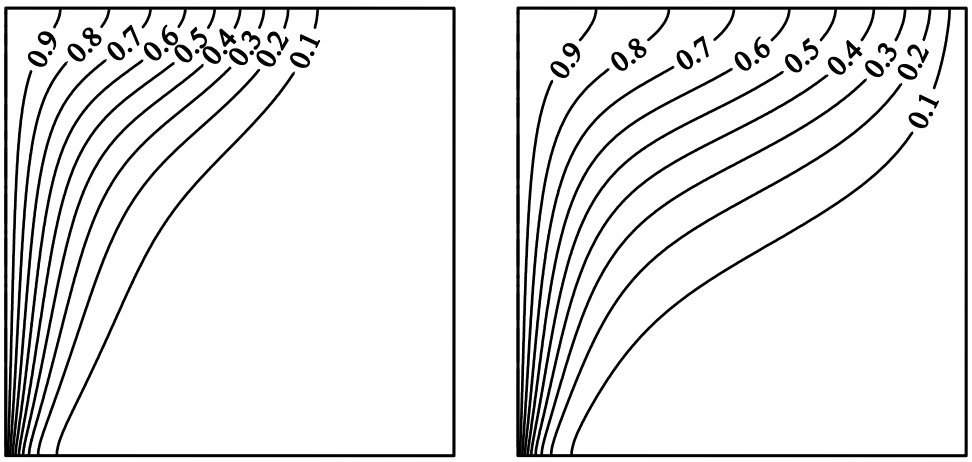

τ=0.075



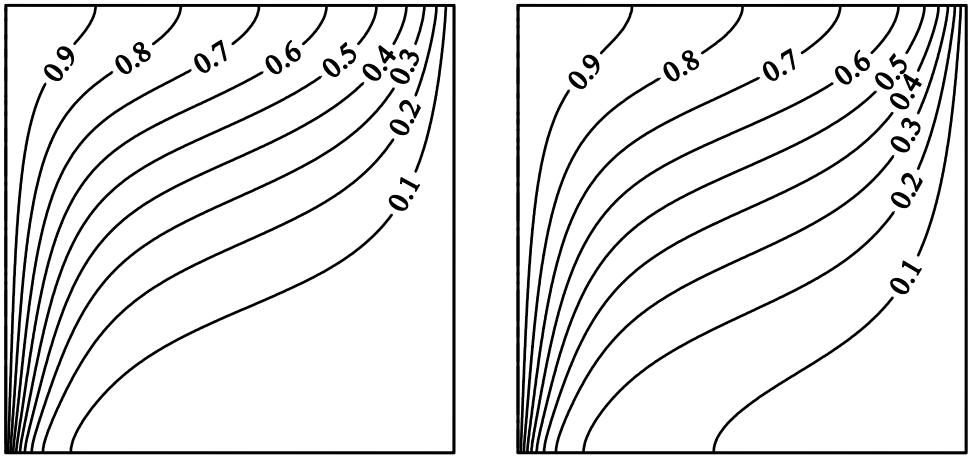

حالة الاستقرار

شكل ( 4 ) **تغير خطوط الانسياب مع الزمن عند**

$$A=1,\gamma=2,Ra^*=100$$



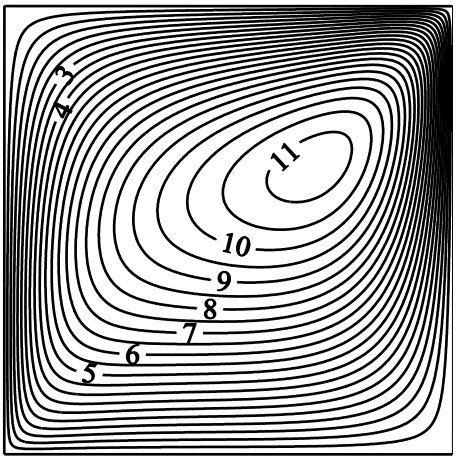

τ=0.025 τ=0.05



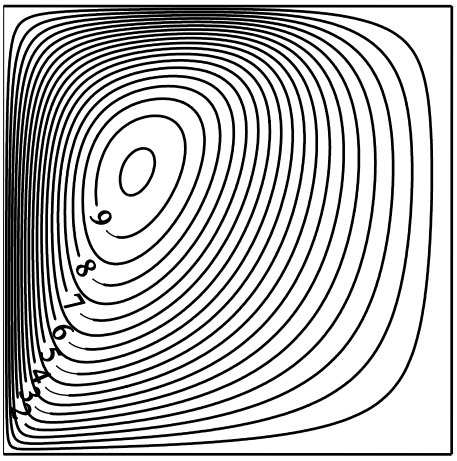

τ=0.075 حالة الاستقرار

شكل ( 5 ) **تغير ثبوت درجات الحرارة مع الزمن عند**

$$A=1,\gamma=2,Ra^*=100$$

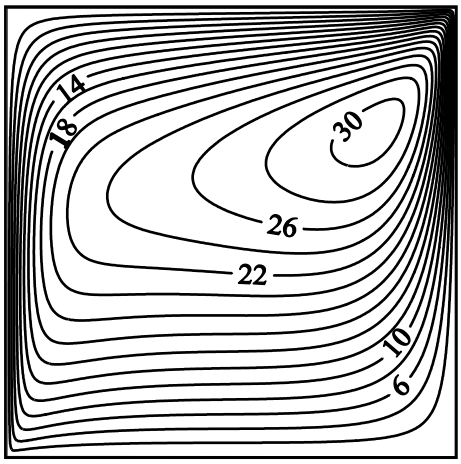



حالة الاستقرار

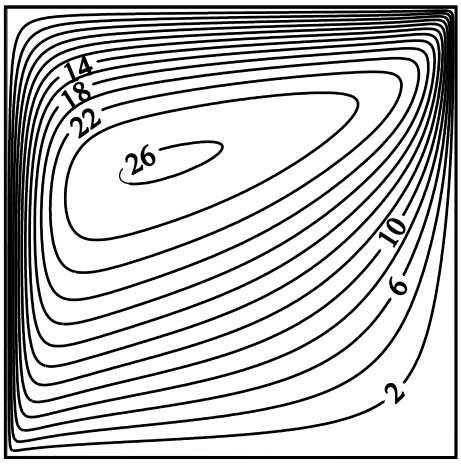



τ=0.025

$Ra^* = 100$

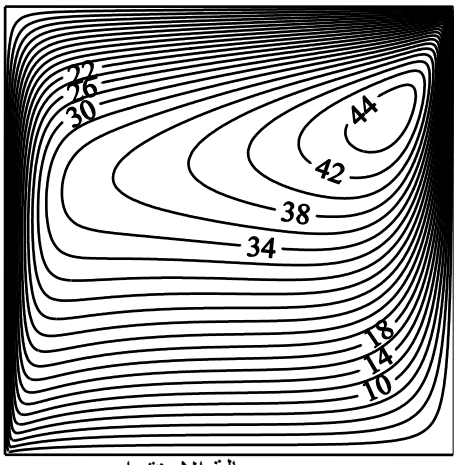



حالة الاستقرار

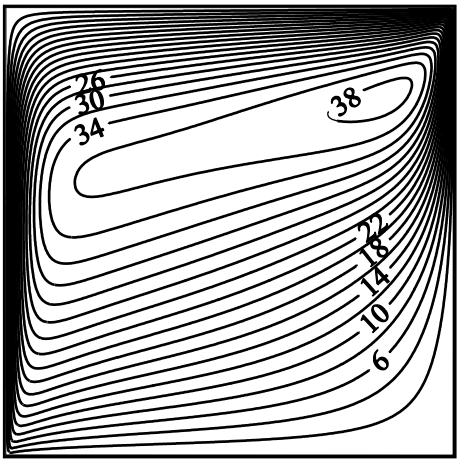



τ=0.025

$Ra^* = 500$




حالة الاستقرار

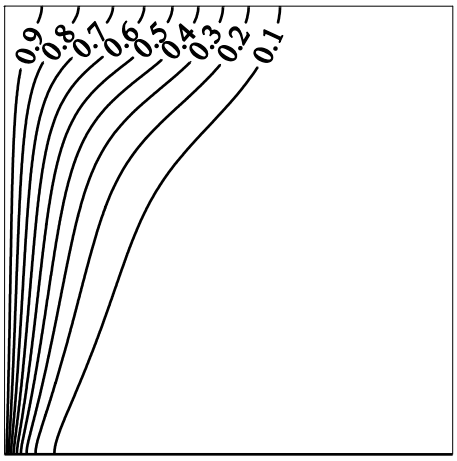



τ=0.025

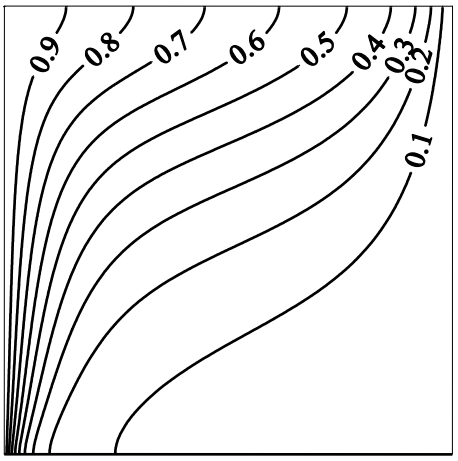
$Ra^* = 1000$

**شكل ( 6 ) يوضح تأثير تغير عدد رالي المطور**

**على خطوط الانسياب عند** $A = 1, \gamma = 5$

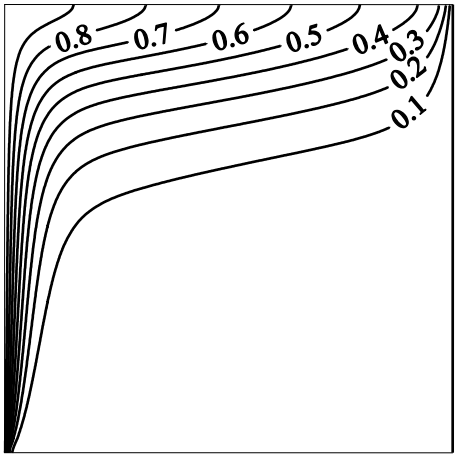



τ=0.025

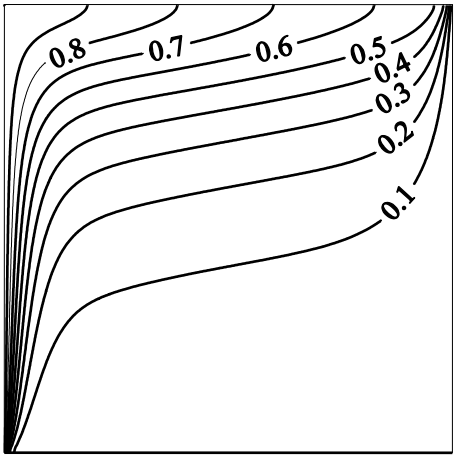



حالة الاستقرار

$Ra^* = 100$

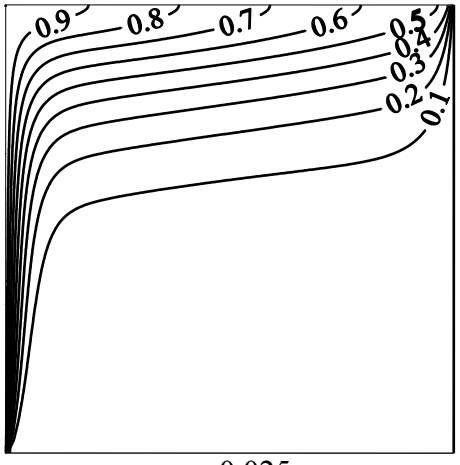



τ=0.025

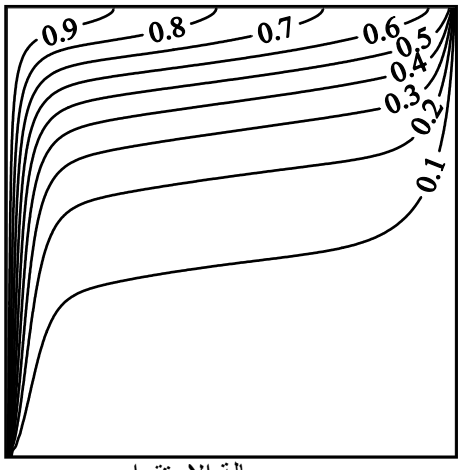



حالة الاستقرار

$Ra^* = 500$



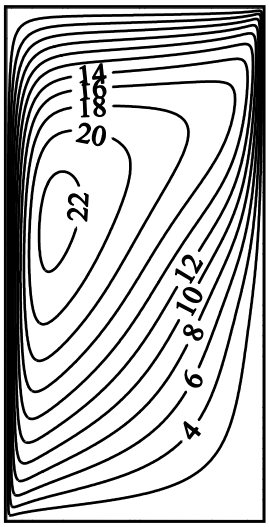

τ=0.025



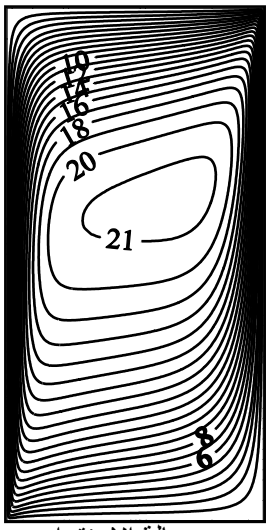

حالة الاستقرار

$Ra^* = 1000$

**شكل ( 7 ) يوضح تأثير تغير عدد رالي المطور على**
**خطوط ثبوت درجات الحرارة عند** $A = 1, \gamma = 5$

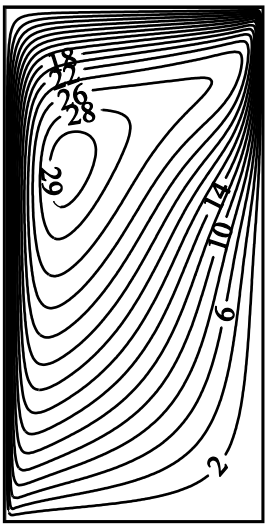



τ=0.025

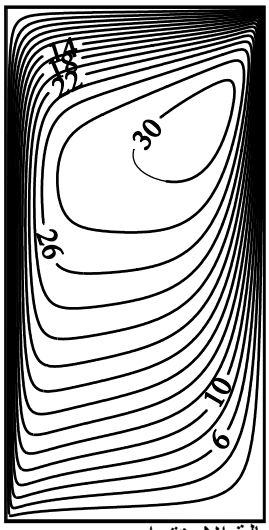



حالة الاستقرار

$\gamma = 2$

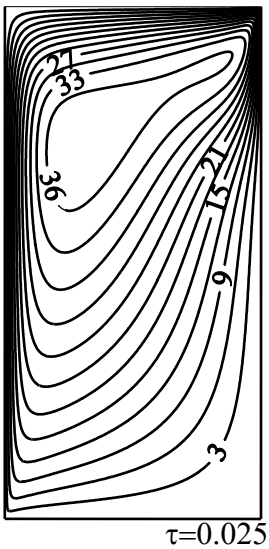



τ=0.025

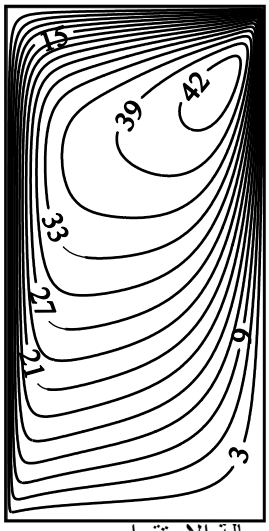



حالة الاستقرار

$\gamma = 5$




τ=0.025

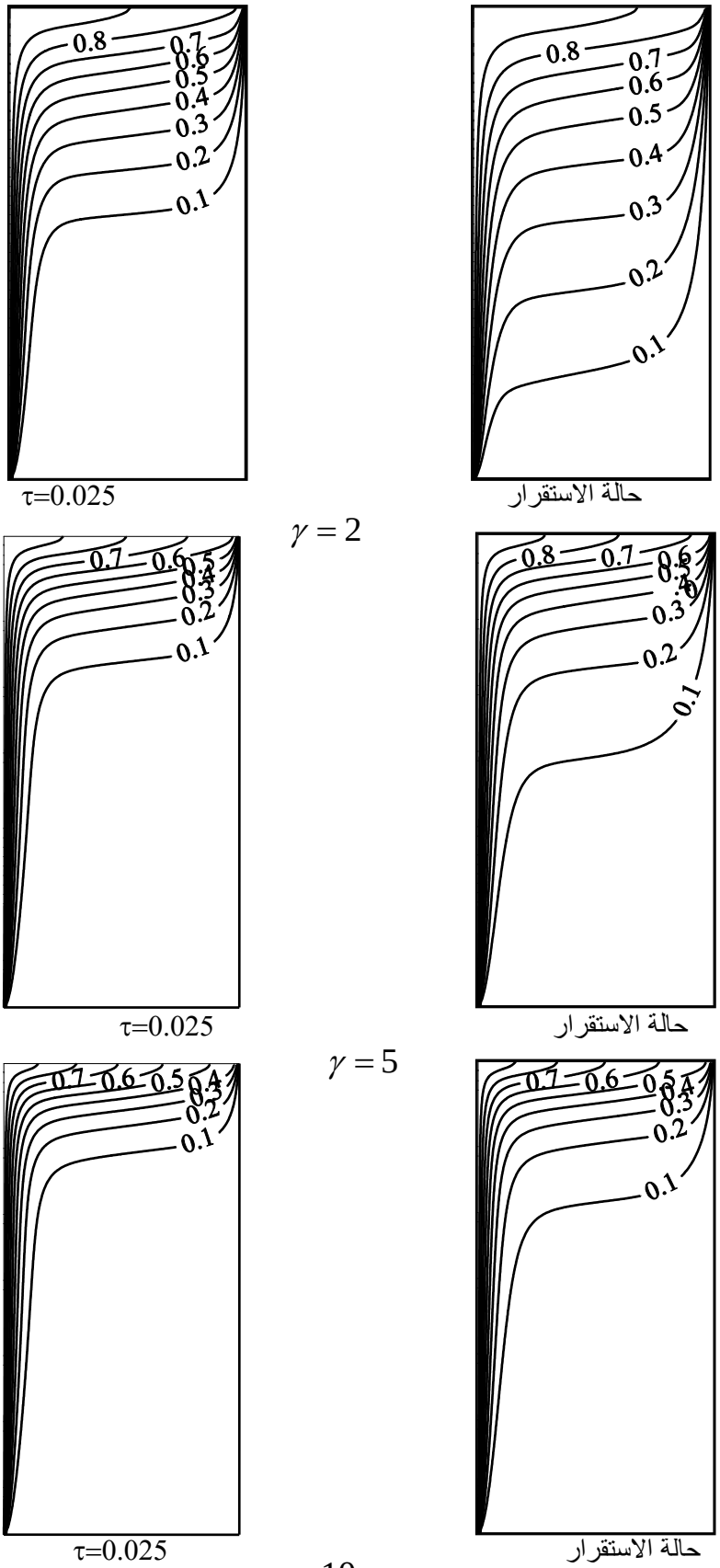



حالة الاستقرار

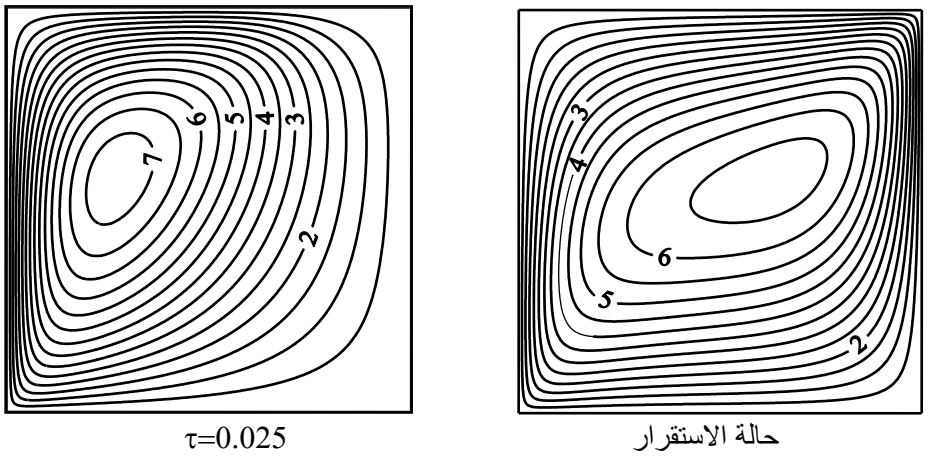
$\gamma = 10$

**شكل ( 8 ) يوضح تأثير تغير نسبة نصف القطر على**

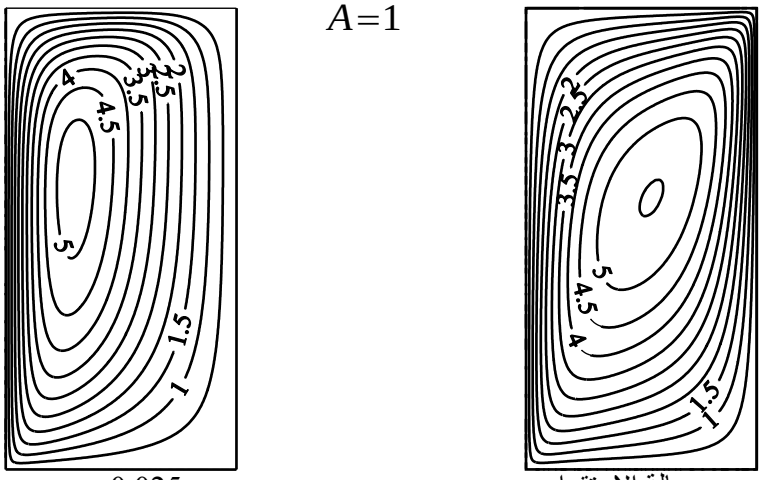
**خطوط الانسياب عند** $A = 2, Ra^* = 1000$



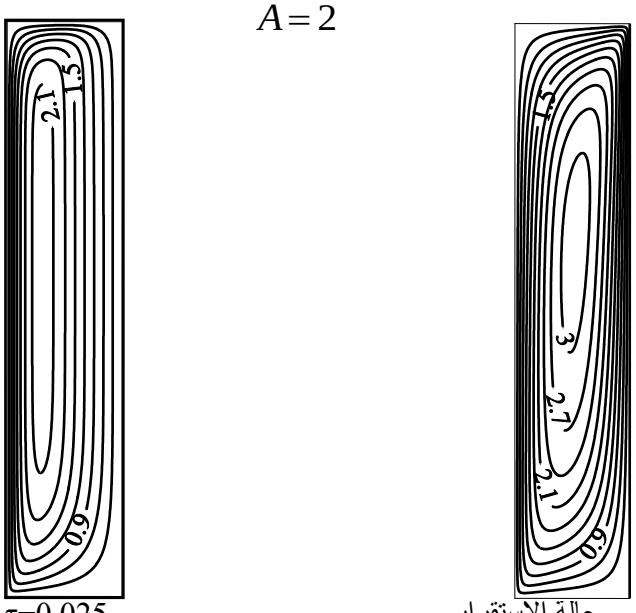

**شكل ( 9 ) يوضح تأثير تغير نسبة نصف القطر على**
**خطوط ثبوت درجات الحرارة عند** $A = 2, Ra^* = 1000$




$A=1$

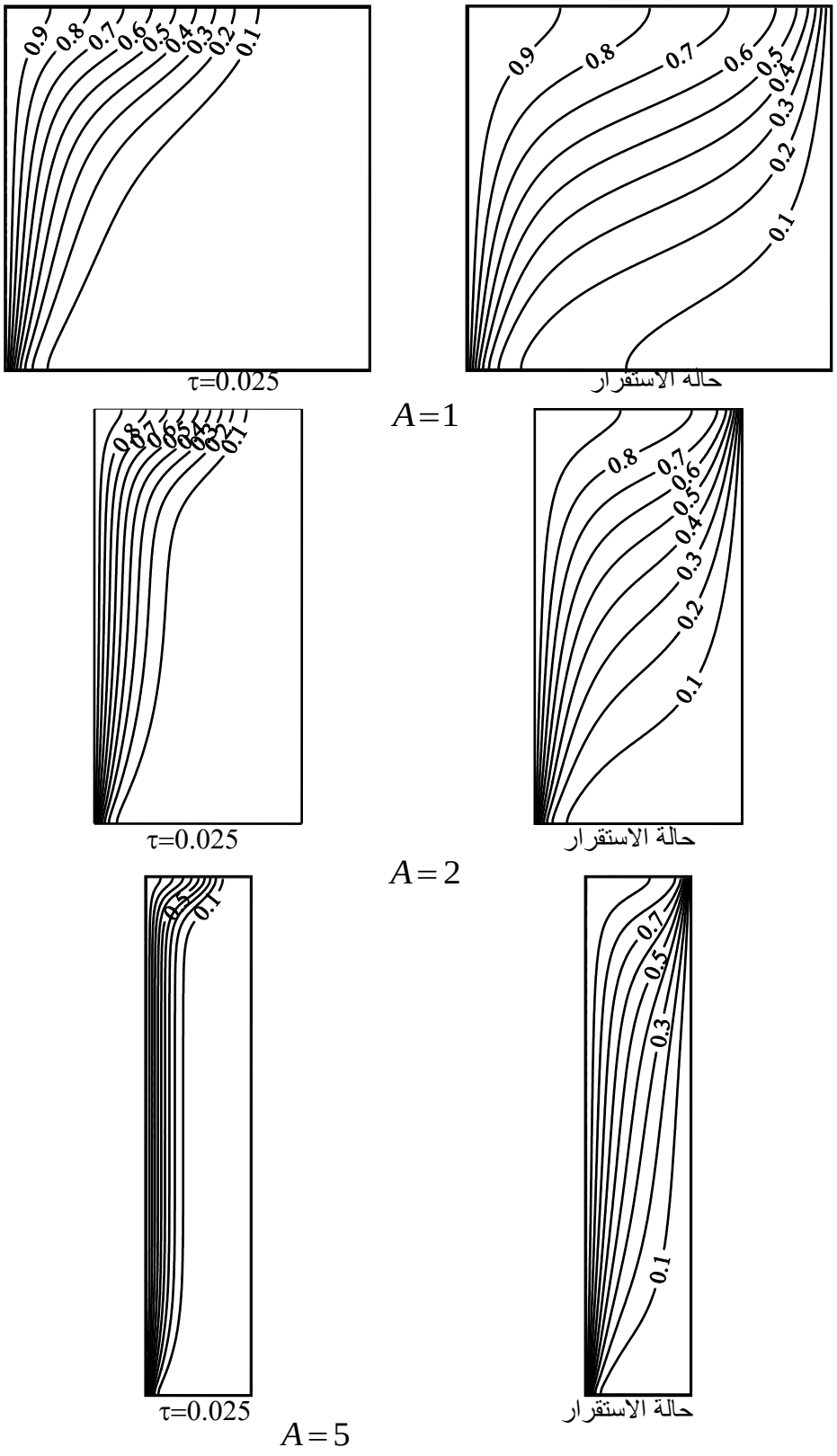



$A=2$



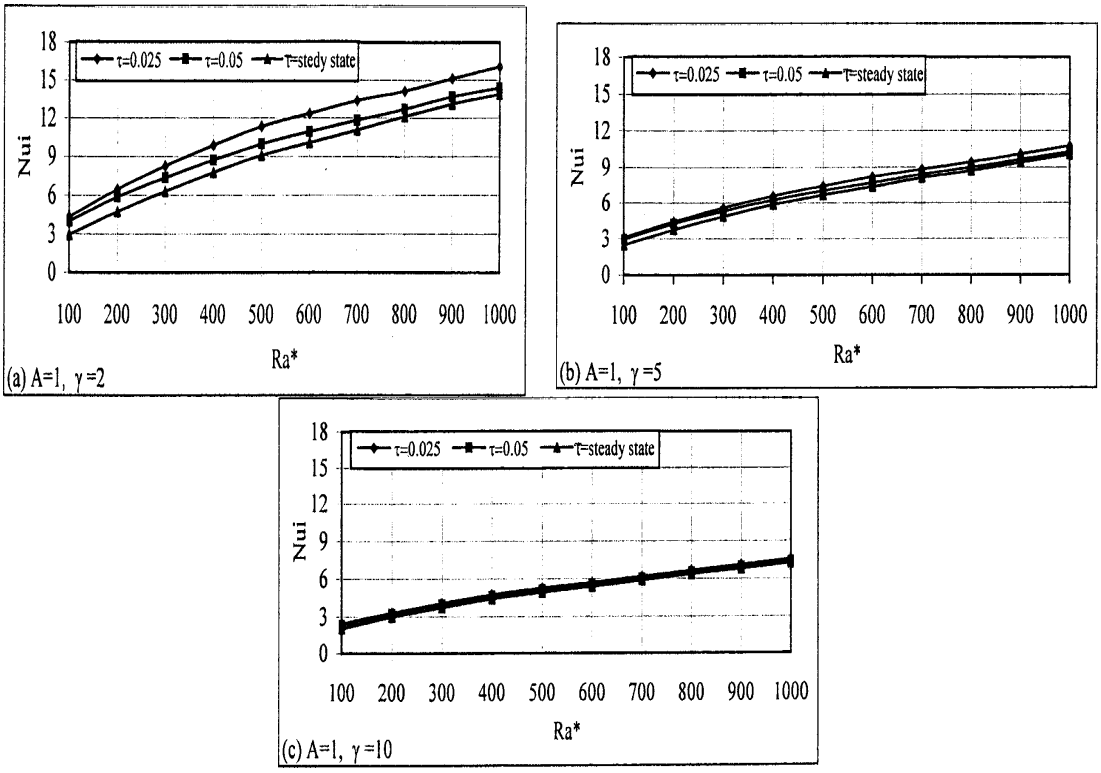

$A=5$

**شكل ( 10 ) يوضح تأثير تغير النسبة الباعية على**
**خطوط الانسياب عند** $\gamma=2, Ra^*=100$

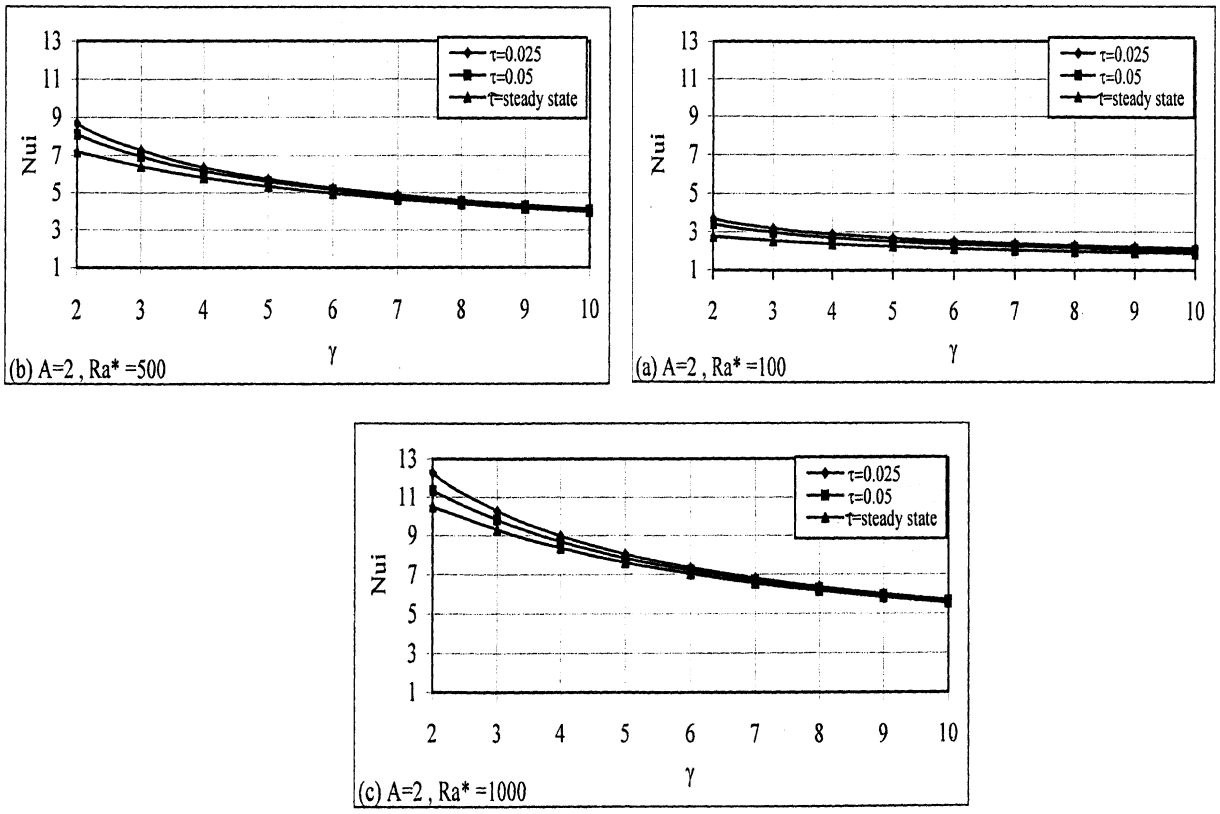



**شكل ( 11 ) يوضح تأثير تغير النسبة الباعية على**

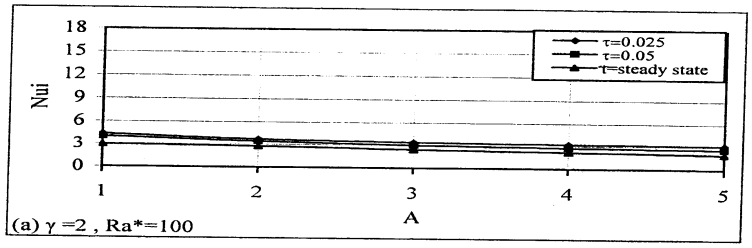
**خطوط ثبوت درجات الحرارة عند** $\gamma = 2, Ra^* = 100$

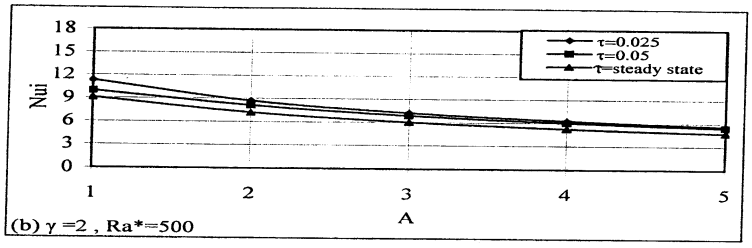


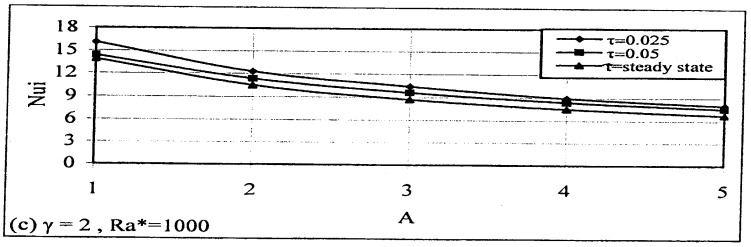

**شكل ( 12 ) تغير عدد نسلت الداخلي مع عدد رالي المطور والزمن**
**عندما $A=1$ ولقيم مختلفة من نسبة نصف القطر**




**شكل ( 13 ) تغير عدد نسلت الداخلي مع نسبة نصف القطر والزمن**
**عندما $A=2$ ولقيم مختلفة من عدد رالي المطور**




شكل ( 14 ) تغير عدد نسلت الداخلي مع النسبة الباعية والزمن

عندما $\gamma = 2$ ولقيم مختلفة من عدد رالي المطور

**المصادر**


l. Kaviany, M., " *Principles of Heat Transfer in Porous Media "*, Springer-vering New York, Inc., Second edition, 1999.

2. B ejan, A., " *Convection Heat* Transfer ", A Wily-Intercience Publication, Jon Wiley & Sons, Inc., 1984.

3. Cheng, P., " *Heat* Transfer in *Geothermal Systems ", Adv.* Heat Transfer, Vol. 14, pp. 1-105, 1978.

4. Dawood, A.S., " Steady *Three-Dimensional Natural Convection in Porous Media Via Multigrid Method ",* Ph.D. Dissertation,, Dept. of Mech. Eng., Colorado State University, 1991.

5. Kececioglu, I. and Rubinsky, B., *"A Continuum Module for The Propagation of Discrete Phase-Change Fronts in Porous Media in The Presence of Coupled Heat Flow, Fluid Flow and Species Transport Processes ", Int. J. Heat Transfer, Vol. 32, No. 6, pp. 1111-1130, 1989.*

6. Rees DAS., " *Three Dimensional Free Convection Boundary Layers in Porous Media Induced by a Heated Surface With Spanwise Temperature Variations "* Journal of Heat Transfer-Transactions of the ASME, Vol. 119, No. 4, pp. 792-798, 1997.

7. Wang, B. X., and Zhang, " *Natural Convection in Liquid-Saturated Porous Media between Concentric Inclined Cylinder ", Int. J.* Heat Mass Transfer, Vol. 33, N0. 5, pp. 827-833, 1990.
8. Prasad, V., and Kulacki, *F. A.," Natural Convection in a Vertical Porous Annulus "*, Int. J. Heat Mass Transfer, 27, pp. 207-219, 1984.
9. Hickox, C. E., and Gartling, D. K., " A *Numerical Study of Natural Convection in a Vertical Annular, Porous Layer ", 2I*$^{S'}$ National Heat Transfer Conf, ASME, No. 82-Ht-68, 1982. Also presented at the Int. J. Heat Mass Transfer, 28, pp. 720-723, 1985.


## قائمة الرموز

| الرموز | التعريف | الوحدة |
|---|---|---|
| $A$ | النسبة الباعية $=L/D$ | — |
| $C_p$ | الحرارة النوعية عند ثبوت الضغط | $J/kg\cdot K$ |
| $D$ | عرض فجوة الحلقة المسامية $=r_o-r_i$ | $m$ |
| $Da$ | عدد دارسي $=K/D^2$ | — |
| $f$ | أي دالة عامة | — |
| $g$ | التعجيل الأرضي | $m/s^2$ |
| $K$ | معامل النفاذية للوسط المسامي | $m^2$ |
| $k_e$ | الموصلية الحرارية الفعالة للوسط المسامي | $W/m\cdot K$ |
| $L$ | طول الأسطوانة | $m$ |
| $Nu$ | عدد نسلت $=Q_{conv.}/Q_{cond.}$ | — |
| $p$ | الضغط | $N/m^2$ |
| $Q$ | كمية الحرارة المنتقلة | $W$ |
| $Q_{cond.}$ | كمية الحرارة المنتقلة بالتوصيل | $W$ |
| $Q_{conv.}$ | كمية الحرارة المنتقلة بالحمل | $W$ |
| $R$ | الإحداثي بالاتجاه القطري اللابعدي$=(r-r_i)/(r_o-r_i)$ | — |
| $Ra$ | عدد رالي $=(\rho_0 g\beta D^3\Delta T)/(\mu\alpha_e)$ | — |
| $Ra^*$ | عدد رالي المطور $=(\rho_0 g\beta KD\Delta T)/(\mu\alpha_e)$ | — |
| $(r,z)$ | الإحداثيات بالاتجاهين القطري والشاقولي | $m$ |
| $T$ | درجة الحرارة المطلقة | $K$ |
| $\Delta T$ | الفرق في درجات الحرارة $=T_h-T_c$ | $K$ |
| $t$ | الزمن | $s$ |
| $U$ | سرعة المائع اللابعدية بالاتجاه القطري $=uD/\alpha_e$ | — |

| الرموز | التعريف | الوحدة |
|---|---|---|
| $u$ | سرعة المائع البعدية بالاتجاه القطري$=-\partial\psi/(r\partial z)$ | $m/s$ |
| $V$ | سرعة المائع اللابعدية بالاتجاه الشاقولي $=vD/\alpha_e$ | — |
| $Vol.$ | الحجم | $m^3$ |
| $v$ | سرعة المائع البعدية بالاتجاه الشاقولي$=\partial\psi/(r\partial r)$ | $m/s$ |
| $Z$ | الإحداثي بالاتجاه الشاقولي اللابعدي$=z/L$ | — |

### الرموز الإغريقية

| الرموز | التعريف | الوحدة |
|---|---|---|
| $\alpha_e$ | الانتشارية الحرارية الفعالة للوسط المسامي$=k_e/(\rho_f\cdot c_{p_f})$ | $m^2/s$ |
| $\beta$ | معامل التمدد الحراري الحجمي | $1/K$ |
| $\varepsilon$ | المسامية $=(Vol._{total}-Vol._{solid})/Vol._{total}$ | — |
| $\theta$ | درجة الحرارة اللابعدية $=(T-T_c)/(T_h-T_c)$ | — |
| $\mu$ | اللزوجة الدينماكية | $kg/m\cdot s$ |
| $\eta$ | نسبة نصف القطر المحددة $=D/r_i=\gamma-1$ | — |
| $\rho$ | الكثافة | $kg/m^3$ |
| $\psi$ | دالة الانسياب | $m^3/s$ |
| $\hat{\psi}$ | دالة الانسياب اللابعدية $=\frac{D}{\alpha_e r_i L}\cdot\psi$ | — |
| $\gamma$ | نسبة نصف قطر $=r_o/r_i$ | — |
| $\sigma$ | نسبة السعة الحرارية $=\frac{\varepsilon\rho_f c_{p_f}+(1-\varepsilon)\rho_s c_s}{\rho_f c_{p_f}}$ | — |
| $\tau$ | الزمن اللابعدي$=(\alpha_e\cdot t)/(D^2\sigma)$ | — |
| $\xi$ | أي خاصية عامة | — |

r


## Abstract

This paper deals with numerical study of the unsteady natural convection in porous media enclosed between two concentric vertical cylinders. The inner and outer surfaces are kept at constant different temperatures while, the top and bottom of the cylinders are wall insulated.

The governing equations are (continuity, momentum and energy equations), according to Darcy flow and Boussinesq approximation. The equations were formulated by non-dimensional method and solved by alternating-direction implicit method (A.D.I.), finite differences method devoted to Nusselt numbers. This study was done within a certain space of modified Rayleigh number ($100 \le Ra^* \le 1000$) and radius ratio ($2 \le \gamma \le 10$) and aspect ratio ($1 \le A \le 5$) and unsteady state.

In this study, the values of Nusselt number resulted from the programmed used have been compared with precious studies by using the same boundary conditions for the purpose of testing the validity of the numerical solution which was found correct.

The results indicated that inside Nusselt number increases by increasing modified Rayligh number and reduced by increasing any of time, radius ratio and aspect ratio.

The study also indicated that inside Nusselt number is a strong function of modified Rayligh number, time, radius ratio and aspect ratio.

The best approximate to fit the results of inside Nusselt number as a function of modified Rayligh number, time, aspect ratio and radius ratio:

$$Nu_i = 0.477 \cdot A^{-0.383} \cdot Ra^{*0.508} \cdot \gamma^{-0.399} \cdot \tau^{-0.057}$$