# استخدام المحاكاة للمقارنة بين طريقتي التقدير (ML) و (FGNLS) لانموذج الانحدار الذاتي الدوري ذو المعامل العشوائي RCPAR(1)

**حسين علي حسين / باحث .**
**أ.د.جواد كاظم خضير / الجامعة المستنصرية / كلية الادارة والاقتصاد .**

P: ISSN : 1813-6729
E : ISSN : 2707-1359
https://doi.org/10.31272/jae.i139.1089

تأريخ أستلام البحث : 2022/8/7 مقبول للنشر بتأريخ : 2022/10/10

**المستخلص :**

تم تقديم انموذج الانحدار الذاتي الدوري ذو المعامل العشوائي من الرتبة الاولى RCPAR(1) من قبل الباحثين (Frances and Paap,2011), وذلك لاهميته في مجال تطبيقات السلاسل الزمنية الموسمية, وتقليصه لعدد المعلمات في الانموذج الانحدار الذاتي الدوري PAR(1) غير المقيد , حيث ان تزايد عدد المعلمات ينتج عنه مشكلة في مرحلة التقدير .وبذلك تم دراسة هذه المرحلة باستخدام اسلوب الامكان الاعظم (ML) واسلوب المربعات الصغرى غير الخطية الممكنة(FGNLS) والمقارنة بينهما من خلال تطبيق ثلاث تجارب للمحاكاة بطريقة مونت – كارلو. وتم التوصل الى وجود تحيز واضح للعينات الصغيرة في مقدرات (ML) ومن ثم افضلية اسلوب (FGNLS) في تقدير معلمات الانموذج RCPAR(1) على اسلوب (ML) للعينات المستخدمة كافة.

**الكلمات المفتاحية :** الانموذج RCPAR(1) , الانموذج PAR(1) , مقدر FGNLS , مقدر ML

**مجلة الادارة والاقتصاد**
**مجلد 48 العدد 139 / أيلول / 2023**
**الصفحات : 192 - 203**

*** بحث مستل من رسالة ماجستير .**

## 1. المقدمة

على الرغم من ان نماذج الانحدار الذاتي الدورية (Periodic autoregressive model PAR) قد يكون لها فوائد مهمة من حيث الملائمة والتنبؤ والتفسير, الا ان المشكلة الرئيسة تكمن في ان عدد المعلمات يزداد بسرعة مع عدد الفصول , مما يجعل هذه النماذج اقل جاذبية في تطبيق البيانات الاسبوعية. وفي بعض الاحيان البيانات الشهرية ايضا, والسبب في ذلك هو ان نماذج (PAR) غير المقيدة من الدرجة (P) للبيانات الموسمية مع التردد (s) ينتج عنه (PS) من المعلمات . علاوة على ذلك, مشاكل التقدير المحتملة بسبب النقص الذي يحصل في درجات الحرية , الامر الذي يجعل تفسير هذا العدد من المعلمات ليس سهلا.

وتأسيسا على ذلك , فقد قدم الباحثان (Frances and Paap , 2011)[6] حلاً لهذه المشاكل من خلال اقتراح انموذج انحدار ذاتي دوري جديد, الذي يمكن استخدامه بسهولة للبيانات الموسمية عالية التردد مع الحفاظ على قابلية تفسير المعلمات وذلك من خلال استخدام تقريب فوريير (Fourier Series) الذي اقترح من قبل الباحثون (Bloomfield , Hurd and Lund, 1994)[5] . ونظرا لكون المعلمات الدورية نفسها تظهر نمطا متكررا, فانه يمكن تلخيصها بمجموع دالتي الجيب والجيب تمام. وقد اقترح الباحثان ( Jones and Brelsford,1967)[7] النظر في مجموعة مقيدة من هاتين الدالتين من اجل الحصول على درجات حرية كافية. وان هذا الاقتراح تم توظيفه في الانموذج (PAR) مع تعديل واحد اساسي من قبل الباحثان (Frances and Paap , 2011) , وذلك من خلال وضع خطأ اضافي في الانموذج . ومن ثم هناك انموذج من المستوى الاول يتضمن متغير السلسلة الزمنية يتم تفسيره من خلال المشاهدات السابقة , وانموذج عشوائي من المستوى الثاني للمعلمات الدورية. وبذلك اطلق على الانموذج المشترك تسمية انموذج الانحدار الذاتي الدوري ذو المعامل العشوائي ( Random-coefficient periodic autoregressions) ويكتب اختصارا (RCPAR).

## 2. مشكلة البحث:

في السلاسل الزمنية الموسمية وعندما يكون عدد المواسم فيها كبير , فان عدد معلمات الانحدار الذاتي يصبح كبيراً أيضاً , لذا فأن المشكلة الرئيسة تكمن بأن عدد المعلمات تزداد مع تزايد عدد الفصول ، مما يجعل عملية التقديرلهذه النماذج معقدة للغاية وبخاصة اسلوب الامكان الاعظم (ML) الذي يساهم في اعطاء مقدرات غير متحيزة وكفوءة على الاغلب , لذا فان الاستقصاء عن طرائق اخرى يكون في غاية الاهمية ليتسنى استخدامها كونها أحد البدائل والتحري عن خصائصها الاحصائية.

## 3. هدف البحث :

يهدف البحث الى المقارنة بين طريقتي التقديرالامكان الاعظم (ML) والمربعات الصغرى غير الخطية المعممة الممكنة (FGNLS) لانموذج الانحدار الذاتي الدوري ذو المعامل العشوائي RCPAR(1) في السلاسل الزمنية الموسمية للتحري عن الاسلوب الملائم في عملية تقدير الانموذج المذكور من خلال تطبيق تجارب المحاكاة بطريقة مونت - كارلو.

## 4. انموذج الانحدار الذاتي الدوري ذو المعامل العشوائي RCPAR [3,4,6]

على فرض ان $\{y_t\}$ لكل $t = 0, 1, 2, \dots, SN$ تمثل سلسلة زمنية موسمية وان (**S**) تشير الى عدد الفصول ذات فترة طولها (**N**). وعادة (**N**) تشير الى عدد السنوات و (**S**) عدد الاشهر او ارباع السنة او ايام الاسبوع.

ان وصف السلسلة الزمنية الموسمية للانموذج (**PAR**) من الرتبة الاولى يكون كما يأتي:

$$y_t = \sum_{s=1}^{S} \left(\mu_s D_{s,t} + \phi_s D_{s,t} y_{t-1}\right) + \epsilon_t \quad \dots . (1)$$

اذ ان $D_{s,t}$ تساوي (1) اذ كانت تتوافق مع الموسم (**s**) وتساوي (**0**) خلاف ذلك , $\epsilon_t \sim NID(0, \sigma_\epsilon^2)$. , ($\mu$) معلمات المقاطع الموسمية و ( $\phi_s$)المعلمات الدورية العشوائية

ولضمان استقرارية السلسلة الزمنية , يفترض ان $\prod_{s=1}^{S} \phi_s < 1$. واذا كانت (**s**) كبيرة , فان عدد معاملات الانحدارالذاتي يصبح كبيرا ايضا. وطبقا لمقترح (Jones and Brelsford,1967) , فان المعلمات توصف من خلال الدالة الحتمية الاتية:

$$\phi_s = \alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2 \pi\right) \quad \dots (2)$$

اذ ان $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ معلمات غير معلومة , وان هذه الدالة تقلل عدد المعلمات من (**S**) الى (3) . ويلاحظ لتحديد المعلمة يتم تقييد $(\alpha_2 \in [0, 1)$ مثل :

$$cos(x + k\pi) = (-1)^k cos(x) \quad , k \in 2 \quad \ldots.(3)$$

حيث ($k$) يمثل عدد الدورات . وفي بعض السلاسل الزمنية الاقتصادية , خاصة عندما تكون ($S$) كبيرة فان المواصفات الحتمية الموضحة في المعادلة (2) قد تكون شديدة التقييد. لذلك تم اقتراح توسيع المعادلة (2) باضافة حد للخطأ العشوائي , وينتج عن ذلك ما يأتي:

$$\phi_s = \alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right) + u_s \quad \ldots(4)$$

اذ ان $u_s \sim NID(0, \sigma_u^2)$ , وان $E(u_s\epsilon_t) = 0$ لكل قيم **(s , t)** .

ان حد الخطأ هذا يميز المعادلة (4) عن المواصفات الحتمية (المعادلة 2). كما ان اضافة حد الخطأ من المستوى الثاني الى تحديد معامل عشوائي. ويتمثل الاختلاف في نهج المعامل العشوائي القياسي في القيام بتقليص معلمات (**PAR**) الى الدالة الحتمية بدلا من المتوسط البسيط. وبذلك سوف يطلق على الانموذج **PAR**(1) بالاشتراك مع المعادلة (4) تسمية الانموذج **RCPAR** من الدرجة الاولى $[\mathbf{RCPAR(1)}]$ .

## 5. تقدير المعلمات : Parameters Estimation [1,6,8]

يمكن اجراء تقدير المعلمات للانموذج (**PAR**) من المواصفات الحتمية باستخدام اسلوب المربعات الصغرى غير الخطية (**NLS**) Nonlinear Least Squares.

فعندما تكون قيمة $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ معطاة فانه يمكن بسهولة حساب القيم المثلى للمعلمات المتبقية باستخدام المربعات الصغرى الاعتيادية (**OLS**). ومن ثم اجراء تعظيم غير خطي بالنسبة الى المعلمات الثلاث ($\boldsymbol{\alpha}$). ففي حالة الانموذج (RCPAR) لا يمكن استخدام مقدر (**NLS**) بعد ذلك. وبدلا من ذلك اقترح الباحثان (Frances and Paap , 2011) مقدر (**NLS**) المعمم الممكن **( Feasible generalized NLS)** الذي يرمز له (**FGNLS**) .

## 6. مقدر المربعات الصغرى غير الخطية المعممة الممكنة FGNLS

في حالة مواصفات المعامل العشوائي الموضح بالمعادلة (4) فانه يمكن كتابة الانموذج PCPAR(1) على النحو الاتي:

$$\begin{aligned} y_t &= \sum_{s=1}^{S}\left[\mu_s D_{s,t} + \left\{\alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right) + u_s\right\} D_{s,t} y_{t-1}\right] + \epsilon_t \\ &= \sum_{s=1}^{S}\left[\mu_s D_{s,t} + \left\{\alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right)\right\} D_{s,t} y_{t-1}\right] + u_s D_{s,t} y_{t-1} + \epsilon_t \\ &= \sum_{s=1}^{S}\left[\mu_s D_{s,t} + \left\{\alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right) D_{s,t} y_{t-1}\right\}\right] + v_t \end{aligned}$$

...(5)

حيث ان عنصر الخطأ المساوي الى :

$$v_t = D_{s,t} u_s y_{t-1} + \epsilon_t$$

يكون غير متجانس , وبذلك يكونان $E(u_s y_{t-1}) \neq 0$ . وللسلسلة الزمنية المستقرة , فان القيم التطبيقية لـ ($\phi_s$) تكون حوالي (0.5) ومن ثم يكون حاصل الضرب تقريبا (صفر) عندما (**s**) تكون (12) او اعلى. وسوف يستخدم هذا التقريب لاشتقاق المقدر (**FGNLS**) بشكل اسهل حسابيا. وعند افتراض التقريب الصفري فان متجه الاضطرابات (Disturbances) $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر ومصفوفة تباين مشترك ($\boldsymbol{\Omega}$) ذات رتبة (**nxn**) التي يمكن تقريبها من خلال :

$$\Sigma_v = \sigma_\epsilon^2 I_n + \Sigma_u \quad \ldots(6)$$

حيث ان العنصر **(i,j)** من المصفوفة ($\boldsymbol{\Sigma}$) بالرتبة (**nxn**) مساويا الى $(\sigma_u^2 D_{s,i} y_{t-i} D_{s,j} y_{t-j})$ . ان الميزة لهذا التقريب كونه يؤدي الى مصفوفة التباين المشترك التي يمكن قلبها بسهولة بسبب هيكليتها الخاصة.

وعند بناء مقدر (**FGNLS**) يقتضي ان تكون المقدرات لـ $(\sigma_v^2)$ و $(\sigma_u^2)$ متسقة. وبذلك فان المقدر المتسق لـ $(\sigma_\epsilon^2)$ يعطى على النحو الاتي:

$$\sigma_\epsilon^2 = (N - 2S)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \hat{e}_t^2 \quad \ldots(7)$$

اذ ان $\hat{e}_t$ تمثل البواقي لطريقة (**OLS**) من الانموذج :

$$y_t = \sum_{s=1}^{S}\left(\mu_s D_{s,t} + \phi_s D_{s,t} y_{t-1}\right) + e_t \quad \ldots.(8)$$

وان المقدر $(\sigma_u^2)$ يمكن الحصول عليه من خلال تقدير معاملات المعادلة :

$$\hat{\phi}_s = \alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right) + w_s \quad \ldots(9)$$

لكل قيم $s = 1,, \ldots, S$ باستخدام طريقة (NLS), حيث ان $\hat{\phi}_s$ هو تقدير (OLS) الذي تم الحصول عليه من المعادلة (8).

وعند الاشارة الى بواقي (NLS) بـ $(\hat{w}_s)$ , فان المقدر لـ $(\sigma_u^2)$ يعطى على النحو الاتي:

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{S}\sum_{s=1}^{S}\hat{w}_t^2 \quad \ldots.(10)$$

ويلاحظ ان هذا المقدر يكون متسق عندما يقترب كل من (S) و (n) الى مالانهاية. وفي التطبيق قد يكون (S) صغير نسبيا , وقد يتم تقسيمه على (S-3) بدلا من (S).

ان مقدر (FGNLS) البسيط يأتي من خلال تصغير $(v'\hat{\Sigma}_v^{-1}v)$ بالنسبة الى متجه المعلمات $(\alpha)$ و $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_S)$ . حيث تعطى قيمة ( $\hat{\Sigma}_v$ ) تعطى من خلال المعادلة (6) التي تم تقييمها في $(\hat{\sigma}_u^2)$ و $(\hat{\sigma}_v^2)$ . وعندما تكون قيمة المعلمات $(\alpha)$ معلومة يمكن الحصول على القيم المثلى للمعلمات المتبقية باستخدام مقدر (FGNLS) ومن ثم التصغير بالنسبة الى المعلمات $(\alpha)$.

كما يمكن تقدير الاخطاء المعيارية للمعلمات باستخدام $(\hat{G}'\hat{\Sigma}_v'\hat{G})$, حيث ان $(\hat{G})$ تمثل متجه ذو البعد (n) لمشتقات الدرجة الاولى لمتوسط الانحدار غير الخطي المعرف بالمعادلة (5) بالنسبة الى $(\alpha)$ و $(\mu)$ الناتجة عن تقديرات (FGNLS). ولان $E(u_s y_{t-1}) \neq 0$ وكذلك استخدام التقريب لمصفوفة التباين المشترك $(\Omega_v)$ , فانه قد ينتج عن ذلك تحيز في مقدر (FGNLS). ونظرا الى احقيقة ان الارتباط بين $(y_{t-1})$ و $(u_s)$ يساوي صفر عندما (s) تساوي (12) او اعلى , فانه من المتوقع ان يكون التحيز صغيرا.

## 7. مقدر الامكان الاعظم (ML) [2,6]

من عيوب مقدر (FGNLS) انه يعتمد على حساب معكوس مصفوفة التباين المشترك $(\Omega_v)$ ذات البعد (nxn). وان ميزة التقريب للمصفوفة $(\Sigma_v)$ يؤدي الى الحصول على معكوس هذه المصفوفة بتحليل جبري بسيط طبقا لهيكلية المصفوفة. اما ميزة منهجية (ML) لتقدير المعلمات من خلال عدم حساب معكوس مصفوفة التباين المشترك. وان دالة الكثافة الاحتمالية لـ (Y) مشروطة على $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_S)$ تكون على النحو الاتي :

$$f(Y|\phi; \mu, \sigma_\varepsilon) = \prod_{s=1}^{S}\prod_{T=1}^{N}\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\,\Phi\left(\frac{y_{s+S(T-1)} - \mu_s - \phi_s y_{s+S(T-1)-1}}{\sigma_\varepsilon}\right) \ldots(11)$$

حيث $\Phi(.)$ تشير الى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي القياسي.

ويمكن النظر الى كل فصل (S) من الفصول بشكل منفرد. وبذلك, فان دالة الكثافة غير المشروطة لـ (Y) تعطى على النحو الاتي:

$$f(Y; \mu, \alpha)$$

$$= \int_{R^s} f(Y|\phi; \mu, \sigma_\varepsilon)\prod_{s=1}^{S}\frac{1}{\sigma_u}\,\Phi\left(\frac{\phi_s - \alpha_0 - \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right)}{\sigma_u}\right) d\phi_1 \ldots d\phi_S$$

$\ldots(12)$

ويمكن تقسيم هذه الكثافة غير المشروطة الى اجزاء (S) وكل منها يساوي :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_u}\Phi\left(\frac{\phi_s - \bar{\phi}_s}{\sigma_u}\right)\prod_{T=1}^{N}\frac{1}{\sigma_\varepsilon}\,\Phi\left(\frac{y_{s+S(T-1)} - \mu_s - \phi_s y_{s+S(T-1)-1}}{\sigma_\varepsilon}\right) d\phi_S \quad \ldots(13)$$

بحيث ان :

$$\bar{\phi}_s = \alpha_0 + \alpha_1 cos\left(\frac{2\pi s}{S} - \alpha_2\pi\right)$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\Phi}}_{\boldsymbol{s}} = \left( \sigma_{\boldsymbol{u}}^{-2} + \sum_{\boldsymbol{T=1}}^{\boldsymbol{N}} \left( \frac{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)-1}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right)^{\boldsymbol{2}} \right)^{\boldsymbol{-1}} \left( \frac{\overline{\Phi}_{\boldsymbol{s}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}} + \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)}} \left[ \frac{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)}} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{s}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{2}}} \right] \right) \quad \ldots (\mathbf{14})$$

ويمكن اعادة كتابة المعادلة (13) كما يأتي :

$$\boldsymbol{C}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{exp} \left( -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \frac{\left( \overline{\Phi}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \right)^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \sum_{\boldsymbol{T=1}}^{\boldsymbol{N}} \frac{\left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)}} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)-1}} \right)^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{2}}} \right.$$

$$\left. -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \frac{\left( \Phi_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \right)^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\Phi_{\boldsymbol{s}}}^{\boldsymbol{2}}} \right) \boldsymbol{d}\Phi_{\boldsymbol{S}} \quad \ldots (\mathbf{15})$$

عندما :

$$\boldsymbol{C} = \left( \sqrt{\boldsymbol{2\pi}} \right)^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{N}} \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}}}^{\boldsymbol{2}} = \left( \sigma_{\boldsymbol{u}}^{-2} + \sum_{\boldsymbol{T=1}}^{\boldsymbol{N}} \left( \frac{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)-1}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right)^{\boldsymbol{2}} \right)^{\boldsymbol{-1}} \quad \ldots . (\mathbf{16})$$

وبذلك فان نتائج التكامل تكون في :

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}} \left( \sqrt{\boldsymbol{2\pi}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^{\boldsymbol{N}}} \boldsymbol{exp} \left( -\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \frac{\left( \overline{\Phi}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \right)^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}^{\boldsymbol{2}}} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \sum_{\boldsymbol{T=1}}^{\boldsymbol{N}} \frac{\left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)}} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)-1}} \right)^{\boldsymbol{2}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\boldsymbol{2}}} \right)$$

....(17)

ومن ثم فان دالة الامكان يمكن ان تكتب على النحو الاتي :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{Y}|\Phi; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$$

$$= \prod_{\boldsymbol{s=1}}^{\boldsymbol{S}} \sqrt{\boldsymbol{2\pi}}\, \boldsymbol{\sigma}_{\widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}} \left( \frac{\overline{\Phi}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}}} \right) \prod_{\boldsymbol{T=1}}^{\boldsymbol{N}} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}} \boldsymbol{\Phi} \left( \frac{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)}} - \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{s}} - \widetilde{\Phi}_{\boldsymbol{s}} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{s+S(T-1)-1}}}{\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\epsilon}}} \right)$$

....(18)

ومن ثم يتم الحصول على مقدر (**ML**) بتعظيم دالة لوغاريتم الامكان في المعادلة (18) بالنسبة الى $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$. وان الاخطاء القياسية للمعلمات يمكن ايجادها من خلال المشتقات من الدرجة الثانية لدالة لوغاريتم دالة الامكان . ولوصف هيكلية (**PAR**), فان الانموذج (**RCPAR**) يتطلب اربع معلمات هي $(\boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{0}}, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{1}}, \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$ . ومن ثم ينبغي ان تكون هناك درجات حرية كافية لتطبيق هذا الانموذج عند وصف السلسلة الزمنية الشهرية , مع وجود (12) مشاهدة فقط لتقدير $(\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{u}})$.

## 8. الجانب التجريبي :

تضمن هذا البند استخدام المحاكاة في الجانب التجريبي للتحري عن خصائص مقدرات الانموذج **PCPAR(1)** بالاسلوبين (**ML**) و (**FGNLS**) . حيث تم اجراء تجارب المحاكاة للمقارنة بين هذين الاسلوبين عندما تخضع عينة مشاهدات السلسلة الزمنية للانموذج المذكور باستخدام المعادلة (1) سوية مع المعادلة (4).

## 9. خطوات تجارب المحاكاة :

**تم تنفيذ تجارب المحاكاة وفق الخطوات الاتية :**

1. استخدام ثلاثة حجوم عينات هي (N=50 , 100 , 200).
2. طول الموسم يساوي (S=12) وعدد تكرارات التجربة (R=10000).
3. ان كل من المتغيرين العشوائيين يتبعان التوزيع $\varepsilon \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ و $u \sim N(0, \sigma_u^2)$.
4. استخدام البرنامج (STAT.17 ) في عملية تنفيذ التجارب كافة.
5. ان القيم الافتراضية للمعلمات تشتمل على ثلاث مجاميع وكما يأتي:

**الجدول (1 ) يبين القيم الافتراضية للمعلمات المستخدمة في تجارب المحاكاة**

| التجربة | $\mu_1 = \cdots = \mu_{12}$ | $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ | $\sigma_\varepsilon$ | $\sigma_u$ |
|---|---|---|---|---|
| الاولى | 0.35 | 0.15 | 1.00 | 0.10 |
| الثانية | 0.45 | 0.25 | 1.00 | 0.15 |
| الثالثة | 1.00 | 0.50 | 1.00 | 0.30 |

6. ان معايير المقارنة المستخدمة في التجارب هي : القيمة المطلقة للتحيز $|biased|$, الخطأ المعياري للمعلمات المقدرة (Std) و القيمة الاحتمالية (P- value).

## 1.9 التجربة الاولى :

تم تنفيذ التجربة بحجوم عينات (50,100,200) وطول موسم (S=12) واعتماد القيم الافتراضية للمعلمات في الجدول (1) , ومن ثم تقدير معلمات الانموذج RCPAR(1) بالاسلوبين (ML) و (FGNLS) طبقاً للصيغتين (18) و (5) على التوالي, وذلك للمقارنة بين الاسلوبين المذكورين . **وكانت النتائج على النحو الاتي:**

1. يلاحظ من خلال الجدول (2) ان قيم المعايير المستخدمة في تطبيق الاسلوب (FGNLS) كانت اقل بشكل عام بالمقارنة مع المعايير نفسها لاسلوب (ML), مع وجود حالة واحدة فقط للمقدر $(\hat{\mu}_{10})$ , حيث كانت قيمة كل من المعياريين للاسلوب (ML) اصغر من قيمتيهما لاسلوب (FGNLS) مع بقاء الافضلية للاسلوب الاخير اعتمادا على القيمة الاحتمالية .
2. ويلاحظ ايضا في الجدول نفسه تقارب قيم المقدرات ( $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$) باستخدام الاسلوبين المذكورين مع ترجيح النتائج لاسلوب (FGNLS). فضلا عن ذلك, فان القيم الاحتمالية للمعلمات المقدرة في كلا الاسلوبين كانت اقل من (0.02) مما يعطي انطباعا جيدا لمعنوية الانموذج المقدر باستخدام هذين الاسلوبين.
3. ومن خلال الجدول (3) يلاحظ ان اسلوب (ML) قد طرح اقل القيم للمعايير المستخدمة باستثناء قيمة المعايير للمقدر $(\hat{\mu}_{10})$. فضلا عن تناقص قيم كل من المعيارين (.Std) و $(|biased|)$ للمعلمات المقدرة بهذا الاسلوب عما كانت عليه في حالة حجم العينة (50) الموضحة في الجدول (2 ) . فيما يلاحظ تزايد قيم المعيارين معا للمعلمات المقدرة باسلوب (FGNLS) مقارنة مع حالة العينة (50).
4. وينطبق التحليل نفسه في الفقرة (3) عند حجم العينة (200) والموضحة في الجدول (4).
5. وفيما يخص تأثير حجم العينة , يتبين عموما ان المعيار (Std) لاسلوب (ML) يتناقص عند حجم العينة (100) ثم يتزايد عند حجم العينة (200) باستثناء المعلمة ($\mu_{10}$ ). فيما تتذبذب قيم المعيار $(|biased|)$ بالتزايد والتناقص عند حجوم العينات كافة. اما قيم المعيارين (Std) و $(|biased|)$ لاسلوب (FGNLS) فانها تتزايد عند حجم العينة (100) ثم تتناقص عند حجم العينة (200) باستثناء قيم المعيار $(|biased|)$للمعلمات المقدرة ( $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ $(\sigma_\varepsilon, \sigma_u,$ . فهي تتناقص بزيادة حجم العينة على الدوام .

**الجدول (2) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الاولى الافتراضيةعندما (n=50)**

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.35 | 0.3323 | 0.0177 | 0.0265 | 0.0080 | 0.3654 | 0.0154 | 0.0227 | 0.0062 |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.35 | 0.3898 | 0.0398 | 0.0444 | 0.0114 | 0.3837 | 0.0337 | 0.0376 | 0.0098 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.35 | 0.3791 | 0.0291 | 0.0352 | 0.0093 | 0.3261 | 0.0239 | 0.0291 | 0.0089 |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.35 | 0.3113 | 0.0388 | 0.0435 | 0.0140 | 0.3837 | 0.0337 | 0.0376 | 0.0098 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.35 | 0.4124 | 0.0624 | 0.0654 | 0.0159 | 0.4029 | 0.0529 | 0.0555 | 0.0138 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.35 | 0.3346 | 0.0154 | 0.0250 | 0.000** | 0.3626 | 0.0126 | 0.0209 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.35 | 0.2980 | 0.0520 | 0.0556 | 0.0187 | 0.3952 | 0.0452 | 0.0482 | 0.0122 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.35 | 0.4080 | 0.0580 | 0.0613 | 0.0150 | 0.3992 | 0.0492 | 0.0519 | 0.0130 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.35 | 0.3387 | 0.0113 | 0.0227 | 0.000** | 0.3592 | 0.0092 | 0.0191 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.35 | 0.2729 | 0.0771 | 0.0796 | 0.0292 | 0.4347 | 0.0847 | 0.0864 | 0.0199 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.35 | 0.4243 | 0.0743 | 0.0769 | 0.0181 | 0.4130 | 0.0630 | 0.0652 | 0.0158 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.35 | 0.3336 | 0.0164 | 0.0256 | 0.000** | 0.3634 | 0.0134 | 0.0214 | 0.000** |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.15 | 0.1461 | 0.0039 | 0.0201 | 0.0138 | 0.1462 | 0.0039 | 0.0171 | 0.0117 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.15 | 0.1516 | 0.0016 | 0.0198 | 0.0131 | 0.1484 | 0.0016 | 0.0168 | 0.0113 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.15 | 0.15654 | 0.00654 | 0.02079 | 0.01328 | 0.15648 | 0.00648 | 0.01790 | 0.01144 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 1.02600 | 0.02600 | 0.03264 | 0.00000 | 0.97451 | 0.02549 | 0.03046 | 0.00000 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.10 | 0.1028 | 0.00287 | 0.0067 | 0.0000 | 0.1018 | 0.00186 | 0.0043 | 0.0000 |

**الجدول (3) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الاولى الافتراضيةعندما (n=100)**

| Par | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std.error error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.35 | 0.3651 | 0.0151 | 0.0199 | 0.000*** | 0.3674 | 0.0174 | 0.0240 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.35 | 0.3170 | 0.0330 | 0.0355 | 0.0112 | 0.3110 | 0.0390 | 0.0423 | 0.0136 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.35 | 0.3266 | 0.0234 | 0.0267 | 0.0082 | 0.3215 | 0.0285 | 0.0330 | 0.0103 |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.35 | 0.3830 | 0.0330 | 0.0355 | 0.0093 | 0.3880 | 0.0380 | 0.0414 | 0.0107 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.35 | 0.4018 | 0.0518 | 0.0534 | 0.0133 | 0.2889 | 0.0612 | 0.0633 | 0.0219 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.35 | 0.3623 | 0.0123 | 0.0179 | 0.000*** | 0.3651 | 0.0151 | 0.0223 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.35 | 0.3057 | 0.0443 | 0.0462 | 0.0121 | 0.4009 | 0.0509 | 0.0536 | 0.0134 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.35 | 0.3982 | 0.0482 | 0.0499 | 0.0125 | 0.2932 | 0.0568 | 0.0592 | 0.0202 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.35 | 0.3591 | 0.0091 | 0.0158 | 0.0044 | 0.3611 | 0.0111 | 0.0199 | 0.0055 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.35 | 0.2670 | 0.0830 | 0.0840 | 0.0315 | 0.4256 | 0.0756 | 0.0773 | 0.0182 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.35 | 0.4117 | 0.0617 | 0.0631 | 0.0153 | 0.2772 | 0.0728 | 0.0747 | 0.0270 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.35 | 0.3632 | 0.0132 | 0.0184 | 0.000*** | 0.3661 | 0.0161 | 0.0230 | 0.000*** |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.15 | 0.1538 | 0.0038 | 0.0135 | 0.0088 | 0.1538 | 0.0038 | 0.0169 | 0.0110 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.15 | 0.1485 | 0.0016 | 0.0130 | 0.0088 | 0.1484 | 0.0016 | 0.0166 | 0.0112 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.15 | 0.3651 | 0.0151 | 0.0199 | 0.000*** | 0.3674 | 0.0174 | 0.0240 | 0.000** |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.3170 | 0.0330 | 0.0355 | 0.0112 | 0.3110 | 0.0390 | 0.0423 | 0.0136 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.10 | 0.3266 | 0.0234 | 0.0267 | 0.0082 | 0.3215 | 0.0285 | 0.0330 | 0.0103 |

**الجدول (4) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الاولى الافتراضيةعندما (n=200)**

| Par | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.35 | 0.3333 | 0.0167 | 0.0217 | 0.000** | 0.3355 | 0.0145 | 0.0172 | 0.000*** |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.35 | 0.3874 | 0.0374 | 0.0399 | 0.0103 | 0.3817 | 0.0317 | 0.0330 | 0.0086 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.35 | 0.3774 | 0.0274 | 0.0307 | 0.000** | 0.3725 | 0.0225 | 0.0242 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.35 | 0.3136 | 0.0365 | 0.0390 | 0.0124 | 0.3183 | 0.0317 | 0.0330 | 0.0104 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.35 | 0.4087 | 0.0587 | 0.0603 | 0.0075 | 0.3003 | 0.0498 | 0.0406 | 0.0136 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.35 | 0.3356 | 0.0145 | 0.0200 | 0.000** | 0.3382 | 0.0118 | 0.0150 | 0.0044 |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.35 | 0.3011 | 0.0489 | 0.0508 | 0.0169 | 0.3925 | 0.0425 | 0.0435 | 0.0111 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.35 | 0.4046 | 0.0546 | 0.0563 | 0.0139 | 0.3038 | 0.0463 | 0.0411 | 0.0147 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.35 | 0.3394 | 0.0106 | 0.0174 | 0.000*** | 0.3413 | 0.0087 | 0.0126 | 0.000*** |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.35 | 0.2775 | 0.0725 | 0.0738 | 0.0266 | 0.4297 | 0.0797 | 0.0802 | 0.0187 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.35 | 0.4199 | 0.0699 | 0.0713 | 0.0170 | 0.2907 | 0.0593 | 0.0410 | 0.0144 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.35 | 0.3346 | 0.0154 | 0.0207 | 0.000** | 0.3374 | 0.0126 | 0.0156 | 0.000*** |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.15 | 0.1463 | 0.0037 | 0.0143 | 0.0098 | 0.1464 | 0.0036 | 0.0098 | 0.0067 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.15 | 0.1515 | 0.0015 | 0.0139 | 0.0092 | 0.1515 | 0.0015 | 0.0093 | 0.000** |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.15 | 0.3333 | 0.0167 | 0.0217 | 0.000** | 0.3355 | 0.0145 | 0.0172 | 0.000*** |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.3874 | 0.0374 | 0.0399 | 0.0103 | 0.3817 | 0.0317 | 0.0330 | 0.0086 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.10 | 0.3774 | 0.0274 | 0.0307 | 0.000** | 0.3725 | 0.0225 | 0.0242 | 0.000** |

**2.9 التجربة الثانية :**

باعتماد القيم الافتراضية للمعلمات في الجدول (1) , ومن ثم تقدير معلمات الانموذج RCPAR(1) بالاسلوبين (ML) و (FGNLS). كانت النتائج على النحو الاتي:

1. يلاحظ من خلال الجداول (5) , (6) و (7) ان قيم المعيار( Std) المستخدم في تطبيق اسلوب (FGNLS) كانت الاقل بالمقارنة مع قيم المعيار نفسه عند تطبيق اسلوب (ML).
2. اما فيما يتعلق بقيم المعيار ($|biased|$)فكانت الاقل نسبيا للاسلوب (ML) عند حجم العينة (50) باستثناء قيم هذا المعيار للمعلمات المقدرة $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\ (\sigma_\varepsilon, \sigma_u,$ حيث كانت الاقل للاسلوب (FGNLS) عند حجوم العينات كافة , فضلا عن ذلك كانت قيمة هذا المعيار هي الاقل نسبيا للاسلوب (FGNLS) عند حجمي العينة (100,200).
3. وفيما يخص تأثير حجم العينة, فانه يلاحظ بشكل عام ان قيم المعيار (Std) للاسلوبين (ML) و (FGNLS) تتناقص تماما مع زيادة حجم العينة. اما فيما يخص قيم المعيار ($|biased|$) لاسلوبي التقدير فانها تتذبذب بالتناقص والتزايد مع زيادة حجم العينة بالنسبة للمعلمات $(\mu_1, \dots, \mu_{12})$. الا ان هذه القيم تتناقص مع زيادة حجم العينة بالنسبة للمعلمات $(\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2\ (\sigma_\varepsilon, \sigma_u,$ .
4. من خلال القيم الاحتمالية للجداول المذكورة يتضح ان مقدرات كلا الاسلوبين (ML ) و (FGNLS) كانت معنوية بدرجة عالية بالمقارنة مع مستوى المعنوية (0.05).

الجدول (5) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثانية الافتراضيةعندما (n=50)

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std error error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.45 | 0.4885 | 0.0385 | 0.0802 | 0.0164 | 0.5100 | 0.0600 | 0.0686 | 0.0135 |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.45 | 0.5299 | 0.0799 | 0.0848 | 0.0160 | 0.5253 | 0.0753 | 0.0724 | 0.0138 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.45 | 0.4756 | 0.0256 | 0.0831 | 0.0175 | 0.5200 | 0.0700 | 0.0707 | 0.0136 |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.45 | 0.4592 | 0.0092 | 0.0893 | 0.0194 | 0.5355 | 0.0855 | 0.0766 | 0.0143 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.45 | 0.4954 | 0.0454 | 0.0795 | 0.0161 | 0.4961 | 0.0461 | 0.0680 | 0.0137 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.45 | 0.5212 | 0.0712 | 0.0822 | 0.0158 | 0.4826 | 0.0326 | 0.0700 | 0.0145 |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.45 | 0.4885 | 0.0385 | 0.0802 | 0.0164 | 0.5100 | 0.0600 | 0.0686 | 0.0135 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.45 | 0.5299 | 0.0799 | 0.0848 | 0.0160 | 0.5253 | 0.0753 | 0.0724 | 0.0138 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.45 | 0.4756 | 0.0256 | 0.0831 | 0.0175 | 0.5200 | 0.0700 | 0.0707 | 0.0136 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.45 | 0.4592 | 0.0092 | 0.0893 | 0.0194 | 0.5355 | 0.0855 | 0.0766 | 0.0143 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.45 | 0.4954 | 0.0454 | 0.0795 | 0.0161 | 0.4961 | 0.0461 | 0.0680 | 0.0137 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.45 | 0.5212 | 0.0712 | 0.0822 | 0.0158 | 0.4826 | 0.0326 | 0.0700 | 0.0145 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.25 | 0.2626 | 0.0126 | 0.0804 | 0.0306 | 0.2625 | 0.0125 | 0.0690 | 0.0263 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.25 | 0.2506 | 0.0006 | 0.0794 | 0.0317 | 0.2494 | 0.0006 | 0.0678 | 0.0272 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.25 | 0.4885 | 0.0385 | 0.0802 | 0.0164 | 0.5100 | 0.0600 | 0.0686 | 0.0135 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.5299 | 0.0799 | 0.0848 | 0.0160 | 0.5253 | 0.0753 | 0.0724 | 0.0138 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.15 | 0.4756 | 0.0256 | 0.0831 | 0.0175 | 0.5200 | 0.0700 | 0.0707 | 0.0136 |

الجدول (6) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثانية الافتراضيةعندما (n=100)

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std error error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.45 | 0.5113 | 0.0613 | 0.0657 | 0.0129 | 0.5098 | 0.0598 | 0.0640 | 0.0126 |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.45 | 0.4707 | 0.0207 | 0.0710 | 0.0151 | 0.5248 | 0.0748 | 0.0679 | 0.0130 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.45 | 0.5239 | 0.0739 | 0.0690 | 0.0132 | 0.5196 | 0.0696 | 0.0662 | 0.0128 |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.45 | 0.5400 | 0.0900 | 0.0761 | 0.0141 | 0.5348 | 0.0848 | 0.0722 | 0.0135 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.45 | 0.5046 | 0.0546 | 0.0649 | 0.0129 | 0.4961 | 0.0461 | 0.0634 | 0.0128 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.45 | 0.4792 | 0.0292 | 0.0680 | 0.0142 | 0.4830 | 0.0330 | 0.0655 | 0.0136 |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.45 | 0.5113 | 0.0613 | 0.0657 | 0.0129 | 0.5098 | 0.0598 | 0.0640 | 0.0126 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.45 | 0.4707 | 0.0207 | 0.0710 | 0.0151 | 0.5248 | 0.0748 | 0.0679 | 0.0130 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.45 | 0.5239 | 0.0739 | 0.0690 | 0.0132 | 0.5196 | 0.0696 | 0.0662 | 0.0128 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.45 | 0.5400 | 0.0900 | 0.0761 | 0.0141 | 0.5348 | 0.0848 | 0.0722 | 0.0135 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.45 | 0.5046 | 0.0546 | 0.0649 | 0.0129 | 0.4961 | 0.0461 | 0.0634 | 0.0128 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.45 | 0.4792 | 0.0292 | 0.0680 | 0.0142 | 0.4830 | 0.0330 | 0.0655 | 0.0136 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.25 | 0.2376 | 0.0124 | 0.0659 | 0.0277 | 0.2623 | 0.0123 | 0.0644 | 0.0246 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.25 | 0.2494 | 0.0006 | 0.0647 | 0.0260 | 0.2494 | 0.0006 | 0.0633 | 0.0254 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.25 | 0.5113 | 0.0613 | 0.0657 | 0.0129 | 0.5098 | 0.0598 | 0.0640 | 0.0126 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.4707 | 0.0207 | 0.0710 | 0.0151 | 0.5248 | 0.0748 | 0.0679 | 0.0130 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.15 | 0.5239 | 0.0739 | 0.0690 | 0.0132 | 0.5196 | 0.0696 | 0.0662 | 0.0128 |

الجدول (7) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثانية الافتراضيةعندما (n=200)

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std error error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 0.45 | 0.4906 | 0.0406 | 0.0609 | 0.0124 | 0.4892 | 0.0392 | 0.0719 | 0.0147 |
| $\hat{\mu}_2$ | 0.45 | 0.4762 | 0.0262 | 0.0647 | 0.0136 | 0.5281 | 0.0781 | 0.0765 | 0.0145 |
| $\hat{\mu}_3$ | 0.45 | 0.4812 | 0.0312 | 0.0630 | 0.0131 | 0.4770 | 0.0270 | 0.0747 | 0.0157 |
| $\hat{\mu}_4$ | 0.45 | 0.4666 | 0.0166 | 0.0688 | 0.0147 | 0.4616 | 0.0116 | 0.0808 | 0.0175 |
| $\hat{\mu}_5$ | 0.45 | 0.5037 | 0.0537 | 0.0602 | 0.0120 | 0.4956 | 0.0456 | 0.0712 | 0.0144 |
| $\hat{\mu}_6$ | 0.45 | 0.5164 | 0.0664 | 0.0623 | 0.0121 | 0.5200 | 0.0700 | 0.0739 | 0.0142 |
| $\hat{\mu}_7$ | 0.45 | 0.4906 | 0.0406 | 0.0609 | 0.0124 | 0.4892 | 0.0392 | 0.0719 | 0.0147 |
| $\hat{\mu}_8$ | 0.45 | 0.4762 | 0.0262 | 0.0647 | 0.0136 | 0.5281 | 0.0781 | 0.0765 | 0.0145 |
| $\hat{\mu}_9$ | 0.45 | 0.4812 | 0.0312 | 0.0630 | 0.0131 | 0.4770 | 0.0270 | 0.0747 | 0.0157 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 0.45 | 0.4666 | 0.0166 | 0.0688 | 0.0147 | 0.4616 | 0.0116 | 0.0808 | 0.0175 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 0.45 | 0.5037 | 0.0537 | 0.0602 | 0.0120 | 0.4956 | 0.0456 | 0.0712 | 0.0144 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 0.45 | 0.5164 | 0.0664 | 0.0623 | 0.0121 | 0.5200 | 0.0700 | 0.0739 | 0.0142 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.25 | 0.2382 | 0.0118 | 0.0613 | 0.0257 | 0.2619 | 0.0119 | 0.0721 | 0.0275 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.25 | 0.2506 | 0.0006 | 0.0601 | 0.0240 | 0.2506 | 0.0006 | 0.0711 | 0.0284 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.25 | 0.4906 | 0.0406 | 0.0609 | 0.0124 | 0.4892 | 0.0392 | 0.0719 | 0.0147 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.4762 | 0.0262 | 0.0647 | 0.0136 | 0.5281 | 0.0781 | 0.0765 | 0.0145 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.15 | 0.4812 | 0.0312 | 0.0630 | 0.0131 | 0.4770 | 0.0270 | 0.0747 | 0.0157 |

## 3.9 التجربة الثالثة :

تم تقدير معلمات الانموذج RCPAR(1) بالاسلوبين (ML) و (FGNLS) باستخدام القيم الافتراضية للمعلمات في الجدول (1) . كانت النتائج على النحو الاتي:

1. من خلال الجداول المرقمة (8) , (9) و (10) يتضح بشكل عام ان اسلوب التقدير(FGNLS ) قد طرح اقل القيم للمعايير المستخدمة (Std , $|biased|$ ) بالمقارنة مع اسلوب (ML) ولحجوم العينة كافة.
2. ان قيم المعيارين (Std) و ($|biased|$) لاسلوبي التقدير تتناقص بشكل ملحوظ مع زيادة حجم العينة.
3. من خلال القيم الاحتمالية (P - value) للجداول المذكورة يتبين ان مقدرات كلا الاسلوبين (ML) و (FGNLS) كانت معنوية بالمقارنة مع قيمة مستوى المعنوية (0.05).

**الجدول (8) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثالثة الافتراضيةعندما (n=50)**

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std error error | P value | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 1.00 | 0.8480 | 0.1520 | 0.1773 | 0.0209 | 1.1322 | 0.1322 | 0.1473 | 0.0130 |
| $\hat{\mu}_2$ | 1.00 | 0.8519 | 0.1481 | 0.1739 | 0.0204 | 0.8745 | 0.1255 | 0.1414 | 0.0162 |
| $\hat{\mu}_3$ | 1.00 | 1.1414 | 0.1414 | 0.1683 | 0.0147 | 0.8841 | 0.1059 | 0.1329 | 0.0128 |
| $\hat{\mu}_4$ | 1.00 | 1.1153 | 0.1153 | 0.1470 | 0.0132 | 0.8998 | 0.1003 | 0.1095 | 0.0127 |
| $\hat{\mu}_5$ | 1.00 | 1.2900 | 0.2900 | 0.3041 | 0.0236 | 1.2458 | 0.2458 | 0.2543 | 0.0204 |
| $\hat{\mu}_6$ | 1.00 | 0.8144 | 0.1856 | 0.2068 | 0.0254 | 1.1521 | 0.1521 | 0.1655 | 0.0144 |
| $\hat{\mu}_7$ | 1.00 | 0.7446 | 0.2554 | 0.2713 | 0.0364 | 1.2221 | 0.2221 | 0.2315 | 0.0189 |
| $\hat{\mu}_8$ | 1.00 | 1.3746 | 0.3746 | 0.3856 | 0.0281 | 1.3345 | 0.3345 | 0.3408 | 0.0255 |
| $\hat{\mu}_9$ | 1.00 | 1.1074 | 0.1074 | 0.1409 | 0.0127 | 0.9120 | 0.0880 | 0.1095 | 0.0120 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 1.00 | 1.0765 | 0.0765 | 0.1191 | 0.0111 | 0.9335 | 0.0665 | 0.0931 | 0.0100 |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 1.00 | 0.9661 | 0.0339 | 0.0974 | 0.0101 | 0.9713 | 0.0288 | 0.0712 | 0.0073 |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 1.00 | 1.2965 | 0.2965 | 0.3102 | 0.0239 | 1.2513 | 0.2513 | 0.2596 | 0.0207 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.50 | 0.5883 | 0.0883 | 0.1270 | 0.0216 | 0.5874 | 0.0874 | 0.1090 | 0.0186 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.50 | 0.5551 | 0.0551 | 0.1066 | 0.0192 | 0.4455 | 0.0545 | 0.0849 | 0.0191 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.50 | 0.5417 | 0.0417 | 0.1003 | 0.0185 | 0.5412 | 0.0412 | 0.0771 | 0.0142 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 0.9142 | 0.0858 | 0.1253 | 0.0137 | 1.0841 | 0.0841 | 0.1064 | 0.0098 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.30 | 0.3335 | 0.0335 | 0.0787 | 0.0236 | 0.3270 | 0.0270 | 0.0633 | 0.0194 |

**الجدول (9) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثالثة الافتراضيةعندما (n=100)**

| Par. | value | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std | P value | estimat | $\|biased\|$ | Std | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 1.00 | 1.1489 | 0.1489 | 0.1674 | 0.0146 | 1.1295 | 0.1295 | 0.1390 | 0.0123 |
| $\hat{\mu}_2$ | 1.00 | 1.1451 | 0.1451 | 0.1640 | 0.0143 | 1.1230 | 0.1230 | 0.1329 | 0.0118 |
| $\hat{\mu}_3$ | 1.00 | 0.8615 | 0.1385 | 0.1582 | 0.0184 | 0.8864 | 0.1136 | 0.1243 | 0.0140 |
| $\hat{\mu}_4$ | 1.00 | 0.8870 | 0.1130 | 0.1364 | 0.0154 | 0.9018 | 0.0983 | 0.1104 | 0.0123 |
| $\hat{\mu}_5$ | 1.00 | 0.7158 | 0.2842 | 0.2943 | 0.0411 | 1.2409 | 0.2409 | 0.2461 | 0.0198 |
| $\hat{\mu}_6$ | 1.00 | 1.1819 | 0.1819 | 0.1973 | 0.0167 | 1.1491 | 0.1491 | 0.1574 | 0.0137 |
| $\hat{\mu}_7$ | 1.00 | 1.2503 | 0.2503 | 0.2617 | 0.0209 | 0.7823 | 0.2177 | 0.2234 | 0.0286 |
| $\hat{\mu}_8$ | 1.00 | 0.7752 | 0.2248 | 0.2374 | 0.0306 | 1.3278 | 0.3278 | 0.3316 | 0.0250 |
| $\hat{\mu}_9$ | 1.00 | 0.8948 | 0.1052 | 0.1300 | 0.0145 | 0.9138 | 0.0862 | 0.0999 | 0.0109 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 1.00 | 0.9250 | 0.0750 | 0.1070 | 0.0116 | 1.0652 | 0.0652 | 0.0824 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 1.00 | 1.0333 | 0.0333 | 0.0833 | 0.000** | 0.9718 | 0.0282 | 0.0578 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 1.00 | 0.7095 | 0.2906 | 0.3004 | 0.0423 | 1.2462 | 0.2462 | 0.2513 | 0.0202 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.50 | 0.4135 | 0.0865 | 0.1154 | 0.0279 | 0.4143 | 0.0857 | 0.0994 | 0.0240 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.50 | 0.4460 | 0.0540 | 0.0935 | 0.0210 | 0.4466 | 0.0534 | 0.0735 | 0.0165 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.50 | 0.4592 | 0.0408 | 0.0866 | 0.0189 | 0.5404 | 0.0404 | 0.0646 | 0.0120 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 1.0841 | 0.0841 | 0.1136 | 0.0105 | 1.0824 | 0.0824 | 0.0966 | 0.0089 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.30 | 0.3302 | 0.0302 | 0.0708 | 0.0215 | 0.3221 | 0.0221 | 0.0518 | 0.0161 |

الجدول (10) نتائج التقدير (ML) و (FGNLS) لقيم التجربة الثالثة الافتراضيةعندما (n=200)

| Par. | valu e | ML | | | | FGNLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | estimate | $\|biased\|$ | Std. | P value | estimat | $\|biased\|$ | Std. | P value |
| $\hat{\mu}_1$ | 1.00 | 1.1489 | 0.1489 | 0.1674 | 0.0146 | 1.1295 | 0.1295 | 0.1390 | 0.0123 |
| $\hat{\mu}_2$ | 1.00 | 1.1451 | 0.1451 | 0.1640 | 0.0143 | 1.1230 | 0.1230 | 0.1329 | 0.0118 |
| $\hat{\mu}_3$ | 1.00 | 0.8615 | 0.1385 | 0.1582 | 0.0184 | 0.8864 | 0.1136 | 0.1243 | 0.0140 |
| $\hat{\mu}_4$ | 1.00 | 0.8870 | 0.1130 | 0.1364 | 0.0154 | 0.9018 | 0.0983 | 0.1104 | 0.0123 |
| $\hat{\mu}_5$ | 1.00 | 0.7158 | 0.2842 | 0.2943 | 0.0411 | 1.2409 | 0.2409 | 0.2461 | 0.0198 |
| $\hat{\mu}_6$ | 1.00 | 1.1819 | 0.1819 | 0.1973 | 0.0167 | 1.1491 | 0.1491 | 0.1574 | 0.0137 |
| $\hat{\mu}_7$ | 1.00 | 1.2503 | 0.2503 | 0.2617 | 0.0209 | 0.7823 | 0.2177 | 0.2234 | 0.0286 |
| $\hat{\mu}_8$ | 1.00 | 0.7752 | 0.2248 | 0.2374 | 0.0306 | 1.3278 | 0.3278 | 0.3316 | 0.0250 |
| $\hat{\mu}_9$ | 1.00 | 0.8948 | 0.1052 | 0.1300 | 0.0145 | 0.9138 | 0.0862 | 0.0999 | 0.0109 |
| $\hat{\mu}_{10}$ | 1.00 | 0.9250 | 0.0750 | 0.1070 | 0.0116 | 1.0652 | 0.0652 | 0.0824 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_{11}$ | 1.00 | 1.0333 | 0.0333 | 0.0833 | 0.000** | 0.9718 | 0.0282 | 0.0578 | 0.000** |
| $\hat{\mu}_{12}$ | 1.00 | 0.7095 | 0.2906 | 0.3004 | 0.0423 | 1.2462 | 0.2462 | 0.2513 | 0.0202 |
| $\hat{\alpha}_0$ | 0.50 | 0.4135 | 0.0865 | 0.1154 | 0.0279 | 0.4143 | 0.0857 | 0.0994 | 0.0240 |
| $\hat{\alpha}_1$ | 0.50 | 0.4460 | 0.0540 | 0.0935 | 0.0210 | 0.4466 | 0.0534 | 0.0735 | 0.0165 |
| $\hat{\alpha}_2$ | 0.50 | 0.4592 | 0.0408 | 0.0866 | 0.0189 | 0.5404 | 0.0404 | 0.0646 | 0.0120 |
| $\hat{\sigma}_e$ | 1.00 | 1.0841 | 0.0841 | 0.1136 | 0.0105 | 1.0824 | 0.0824 | 0.0966 | 0.0089 |
| $\hat{\sigma}_u$ | 0.30 | 0.3302 | 0.0302 | 0.0708 | 0.0215 | 0.3221 | 0.0221 | 0.0518 | 0.0161 |

الجدول (11) يبين معايير المقارنة للانموذج النهائي RCPAR(1) للاسلوبين (ML) و (FGNLS) للعينات الثلاث

| Exp. | n | MLE | | | | FGLS | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | AIC | BIC | MSE | MAPE | AIC | BIC | MSE | MAPE |
| 1 | 50 | -1843.78 | -1841.86 | 0.0022 | 0.0703 | -1962.71 | -1960.80 | 0.0016 | 0.0582 |
| | 100 | -1924.67 | -1922.76 | 0.0017 | 0.0329 | -2000.56 | -1998.65 | 0.0014 | 0.0267 |
| | 200 | -2167.22 | -2083.92 | 0.0011 | 0.0153 | -2085.83 | -2165.31 | 0.0008 | 0.0121 |
| 2 | 50 | -1467.21 | -1465.30 | 0.0066 | 0.1663 | -1548.85 | -1546.94 | 0.0052 | 0.1415 |
| | 100 | -1608.82 | -1606.91 | 0.0044 | 0.0689 | -1633.90 | -1631.99 | 0.0041 | 0.0662 |
| | 200 | -1673.45 | -1671.53 | 0.0036 | 0.0373 | -1789.20 | -1787.29 | 0.0023 | 0.0315 |
| 3 | 50 | -853.17 | -851.26 | 0.0389 | 0.3365 | -920.85 | -918.93 | 0.0321 | 0.2658 |
| | 100 | -936.29 | -934.38 | 0.0325 | 0.1242 | -1007.96 | -1006.05 | 0.0249 | 0.1581 |
| | 200 | -1117.70 | -1115.79 | 0.0182 | 0.0727 | -1247.34 | -1245.43 | 0.0125 | 0.0573 |

## 10. الاستنتاجات:

1. تبين من خلال الجانب التجريبي ان هناك تحيز واضح للعينات الصغيرة في مقدر (ML) عند تقدير الانموذج RCPAR(1).
2. ان القيم التقديرية لاسلوب (ML) تتطابق بشكل جيد مع قيم المعلمات الافتراضية , فيما يلاحظ ان القيم التقديرية لاسلوب (FGNLS) تتوافق بشكل افضل مع قيم المعلمات الافتراضية من مقدرات (ML) عموما, وبذلك فأن الافضلية التقدير تكون لاسلوب (FGNLS).
3. ان التحيز المطلق في تقدير الخطأ المعياري $(\sigma_u)$ صغير جدا في اغلب تجارب المحاكاة.
4. في تجارب المحاكاة كافة تبين ان مقدار التحيز المطلق للمعلمات ( $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ $(\sigma_\varepsilon, \sigma_u,$ لكلا الاسلوبين (ML) و (FGNLS) يتناقص مع زيادة حجم العينة وان قيمة هذه المقدرات تتقارب مع القيم الافتراضية .
5. لوحظ ايضا من خلال الجانب التجريبي في حالة القيم الافتراضية للمعلمات مساوية الى $(\mu_1 = \cdots = \mu_{12} = 1)$ و $(\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5)$ فان مقدرات هذه المعلمات تقترب من القيم الافتراضية بمعنى ان القيم الكبيرة المفترضة تعطي نتائج مشجعة لكلا الاسلوبين مما يعطي انطباع ان هذه القيم تؤثر ايجابا على التقاط الخصائص الدورية للبيانات الموسمية بدرجة عالية.

## 2.11 التوصيات:

1. نوصي بزيادة طول الدورة او عدد الفصول (S) للتحري عن التأثيرات التي تطرأ على معلمات الانموذج وبشكل خاص عند تطبيق السلوب (ML).
2. نوصي بأجراء تطبيق موسع للسلاسل الزمنية الدورية بمعلمات عشوائية ذات الرتبة الاعلى.
3. نوصي باستخدام طرائق لا معلمية في تقدير للانموذج RCPAR(1) ومقارنتها مع التقديرات المعلمية في متن البحث.

**المصـــادر :**


1. Abdelhakim Aknouche,A and Guerbyenne,H.(2009).” Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions.”, **Statistics and Probability Letters** 79, pp. 990-996.
2. Abdullah, N.A., Mohamed ,I. , Peiris, S. & Azizan ,A.A.(2011). ” A New Iterative Procedure for Estimation of RCA Parameters Based on Estimating Functions.”, Applied Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 4, pp. 193 - 202
3. Araveeporn,A.(2020).” Comparing Parameter Estimation of Random Coefficient Autoregressive Model by Frequentist, Method.”, **Mathematics** 8(1),62.
4. Basawa ,I.R, Lund ,R. and Shao, Q.(2004).” First - order Seasonal Autoregressive Processes with Periodically Varying Parameters.”, **Statistics and Probability Letters**, 67, pp. 299-306.
5. Bloomfield, P., H. L. Hurd and R. B. Lund (1994), Periodic correlation in stratospheric ozone data, Journal of Time Series Analysis 15, 127–150.
6. Franses,P.H. and Paap,R.(2011).” Random-coefficient periodic autoregressions.”, **Statistica Neerlandica** , Vol. 65, No.1, pp. 101–115.
7. Jones, R. H. and W. M. Brelsford (1967), Time series with periodic structure, Biometrika 54, 403–407.
8. Nicholls, D.F. and Quinn, B.G. (1981).” The Estimation of Random Coefficient Autoregressive Models. II, Journal of Time Series Analysis, 2, 185-203.

# Using simulation to compare the two estimation methods (ML) and (FGNLS) of the RCPAR periodic autoregressive model with random coefficient (1)

**Hussein Ali Hussein**
**Jawad Al-Moussawi**

## Abstract:

The first-order random coefficient periodic autoregressive model RCPAR(1) was introduced by researchers (Frances and Paap, 2011), due to its importance in the field of seasonal time series applications, and its reduction of the number of parameters in the unrestricted periodic autoregressive model PAR(1). , as the increasing number of parameters results in a problem in the estimation stage. Thus, this stage was studied using the method of greatest possibility (ML) and the method of possible nonlinear least squares (FGNLS) and comparing them through the application of three simulation experiments using the Monte-Carlo method. It was concluded that there is a clear bias for small samples in the estimators of (ML), and then the preference of the (FGNLS) method in estimating the parameters of the RCPAR (1) model over the (ML) method for all samples used.

**Keywords:** RCPAR (1) model, PAR (1) model, FGNLS estimator, ML estimator.

**********

**********

**********