طريقة تايلور تجميعية ثنائية الابعاد

لمى طارق عباس / باحثة .
د. زينب كمالي / جامعة أزاد اصفهان الاسلامية .

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
https://doi.org/10.31272/jae.i141.1009

تأريخ أستلام البحث : 7 /2023/11
مقبول للنشر بتأريخ :2023/11/13

المستخلص

الهدف الرئيسي من البحث هو تقديم نهج عددي للحل العددي لمعادلات فولتيرا التكاملية ثنائية الأبعاد . خوارزمية تعتمد على استخدام كثيرات حدود تايلور لبناء حل توافقي $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{S}^{(-1)}_{\boldsymbol{p-1,p-1}}(\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{N,M}})$ لتقريب حل معادلتنا فولتيرا المتكاملتان بعد ذلك ، تم تطويرها ونوضح أن هذه الخوارزمية متقاربة . اذ يتم تضمين بعض الأمثلة العددية لإثبات دقة الطريقة المقترحة .

الكلمات المفتاحية : الطريقة الثنائية الابعاد لمعادلات فولتيرا التكاملية ، الطريقة التجميعية ، متعددة الحدود ، تحليل الخطأ .

مجلة الادارة والاقتصاد
مجلد 48 العدد 141 / كانون الاول / 2023
الصفحات : 135 - 147

*** بحث مستل من رسالة ماجستير .**

المعادلة التفاضلية [2]

هي معادلة رياضية تكون فيها الدالة المجهولة تحتوي على واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة ومشتقاتها. يتم حل العديد من مشاكل الفيزياء والكيمياء في الرياضيات باستخدام المعادلات التفاضلية. المعادلة التفاضلية مقسمة إلى نوعين من المعادلات التفاضلية العادية والمعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية.

تعريف 1-1 : المعادلة التفاضلية هي معادلة رياضية تكون فيها الدالة المجهولة تحتوي على واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة ومشتقاتها. يتم حل العديد من مشاكل الفيزياء والكيمياء في الرياضيات باستخدام المعادلات التفاضلية. المعادلة التفاضلية مقسمة إلى نوعين من المعادلات التفاضلية العادية والمعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية.

تعريف 1-2 : اذا كان $y = f(x)$ معرفا" على الفترة $I: a < x < b$ أي معادلة تشمل المتغير المستقل x ، **للتابع** $y = f(x)$ و مشتقات f هي معادله تفاضلية عادية .

تعريف 1-3 : يسمى أعلى ترتيب للمشتق في معادلة تفاضلية مرتبة المعادلة التفاضلية .

تعريف 1-4 : المعادلة التفاضلية ذات المشتقات الجزئية هي مجموعة من المعادلات التي تتضمن دالة غير معروفة من حيث العديد من المتغيرات المستقلة جنبًا إلى جنب مع المشتق الجزئي للتوابع فيما يتعلق بتلك المتغيرات ، ويمكن تقسيم هذا النوع من المعادلات إلى نوعين ، خطي و غير خطي .

تعريف 1-5 : معادله تفاضلية للفروق الخطي بالمضاريب المتغيرة هل على النحو التالي :

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{i=1}^{k} p_{ji}{}^{r}(t)y_i{}^{(r)}(\lambda t+\mu)=f_j(t),\ \ j=1,2,\dots,k \tag{1}$$

وكذلك لدينا الشروط الثابتة التالية:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{rj}{}^{n}y_n{}^{(j)}(a)+b_{r_j}{}^{n}y_n{}^{(j)}(b)+c_{r_j}{}^{n}y_n{}^{(j)}(c)=\lambda_{nr}, \tag{2}$$
$$a\le c\le b, r=0,1,\dots m-1, n=1,2,\dots,k$$

بحيث $y_i(t)$ تابع مجهول و $f_j(t)\ P_{ji}(t)$ توابع معلومة و معرفة ضمن **الفترة** $a\le t\le b$ ، كذلك $\lambda_{nr}, c_{rj}, b_{rj}, a_{rj}$ ثوابت لاعلى التعيين .

كثيرات حدود تايلور[3]

تعد سلسلة تايلور أداة بحيث يمكن تقييم أي دالة في فترة عشوائية فقط بمساعدة المعلومات حول الدالة ومشتقاتها في نقطة واحدة. أيضًا ، بمساعدة سلسلة تايلور ، يمكن كتابة أي دالة على أنها كثيرة الحدود وبقية .

هذه المسألة مفيدة جدًا لأن خصائص كثيرات الحدود معروفة وهي تجعل من الممكن حل العديد من المشكلات عدديًا . لذلك ، فإن منشور تايلور هو أساس العديد من الطرق العددية .

تعد كثيرات الحدود من أبسط الدوال التي تظهر في الرياضيات ومن السهل التعامل معها في العمليات الحسابية العددية لأن قيمها يمكن حسابها بسهولة .

لذلك ، يمكن تقريب دالة مثل f بمساعدة كثيرة الحدود مثل p ، أحدها هي كثيرة حدود تايلور ، والذي سنقدمه أدناه .

اذا كان $f(x)$ **في** $x = 0$ قابلا" للاشتقاق حتى n مرة و $P_n(x)$ كثيرة حدود من الدرجة n ، بحيث أن

$$p_n(0)=f(0)$$
$$p_n'(0)=f'(0)$$
$$\vdots$$
$$p_n{}^{(n)}(0)=f^{n}(0)$$

اذا كان $P_n(x)$ كما يلي،

$$P_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nX^n$$

عندئذ c_k يمكن الحصول عليها كما يلي:

$$p_n(0)=f(0)\rightarrow c_0=f(0)$$

$$p_n'(0) = f'(0) \to c_1 = \frac{f'(0)}{1!}$$
$$p_n''(0) = f''(0) \to c_2 = \frac{f''(0)}{2!}$$
$$c_k = \frac{f^k(0)}{k!} \quad , k = 0, 1, \dots, n$$

من اجل نقطة لاعلى التعيين x_0 سيكون

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \tag{3}$$

كثيرة الحدود هذه هي نفسها كثيرة حدود تايلور حول النقطة $x = x_0$ كذلك اذا كان التابع **f(x)** عند النقطة a قابلا للاشتقاق حتى n مرة ، كثيرات حدود تايلور له $T_n f(x)$ ستكون على النحو التالي :

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \tag{4}$$

طريقة تجميع تايلور

نقدم طريقة جديدة لإيجاد الحل التقريبي لجملة المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات العالية والمتغيرة من خلال تطوير المصفوفات التشغيلية وطريقة التجميع. افترض أن لدينا الجملة التالية:

$$\sum_{r=0}^{m} \sum_{i=1}^{k} P_{ji}{}^{r}(t) y_i{}^{(r)}(\lambda t + \mu) = f_j(t) \qquad \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{k} \tag{5}$$

كذلك الشروط التالية:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{r_j}^{\ n} y_n^{(j)}(a) + b_{rj}{}^{n} y_n^{(j)}(b) + c_{r_j}^{\ n} y_n^{(j)}(c) = \lambda_{nr}, \tag{6}$$
$$a \le c \le b,\ r = 0, 1, \dots, m - 1,\ n = 1, 2, \dots, k.$$

حيث $y_{\mathrm{i}}\ (t)$ تابع مجهول و $P_{j_i}^{\ n}(t)$ و $f_{\mathrm{j}}(t)$ توابع معلومة معرفة على الفترة $a \le t \le b$ و كذلك c_{rj}, b_{rj}, a_{rj} ثوابتا لاعلى التعيين.

هدفنا هو إيجاد الحل التقريبي للجملة (1) والذي يتم الحصول عليه بمساعدة سلسلة تايلور المقتطعة على النحو التالي:

$$y_i(t) = \sum_{n=0}^{N} y_{in}(t - c)^n$$
$$, y_{in} = \frac{y_i^n(c)}{n!} \tag{7}$$
$$\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{k},\ \ \mathrm{a} \le \mathrm{t} \le \mathrm{b}$$

حيث y_{in} مع $(\mathrm{n} = 0, 1, \dots \dots \dots, \mathrm{N}, \mathrm{i} = 1, \dots \dots, \mathrm{k})$ هي المضاريب المجهولة و N عدد صحيح موجب بحيث $N \ge m$.

إنقاص الخطأ في طريقة تجميع تايلور[4]

وفقًا للبحث ، نعلم أن طريقة تايلور للتجميع بها خطأ كبير في فترات كبيرة. نقترح الآن طريقة يمكن استخدامها لتقليل الخطأ على فترات كبيرة. في هذه الطريقة ، نأخذ المعادلة (2) بالشروط الأولية التالية:

$$\sum_{j=0}^{m-1} a_{r_j}^{\ n} y_n^{(j)}(a) = \lambda_{nr} \qquad r = 0, 1, \dots, m - 1, \qquad n = 1, 2, \dots, k. \tag{8}$$

من اجل حل هذه المسألة, نقوم اولا" بتقسيم الفترة $[a, b]$ الى M فترة متساوية، لذلك سيكون لدينا:

$$[a, b] = \bigcup_{d=0}^{M-1} [a_d, a_{d+1}] \quad , \qquad h = \frac{b - a}{M}$$

بحيث أن

$$a_d = a_0 + dh \quad , \qquad d = 0, 1, \cdots, M\ .$$

والان لنعرف $y_{i,n}(t)$ على النحو التالي:

$$y_{i,n}(t) \simeq \begin{cases} y_{i,0}(t), & a_0 \le t < a_1 \\ y_{i,1}(t), & a_1 \le t < a_2 \\ \vdots & \\ y_{i,d}(t), & a_d \le t < a_{d+1} \\ \vdots & \\ y_{i,M}(t), & a_{M-1} \le t < a_M \end{cases}$$

حيث أن $y_{i,d}(t)$ جواب المعادلة (5) ويحقق الشروط التالية:

$$y_{i,d}(a_d) = \lim_{t \to a_d} y_{i,d-1}(t) \qquad \textbf{(9)}$$

الآن علينا الحصول على الشروط الأولية عند $d =$ ، مثل الشروط المحددة في المعادلة (8). دون فقدان عمومية المسألة ، نستبدل t_d ب t. من أجل الحصول على $y_{i,d}(t)$ نعيد كتابة المعادلة (2) أولاً في الشكل المصفوفي التالي .

$$\sum_{r=0}^{m} P_{r,d}(t_d) y_d^{(r)}(\lambda t_d + \mu) = f(t_d) \qquad \textbf{(10)}$$

بحيث

$$P_{r,d}(t_d) = \begin{bmatrix} P_{11}^r(t_d) & P_{12}^r(t_d) & \cdots & P_{1k}^r(t_d) \\ P_{21}^r(t_d) & P_{22}^r(t_d) & \cdots & P_{2k}^r(t_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1}^r(t_d) & P_{k2}^r(t_d) & \cdots & P_{kk}^r(t_d) \end{bmatrix}$$

و

$$P_{r,d}(t_d) = \begin{bmatrix} P_{11}^r(t_d) & P_{12}^r(t_d) & \cdots & P_{1k}^r(t_d) \\ P_{21}^r(t_d) & P_{22}^r(t_d) & \cdots & P_{2k}^r(t_d) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{k1}^r(t_d) & P_{k2}^r(t_d) & \cdots & P_{kk}^r(t_d) \end{bmatrix},$$

$$f(t_d) = \begin{bmatrix} f_1(t_d) \\ f_2(t_d) \\ \vdots \\ f_k(t_d) \end{bmatrix}$$

لذلك يمكن الحصول على حل كثيرة حدود تايلور من المعادلة (2-22) بالصيغة (2-3).
نحدد نقاط تجميع تايلور على النحو التالي:

$$\mathrm{t}_{l,d} = a_d + \frac{a_{d+1} - a_d}{\mathrm{N}} l, \quad l = 0, 1, \ldots, \mathrm{N}. \qquad \textbf{(11)}$$

بحيث أن :

$$a_d \le t_d \le a_{d+1}, \qquad a_d = t_{0,d} < t_{1,d} < \cdots < t_{N,d} = a_{d+1}$$

بوضع نقاط تجميع تيلور (10) في (11) نحصل على الجملة التالية:

$$\sum_{r=0}^{m} P_{r,d} y_d^{(r)} = F_d,$$

بحيث :

$$\mathrm{P_{r,d}} = \begin{bmatrix} \mathrm{P_{r,d}}(\mathrm{t_{0,d}}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{P_{r,d}}(\mathrm{t_{1,d}}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{P_{r,d}}(\mathrm{t_{N,d}}) \end{bmatrix},$$

$$y_d^{(r)}=\begin{bmatrix} y_d^{(r)}(\lambda t_{0,d}+\mu)\\ y_d^{(r)}(\lambda t_{1,d}+\mu)\\ \vdots \\ y_d^{(r)}(\lambda t_{N,d}+\mu)\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F_d=\begin{bmatrix} f(t_{0,d})\\ f(t_{1,d})\\ \vdots\\ f(t_{N,d})\end{bmatrix}.$$

بوضع المعادلة $y^{(r)}(\lambda t+\mu)=T^*(t)\tilde{B}(\lambda,\mu)\tilde{B}^r A,\quad r=0,1,2,\dots,m$ و نقاط تجميع تيلور سنحصل على:

$$y_d^{(r)}(\lambda t_{l,d}+\mu)=T_d^*(t_{l,d})\tilde{B}(\lambda,\mu)\tilde{B}^r A_d \; l=0,1,\dots,N \quad d=0,1,\dots,M$$

والتي يمكن ان نكتبها على النحو التالي:

$$y_d^{(r)}=T_d\tilde{B}(\lambda,\mu)\tilde{B}^r A_d \tag{12}$$

بحيث :

$$T_d=[T^*(t_{0,d}) \quad T^*(t_{1,d}) \quad \dots \quad T^*(t_{N,d})]^T$$

$$\{\sum_{r=0}^{m} P_{r,d}T_d\tilde{B}(\lambda,\mu)\tilde{B}^r\}A_d=F_d\,. \tag{13}$$

المعادلة (13) يمكن ان تتلخص كما يلي:

$$w_d A_d=F_d \tag{14}$$

وهو جملة من المعادلات الخطية الجبرية تحتوي على $K(N+1)$ معادلة و $K(N+1)$ مجهول . بحل هذه الجملة نحصل على مضاريب تايلور و سنحصل على:

$$w_d=[W_{pq}]_d=\sum_{r=0}^{m} P_{r,d}T_d\tilde{B}(\lambda,\mu)\,\tilde{B}^r,\quad p,q=1,2,\dots,k(N+1). \tag{15}$$

وكذلك باستخدام (9) يمكن كتابة الشروط الأولية على النحو التالي:

$$\lim_{t_{d-1}\to a_d} y_{i,d-1}(t_{d-1})=\sum_{j=0}^{m-1} D_{rj,d}\, y_{i,d}^{(j)}(a_d), i=1,2,\dots,k,\; r=0,1,\dots,m-1. \tag{16}$$

بحيث

$$D_{r,j,d}=\begin{bmatrix} a_{r,j,d}^1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_{r,j,d}^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{r,j,d}^k\end{bmatrix},\quad \Lambda_{r,d}=\begin{bmatrix}\lambda_{1r,d}\\ \lambda_{2r,d}\\ \vdots\\ \lambda_{kr,d}\end{bmatrix},\quad r=0,1,2,\dots,m-1$$

وبالتالي خلاصة للمعادلة (16) يمكن ان تكتب على النحو التالي:

$$\sum_{j=0}^{m-1} D_{j,d}\, y_d^{(j)}(a_d)=\Lambda_d,$$

و

$$D_{j,d}=\begin{bmatrix} D_{0,j,d}\\ D_{1,j,d}\\ \vdots\\ D_{m-1,j,d}\end{bmatrix}_{mk\times k},\quad \Lambda_{r,d}=\begin{bmatrix}\lambda_{0,d}\\ \lambda_{1,d}\\ \vdots\\ \lambda_{m-1}\end{bmatrix}_{mk\times k}.$$

بوضع $y_d^{(j)}(a_d)$ في المعادلة (21) نحصل على العلاقة التالية:

$$\sum_{j=0}^{m-1}\left(D_{j,d}T_d^*(a_d)\tilde{B}^j A_d\right)=\Lambda_d\,. \tag{17}$$

المصفوفة V_d يمكن ان تعرف على النحو التالي:

$$V_d = \sum_{j=0}^{m-1} (\quad D_{j,d} T_d^{*}(a_d) \widetilde{B}_j$$

ومصفوفة الشروط الاولية ستكون كما يلي:

$$V_d A_d = \Lambda_d \ .$$

و بوضع المصفوفات V_d وΛ_d بدلا" من السطور الأخيرة في المصفوفات w_d و F_d على التوالي ، سنحصل على ما يلي :

$$\overline{W}_d A_d = \overline{F}_d \quad .$$

بحيث ان

$$\overline{W}_d = \begin{bmatrix} (w_{1,1})_d & (w_{1,2})_d & \cdots & (w_{1,k(N+1)})_d \\ (w_{2,1})_d & (w_{2,2})_d & \cdots & (w_{2,k(N+1)})_d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (w_{k,1})_d & (w_{k,2})_d & \cdots & (w_{k,k(N+1)})_d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (w_{k(N-m+1),1})_d & (w_{k(N-m+1),2})_d & \cdots & (w_{k(N-m+1),k(N+1)})_d \\ (v_{1,1})_d & (v_{1,2})_d & \cdots & (v_{1,k(N+1)})_d \\ (v_{2,1})_d & (v_{2,2})_d & \cdots & (v_{2,k(N+1)})_d \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (v_{mk,1})_d & (v_{mk,2})_d & \cdots & (v_{mk,k(N+1)})_d \end{bmatrix},$$

$$\overline{F}_d \quad = \left[f_1(t_{0,d}) \ \dots \ f_k(t_{0,d}) \ f_1(t_{1,d}) \ \dots \ \ f_k(t_{N-m,d}) \ \lambda_{10,d} \ \dots \ \lambda_{k,m-1,d} \right]^T .$$

اذ ان **المصفوفة** W **من الدرجة** (N+1) **ومع ذلك ، بالنسبة للجملة أعلاه ، يتم حساب معاملات تايلور بسهولة ويتم الحصول على الحل التقريبي للمعادلة (5) في ظل الشروط الأولية (9).**

حل معادلة فولتيرا التكاملية ببعدين بطريقة تجميع تايلور [1,2]

لنأخذ معادلة فولتيرا التكاملية ثنائية الأبعاد التالية:

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_0^x \int_0^y K(x,y,t,s,u(t,s))\, ds\, dt \qquad \textbf{(18)}$$

و

$$u(x,y) = g(x,y) + \int_0^x \int_0^y K(x,y,t,s,)u(t,s)\, ds\, dt \qquad \textbf{(19)}$$

توضيح الطريقة [4]

حيث $x, y \in D$ و التوابع g و K (مقادير حقيقية) معرفة على $D = [0,a] \times [0,b] \subset \mathbb{R}^2$ ، $S = \{(x,y,t,s), 0 \le t \le x \le a \ , 0 \le s \le y \le b\}$. يمكن اعتبار الطريقة المستخدمة هنا بمثابة تعميم لمعادلات فولتيرا المتكاملة أحادية البعد من النوع الثاني مع الأخذ في الاعتبار متغيرين (x,y) ، يظهر التحقيق في وجود وتفرد حل المعادلتين (1) و (2) بناءً على نظرية فولتيرا الكلاسيكية.

لنضع $\Pi_N := \{x_i = ih \, , i = 0,1,..,N\}$ و $\Pi_M := \{y_j = jk \, , j = 0,1,..,M\}$ وهي تجزئة منظمة للفترة $[0,a], [0,b]$ بقياسات معطاة $h = \frac{a}{N}$ و $k = \frac{b}{M}$. تعرف هذه التجزئة تقسيما" شبه منظما" من اجل D ، $\Pi_{N,M} = \Pi_N \times \Pi_M = \{(x_n, x_m), 0 \le n \le N \ , 0 \le m \le M\}$. نقوم بتنظيم الفترات الجزئية $\sigma_n := [x_n, x_{n+1}] \, , n = 0,1,\dots,N-2$ $\sigma_{N-1} := [x_{N-1}, x_N]$ بقياسات **h** و $\delta_m := [y_m, y_{m+1}] \, , m = 0,1,\dots,M-2$ $\delta_{M-1} := [y_{M-1}, y_M]$ **بقياسات k** و $D_{n,m} :=$ $\sigma_n \times \delta_m (n = 0,1,\dots,N-1 \quad m = 0,1,\dots,M-1)$. **كذلك لنأخذ** $\pi_{p-1,p-1}$ مجموعه جميع كثيرات الحدود الحقيقى من الدرجة أقل من **p-1 في x وy.** فضاء اس-بلاين لكثيرات الحدود الحقيقية من الدرجة **p-1** در **x** و **y** على النحو التالي .

$$S_{p-1,p-1}^{(-1)}(\Pi_{N,M}) := \{v: v_{n,m} = v\,\big|_{D_{n,m}} \in \pi_{p-1,p-1}, n = 0,1,..,N-1 \ m = 0,1,..,M-1\}$$

هذا الفضاء كثيات الحدود المنفصل ل اس-بلاين من الدرجة (على الأكثر) **p-1 في x وy** و منطقته هي NMP^2

توضيح جواب تايلور التجميعي (5)

حلول تايلور التجميعية في المستطيلات $D_{0,0}$ و $D_{n,0}$ و $D_{n,m}$ يتم تعيينها على الترتيب بحسب كثيرات الحدود $v_{0,0}$ و $v_{n,0}$ و$v_{n,m}$ من اجل $(n = 0,1,\dots,N-1 \ \ m = 0,1,\dots,M-1)$ ، بحيث أن

$$v_{0,0}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial x^i \partial y^j} x^i y^j \quad ,(x,y) \in D_{0,0} \tag{20}$$

حيث $\frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial x^i \partial y^j}$ ، **هو المقدار الدقيق ل** $\frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j}$ **عند النقطة** $(0,0)$**.**

$$v_{n,0}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} \hat{u}_{n,0}(x_n,0)}{\partial x^i \partial y^j} (x-x_n)^i y^j \quad ,(x,y) \in D_{n,0} \tag{21}$$

$$v_{n,m}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{p-1} \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} \hat{u}_{n,m}(x_n,y_m)}{\partial x^i \partial y^j} (x-x_n)^i (y-y_m)^j \quad ,(x,y) \ \ D_{n,m} \tag{22}$$

توضيح خوارزمية معادلات فولتيرا التكاملية غير الخطية (2)

من اجل الحصول على $\frac{\partial^j u(x,y)}{\partial y^j}$ نقوم باشتقاق المعادله (1) ، **j** مرة بالنسبة ل **y**.

$$\frac{\partial^j u(x,y)}{\partial y^j} = \partial_2^{(j)} g(x,y) + \int_0^x \sum_{r=0}^{j-1} \left[\partial_2^{(j-1-r)} K\big(x,y,t,y,u(t,y)\big)\right] dt + \int_0^x \int_0^y \partial_2^{(j)} K\big(x,y,t,s,u(t,s)\big) ds dt \tag{23}$$

والآن نشتق المعادلة (23) i مرة بالنسبة ل x حيث سنحصل على ما يلي:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+j} u(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} &= \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} g(x,y) \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}} \Big|_{t=x} \left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[\partial_2^{(j-1-r)} K\big(x,y,t,y,u(t,y)\big)\right]\right)\right] \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \int_0^x \frac{\partial^i}{\partial x^i} [\frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[\partial_2^{(j-1-r)} K\big(x,y,t,y,u(t,y)\big)\right] dt \\ &+ \int_0^x \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left[\partial_1^{(j-1-r)} \partial_2^{(j)} K\big(x,y,x,s,u(x,s)\big)\right] ds \\ &+ \int_0^x \int_0^y \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} K\big(x,y,t,s,u(t,s)\big) ds dt\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{i+j} u(0,0)}{\partial x^i \partial y^j} \\ &= \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} g(0,0) \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q} \left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}} \Big|_{t=x} \left(\frac{\partial^r}{\partial x^r} \left[\partial_2^{(j-1-r)} K\big(x,y,t,y,u(t,y)\big)\right]\right)\right]_{x=y=0}\end{aligned}$$

$\hat{v}_{n,0}$ الحل الدقيق للمعادلة التكاملية:

$$\hat{v}_{n,0}(x,y) = g(x,y) + \sum_{\xi=0}^{n-1} \int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \int_0^y K\left(x,y,t,s,v_{\xi,0}(t,s)\right) dsdt + \int_{x_n}^{x} \int_0^y K\left(x,y,t,s,\hat{v}_{n,0}(t,s)\right) dsdt \tag{14}$$

من اجل الحصول على $\frac{\partial^j \hat{v}_{n,0}(x,y)}{\partial y^j}$ نشتق المعادلة (24) **j** مرة بالنسبة ل **y**:

$$\frac{\partial^j \hat{v}_{n,0}(x,y)}{\partial y^j} = \partial_2^{(j)} g(x,y) + \sum_{\xi=0}^{n-1} \int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,0}(t,y)\right)\right] dt + \sum_{\xi=0}^{n-1} \int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \int_0^y \partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,v_{\xi,0}(t,s)\right) dsdt + \int_{x_n}^{x} \sum_{r=0}^{j-1} \frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\hat{v}_{n,0}(t,y)\right)\right] dt + \int_{x_n}^{x} \int_0^y \partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,\hat{v}_{n,0}(t,s)\right) dsdt \tag{25}$$

والان نشتق المعادلة (25) **i** مرة بالنسبة ل **x**

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{i+j} \hat{v}_{n,0}(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} &= \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} g(x,y) \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,0}(t,y)\right)\right]\right] dt \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}} \Big|_{t=x} \left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\hat{v}_{n,0}(t,y)\right)\right]\right)\right] \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \int_{x_n}^{x} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\hat{v}_{n,0}(t,y)\right)\right]\right] dt \\ &+ \int_0^y \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\partial_1^{(j-1-q)} \partial_2^{(j)} K\left(x,y,x,s,\hat{v}_{n,0}(x,s)\right)\right] ds \\ &+ \int_0^x \int_0^y \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,\hat{v}_{n,0}(t,s)\right) dsdt\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^{i+j} \hat{v}_{n,0}(x_n,0)}{\partial x^i \partial y^j} \\ &= \partial_1^{(i)} \partial_2^{(j)} g(x_n,0) \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1} \sum_{r=0}^{j-1} \int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,0}(t,y)\right)\right]\right]_{x=x_n,y=0} dt \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}} \Big|_{t=x} \left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\hat{u}_{n,0}(x,y)\right)\right]\right)\right]_{x=x_n,y=0}\end{aligned}$$

ثالثاً، $\widehat{v}_{n,m}$ الحل الدقيق للمعادله التكاملية:

$$\begin{aligned}\widehat{v}_{n,m}(x,y) = g(x,y) &+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{m-1}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,\rho}(t,y)\right) dsdt \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}}\int_{y_m}^{y} K\left(x,y,t,s,v_{\xi,m}(t,s)\right) dsdt \\ &+ \sum_{\rho=0}^{m-1}\int_{x_n}^{x}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} K\left(x,y,t,s,v_{n,\rho}(t,s)\right) dsdt \\ &+ \int_{x_n}^{x}\int_{0}^{y} K\left(x,y,t,s,\widehat{v}_{n,m}(t,s)\right) dsdt\end{aligned} \quad (26)$$

والآن من أجل كل $i+j = 0,1,\dots,p-1$ صيغة من اجل حساب المضاريب $\frac{\partial^{i+j}\widehat{v}_{n,m}(x_n,y_m)}{\partial x^i \partial y^j}$ باستخدام استدلال مشابه لما سبق من اجل الحصول على مقادير $\frac{\partial^{i+j}\widehat{v}_{n,0}(x_n,0)}{\partial x^i \partial y^j}$ ، بهدف الحصول على الصيغة التالية:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^j \widehat{v}_{n,m}(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} &= \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} g(x,y) + \sum_{\xi=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{m-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,v_{\xi,\rho}(t,s)\right) dsdt \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,m}(t,y)\right)\right]\right] \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}}\int_{y_m}^{y} \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,v_{\xi,m}(t,s)\right) dsdt \\ &+ \sum_{\rho=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{i-1}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\partial_2^{(j-1-r)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,y,v_{n,\rho}(t,y)\right)\right] ds \\ &+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\int_{x_n}^{x}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,v_{n,\rho}(t,s)\right) dsdt \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}} \Big|_{t=x}\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\widehat{v}_{n,m}(t,y)\right)\right]\right)\right] \\ &+ \sum_{r=0}^{j-1}\int_{x_n}^{x} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\widehat{v}_{n,m}(t,y)\right)\right]\right] dt \\ &+ \sum_{q=0}^{i-1}\int_{y_m}^{y} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\partial_1^{(j-1-q)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,x,s,\widehat{v}_{n,m}(x,s)\right)\right] ds \\ &+ \int_{x_n}^{x}\int_{y_m}^{y} \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,s,\widehat{v}_{n,m}(t,s)\right) dsdt\end{aligned} \quad (15)$$

وبالتالي

$$\frac{\partial^{i+j}\hat{v}_{n,m}(x_n,x_m)}{\partial x^i \partial y^j}$$
$$= \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} g(x_n,x_m) + \sum_{\xi=0}^{n-1}\sum_{\rho=0}^{m-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} \partial_1^{(i)}\partial_2^{(j)} K\left(x_n,x_m,t,s,v_{\xi,\rho}(t,s)\right) dsdt$$
$$+ \sum_{\xi=0}^{n-1}\sum_{r=0}^{j-1}\int_{x_\xi}^{x_{\xi+1}} \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,v_{\xi,m}(t,y)\right)\right]\right]_{x=x_n,y=y_m} dt$$
$$+ \sum_{\rho=0}^{m-1}\sum_{q=0}^{i-1}\int_{y_\rho}^{y_{\rho+1}} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\partial_2^{(j-1-r)}\partial_2^{(j)} K\left(x,y,t,y,v_{n,\rho}(t,y)\right)\right]_{x=x_n,y=y_m} ds$$
$$+ \sum_{r=0}^{j-1}\sum_{q=0}^{i-1} \frac{\partial^q}{\partial x^q}\left[\frac{\partial^{i-1-q}}{\partial x^{i-1-q}}\Big|_{t=x}\left(\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left[\partial_2^{(j-1-r)} K\left(x,y,t,y,\hat{v}_{n,0}(x,y)\right)\right]\right)\right]_{x=x_n,y=y_m}$$

دراسة تقارب و خطأ الطريقة العددية (3)

نظرية: لنضع **k** و **g** كتوابع تمتلك مشتقات مستمرة حتى المرتبة **p** على المنطقة المعطاة. عندئذ تعرف المعادلات (7) الى (8) تقريب وحيد $v \in S_{p-1,p-1}^{(-1)}(\Pi_{N,M})$ ولدينا تابع الخطأ الناتج $e(x,y) =$ $u(x,y) - v(x,y)$ كما يلي:

$$\|e\|_{L^\infty(D)} \le c(h+k)^p$$

حيث c ثابت محدود مستقل عن h وk.

مثال : لنأخذ معادلة فولتيرا التكاملية الخطية ثنائية الأبعاد التالية

$$u(x,y) = x\sin(y) + \frac{x^5}{4}(\cos(y)-1) - \frac{x^2}{4}\sin^2(y) + \int_0^x\int_0^y (xt^2+\cos(s))u(t,s)dsdt$$

من اجل $x,y \in [0,1]$ مع الحل الدقيق $u(x,y) = x\sin(y)$. نطبق طريقة تيلور الموضعية على المعادلة السابقة.

يوضح الجدول (1) الخطأ المطلق في بعض النقاط. يوضح الجدول (2) الخطأ المطلق في بعض النقاط بالترتيب. يظهر ترتيب تقارب التجارب (EOC) في الجدول (3). تم رسم دالة الخطأ المطلق في الشكل (1). في أشكال دالة الخطأ المطلق ، قمنا بالحساب بقيم مختلفة لـ M و N و P. من هذا الشكل ، يمكننا أن نرى أن دالة الخطأ تتناقص عندما تزداد قيم M و N و P

الجدول 1 : مقارنة الحل التقريبي و الدقيق للمثال

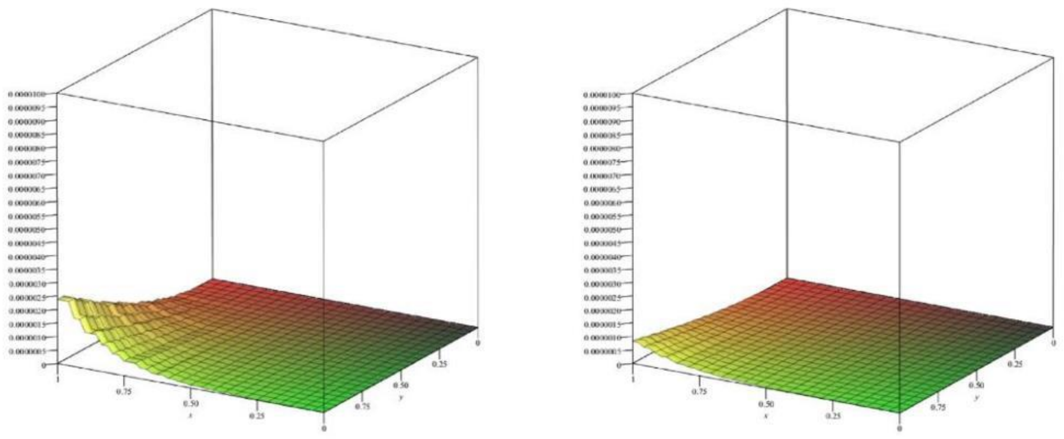
(x,y)	N=M=10	N=M=20	N=M=50
(0/0،0/0)	0	0	0
(0/1،0/1)	$2/e-807$	$5/e-919$	$4/e-832$
(0/2،0/2)	$3/e-729$	$5/e-816$	$3/e-870$
(0/3،0/3)	$1/e-629$	$1/e-785$	$1/e-828$
(0/4،0/4)	$3/e-628$	$4/e-754$	$3/e-806$
(0/5،0/5)	$6/e-671$	$9/e-711$	$6/e-811$
(0/6،0/6)	$1/e-521$	$1/e-662$	$1/e-808$
(0/7،0/7)	$2/e-501$	$2/e-668$	$1/e-877$
(0/8،0/8)	$3/e-519$	$4/e-621$	$2/e-878$
(0/9،0/9)	$4/e-589$	$6/e-643$	$4/e-824$
CPU Time/s	9/01	36/61	234/56

الجدول 2 : الخطأ المطلق في النقاط عندما يزداد M، N، P ،

(x,y)	P=4, N=M=10	P=5, N=M=20	P=6, N=M=50
(0/0،0/0)	0	0	0
(0/1،0/1)	$1/e-929$	$1/e-1117$	$1/e-1210$
(0/2،0/2)	$5/e-923$	$1/e-1125$	$8/e-1220$
(0/3،0/3)	$1/e-826$	$1/e-1060$	$3/e-1109$
(0/4،0/4)	$2/e-877$	$8/e-1052$	$1/e-1294$
(0/5،0/5)	$6/e-826$	$2/e-956$	$2/e-1075$
(0/6،0/6)	$1/e-745$	$8/e-936$	$8/e-1035$
(0/7،0/7)	$3/e-737$	$2/e-818$	$2/e-991$
(0/8،0/8)	$7/e-757$	$5/e-804$	$4/e-975$
(0/9،0/9)	$1/e-663$	$1/e-714$	$1/e-830$
CPU Time/s	62/13	632/42	3953/27

الجدول 3 : تقارب المثال

(N,M)	(2،2)	(4،4)	(8،8)	(16،16)	(32،32)	(64،64)
$P=2$	/	2/28	2/16	2/09	2/05	2/02
$P=3$	/	2/64	2/86	2/94	2/97	2/99



(a) The function e for $p=4$, $N=M=20$.

(b) The function e for $p=4$, $N=M=30$.

الشكل 1 : رسم الخطأ المطلق

الاستنتاجات

1- استخدمنا طريقة تايلور المحلية لتقدير حلول معادلات فولتيرا المتكاملة الخطية وغير الخطية ثنائية الأبعاد
2- تظهر النتائج ان هذه الطريقة فعالة وسهلة التنفيذ وحلول تقريبية موثوقة ويتم تحديدها بالصيغ المتكررة دون الحاجة إلى حل أي معادلات جبرية.
3- تم تقديم سلسلة من الأمثلة العددية لتوضيح أن هذه الطريقة تتقارب بدقة عالية ، وقد أكدت النتائج العددية التقديرات النظرية

التوصيات

1- استخدام طرق عدديه اخرى والمقارنه بينهم .
2- تعميم هذه الطريقة لتقريب معادلات فولتيرا المتكاملة في الوضع ثلاثي الأبعاد .

المصادر

1- Brunner H., 2004. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations, Vol. 15, Cambridge University Press.
2- Kazemi M., Ezzati R., 2016. Existence of solution for some nonlinear two-dimensional Volterra integral equations via measures of noncompactness, Appl. Math. Comput. 275 165–171.
3- McKee S., Tang T., Diogo T., 2000. An Euler-type method for two-dimensional Volterra integral equations of the first kind, IMA J. Numer. Anal. 20(3) 423–440.
4- Mirzaee F., Rafei Z., 2011. The block by block method for the numerical solution of the nonlinear two-dimensional Volterra integral equations, J. King Saud Univ. Sci. 23 (2) 191–195.
5- Pan Y., Huang J., 2020. Extrapolation method for solving two-dimensional volterral integral equations of the second kind, Appl. Math. Comput. 367, 124784.
6- Rahman M., 2007. Integral Equations and Their Applications, WIT Press.
7- Tari A., Rahimi M., Shahmorad S., Talati F., 2009. Solving a class of two-dimensional linear and nonlinear Volterra integral equations by the differentialtransform method, J. Comput. Appl. Math. 228 (1) 70–76.
8- Laib H., Bellour A., Bousselsal M., 2019. Numerical solution of high-order linear Volterra integro-differential equations by using Taylor collocation method, Int. J. Comput. Math. 96 (5) 1066–1085.
9- Yüzbas S, S ahin N, Yıldırım A. 2011. Numerical solutions of systems of high-order linear differential–difference equations with Bessel polynomial bases, Zeitschrift für Naturforschung A. J. Phys. Sci. 66a:519–32.
10- Yüzbas S. 2012. An efficient algorithm for solving multi-pantograph equation systems. Comput. Math. Appl .

Abstract

The main goal of the research is to provide nanoscale numerical solution of two-dimensional Volterra integral equations. An algorithm is based on the use of Taylor polynomials to construct a harmonic solution $v \in S_{p-1,p-1}^{(-1)}(\Pi_{N,M})$ to approximate the solution of the two integral Tavera equations. Next, it is developed and illustrated. Some Numerical examples of the inverse proof of the convergent algorithm method.

Keywords : Two-dimensional Volterra integral equation, Collocation method, Taylor polynomials, Error analysis.

****

****

****