Warith Scientific Journal

التقدير البيزي لدالة البقاء لتوزيع ليندلي ذي ثلاث معلمات في ظل دالة خسارة تربيعية

The Bayesian estimate of the survival function for A Three-Parameter Lindley Distribution Under Squared Error Loss Function

أ.د عواد كاظم شعلان الخالدي
Prof.Awad kadim Shaalan AL-Khalidi
كلية الادارة والاقتصاد جامعة وارث الانبياء ،كربلاء ،العراق
k@s.uokerbala.edu.iq
07818017908

كرم ناصر حسين العبادي
Karam Nasser Hussein Al-Abadi
كلية الادارة والاقتصاد جامعة كربلاء ،كربلاء ،العراق
karam.n@s.uokerbala.edu.iq
07811532764

المستخلص .في هذا البحث تم تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي بثلاث معلمات باستعمال طريقة بيز القياسية وطريقة بيز الهرمي وقد تم الحصول على المقدرات بالاعتماد على دالة خسـارة تربيعية ،ولأجل التوصـل الى اكفأ طريقة في التقدير تم توظيف أسـلوب المحاكاة بطريقة(مونت – كارلو) ومختلف حجوم العينات (10,25,50,75,100) ،وظهرت النتائج ان طريقة بيز الهرمي في ظل دالة تربيعية هي الاكفأ لتقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي لأغلب القيم الافتراضية وذلك باستعمال المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطاء التكاملي(IMSE) .

الكلمات المفتاحية :طريقة بيو القياسية ،طريقة بيز الهرمي ،توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات ،دالة البقاء.

Abstract: In this research was to estimate the Survival function of a Three Parameter Lindely distribution using the Standard Bayes Method, These estimators are obtained depending on squared error and General Entropy loss function, but to reach a competent way of appreciation were employed style of Monte Carlo simulation in a way was the use of sampling sizes (10,25,50,75,100) , results showed that the Hierarchical Bayesian Estimator Under Squared Error Loss Function are competent in the estimate of the Survival distribution function Lindely for most of the default values, using the statistical measure of the(IMSE).

Keywords: standard Bayes method, Hierarchical Bayes , Three Parameter Lindely distribution, Survival function

1-المقدمة:

يعد تحليل البقاء من طرائق التحليل الحديثة الذي يهتم بدراسـة معدل زمن احتمال بقاء الكائنات الحية على قيد الحياة بعد مدة محددة من الزمن t أي احتمال البقاء على قيد الحياة للأشـخاص الذين يعانون من الامراض الخطيرة اعتماد على عينة بقاء المريض المصـاب بذلك المرض ،ويتم الحصـول على بيانات البقاء الذي تخص التجارب الطبية من خلال التجارب السـريرية (Clinical Trials) ،وان التعامل مع دوال البقاء يحتاج الى توزيع احتمالي يلائم ظاهر الحياة او الموت، وفي هذا البحث سـوف نسـتعمل توزيع ليندلي ذي الثلاث

2-هدف البحث

الهدف الاساسي من هذه البحث هو الحصول على الطريقة الافضل لتقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي بثلاث معلمات باستعمال طريقة بيز القياسـية المعلوماتية وطريقة بيز الهرمي وبتوظيف اسـلوب المحاكاة بطريقة (Monte- Carlo) لغرض المقارنة بين الطريقتين

التقدير البيزية عن طريق استعمال المقياس الإحصائي أقل متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE)، معلمات كونه يتصف بدقة عالية لصياغة دالة البقاء والدوال المرتبطة بها.

3 - تحليل البقاء:(Survival analysis)

تعرف دالة البقاء [8] بأنها احتمال بقاء الكائن الحي على قيد الحياة بعد مرور الزمن(t)، ويهتم تحليل البقاء بدراسة توزيع الوقت منذ حالة البدء ويعبر عن دالة البقاء$S(t)$ رياضياً [11]بالصيغة الاتية: -

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad \dots (1)$$

$F(t)$: دالة الكثافة التجميعية للمتغير العشوائي T.

t: يمثل المدة الزمنية اللازمة لحدوث الفشل وهو متغير عشوائي يمثل وقت بقاء الكائن الحي حتى الموت.

4-توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات: (Three Parameter Lindley Distribution)

يعد توزيع ليندلي [10]من التوزيعات المستخدمة بشكل واسع في نمذجة بيانات الحياة ودالة البقاء، وان اكتشاف هذا التوزيع ساهم في تطور الإحصاء لأهميته في العلوم الطبية والهندسية، ونمذجة بيانات الوقت، ويعد أحد نماذج الفشل وله العديد من الاستعمالات في الحقول المختلفة منها في دراسات المعولية، والدراسات السكانية المتمثلة بتوقعات جدول الحياة وان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزع تكون بالصيغة التالية:

$$f(x,\theta,\alpha,\beta) = \frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}(\alpha+\beta x)e^{-\theta x} \quad ،\theta > 0\beta \quad > 0 \text{ ، } x > 0 \quad .\theta\,\beta + \alpha > 0 \qquad \dots (2)$$

حيث ان: -

α : معلمة الشكل (Shape parameters).

β: معلمة الشكل (Shape parameters).

θ : معلمة القياس(Scale parameter) .

وتكون دالة الكثافة التجميعية (c.d.f) للتوزيع فتكون بالصيغة الاتية.

$$F(x.\theta.\alpha.\beta) = 1 - \left[1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right] e^{-\theta x} \qquad \dots (3)$$

اما دالة البقاء ودالة المخاطرة فيمكن صياغتهما وفق الصيغة الاتية:

$$S(t) = \left[1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right] e^{-\theta x} \qquad \dots (4)$$

$$h(x) = \frac{\theta^2(\alpha + \beta x)}{(\beta\theta x + \theta\alpha) + \beta} \quad \dots (5)$$

5-مقدر بيز القياسي المعلوماتية:(Standard Informative Bayes Estimator)

سميت طريقة بيز او منهج بيز نسبة الى توماس بيز[2] (Tomas Bayes) ، إذ كان هناك مدرستان في التقدير الاولى تسمى بالمدرسة الكلاسيكية وهي تفترض ان المعلمات كميات ثابتة يتم تقديرها بالطرائق الكلاسيكية مثل طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى وطريقة العزوم وغيرها ، والاخرى تسمى المدرسة البيزية والتي تفترض ان المعلمات هي متغيرات عشوائية لها توزيع احتمالي يطلق عليه التوزيع الاولي (prior distribution) و يتم التعرف عليه عن طريق التجارب السابقة او من البيانات او عن طريق النظرية التي تحكم تلك الظاهرة ، ولبيانات العينة الحالية دور في عملية التقدير حيث يتم دمج دالة الامكان من بيانات العينة الحالية مع التوزيع المسبق باستخدام صيغة بيز [6] العكسية *(Bayes inversion formula)* للحصول على التوزيع اللاحق (Posterior distribution) وتختلف طريقة بيز عن الطرائق الكلاسيكية بان في طريقة بيز تتم عملية اتخاذ قرار اما تقليل الخسارة او تعظيم المنفعة.

يعتمد مقدر بيز القياسي على دالة التوزيع اللاحق والتي تضم المعلومات السابقة عن المعلمة (θ) ومشاهدات العينة لحالية $(x_1.x_2.\dots.x_n)$ وبموجب نظرية بيز فان التوزيع اللاحق للمعلمة (θ) يمكن ان نحصل عليه باستعمال صيغة بيز العكسية (Inverse Bayesian formula) وكالآتي[7] :

$$\dots \quad (6)\ h\left(\underline{\theta}|x_1.x_2.\dots.x_n\right) = \frac{\pi(\underline{\theta})\prod_{i=1}^{n} f(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})}{\int_{\forall\underline{\theta}} \pi(\underline{\theta})\prod_{i=1}^{n} f(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})d\underline{\theta}}$$

اذ أن:

$\pi(\underline{\theta})$:التوزيع الأولي للمعلمات $\underline{\theta}$.

$\mathbf{f}(x_1.x_2.\dots.x_n|\underline{\theta})$: دالة الامكان لمشاهدات العينة بحجم n.

$h\left(\underline{\theta}|x_1.x_2.\dots.x_n\right)$: التوزيع اللاحق للمعلمات $\underline{\theta}$.

1-5مقدر بيز القياسي المعلوماتي في ظل دالة خسارة تربيعية: (Squared Error Loss Function)

تعرف دالة الخسارة التربيعية [9]بالصيغة الآتية:

$$L_1(\hat{\underline{\theta}},\underline{\theta}) = (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})^2 \quad \dots (7)$$

لذلك فأن مقدر دالة البقاء في ظل دالة الخسارة التربيعية الذي يجعل دالة المخاطرة اقل ما يمكن والتي تمثل توقع دالة الخسارة بعد ايجاد المشتقة الاولى بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\text{Risk} = E(\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})^2)$$

$$= \int_{\forall\underline{\theta}} (\hat{\underline{\theta}} - \underline{\theta})^2 h\,(\underline{\theta}|\underline{x})d\underline{\theta}$$

$$= \int_{\forall \underline{\theta}} (\underline{\hat{\theta}}^2 - 2\underline{\theta}\,\underline{\hat{\theta}} + \underline{\theta}^2) h\,(\underline{\theta}|\underline{x}) d\underline{\theta}$$

$$= \underline{\hat{\theta}}^2 - 2\underline{\hat{\theta}} E(\underline{\theta}|\underline{x}) + E(\underline{\theta}^2|\underline{x}) \qquad \dots\ (8)$$

وباشتقاق المعادلة رقم (8) بالنسبة لـ $\hat{d}(\theta)$ ومساواة المشتقة بالصفر نحصل على :

$$\frac{\partial E(\underline{\hat{\theta}} - \underline{\theta})^2)}{\partial \underline{\hat{\theta}}} = 0$$

$$= 2\underline{\hat{\theta}} - 2E(\underline{\theta}|\underline{x}) = 0$$

$$\therefore\ \underline{\hat{\theta}}_{SBSEL} = E(\underline{\theta}|\underline{x})$$

إذ أن:

$\underline{\theta}$: متجه المعلمات المراد تقديرها.

$\underline{\hat{\theta}}$: متجه المعلمات المقدرة.

$\underline{\hat{\theta}}_{SEL}$: متجه المعلمات المقدرة بموجب طريقة بيز القياسية في ظل دالة الخسارة التربيعية.

لذلك فان مقدر بيز القياسي لدالة البقاء هو التوقع الشرطي اللاحق [5] لدالة البقاء اي ان :

$$\hat{S}_{SBSEL}(x_1.x_2.\dots.x_n) = E(S|x_1.x_2.\dots.x_n) \qquad \dots\ (9)$$

وحســـب ماتوفر للباحث من معلومات حول التوزيعات الأولية (θ,α,β) الآن نحتاج الى اعطاء التوزيعات الأولية للمعلمات المراد تقديرها ، للمعلمات افترض ان التوزيعات الأولية لتلك المعلمات ستكون كالآتي:

$\theta \sim \text{Gamma}\ (a_1, b_1)$

$\alpha \sim \text{Gamma}\ (a_2, b_2$

$\beta \sim \text{Beta}\ (c, d)$

وبذلك يتكون دالة الكثافة الاحتمالية الاولية (Prior Distribution) لكل معلمة كالآتي:

$$\pi_1(\theta) \propto \frac{{b_1}^{a_1}}{\Gamma(a_1)} \theta^{a_1-1} e^{-b1\theta} \qquad ; \theta > 0 \qquad \dots (10)$$

$$\pi_2(\alpha) \propto \frac{{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_2)} \alpha^{a_2-1} e^{-b_2\alpha}; \alpha > 0 \qquad \dots (11)$$

$$\pi_3(\beta) \propto \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\ ; \qquad 0 < \beta < 1 \qquad \dots\ (12)$$

لذلك فان التوزيع الاولي المشترك (Joint Prior) يكون كالآتي:

$$\pi(\theta,\alpha,\beta) \propto \frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)} \theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1} e^{-b_1\theta} e^{-b_2\alpha} \frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)} \beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1} \dots (13)$$

وان: $b_1.b_2$، a_1،a_2،c،d تسمى معلمات فوقية التي يمكن اختيارها بالشكل الذي يجعل دالة الكثافة الاحتمالية الأولية متناقصة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها .

وان دالة الإمكان للمشاهدات x_1،$x_2.\dots.x_n$ تكتب بالشكل الآتي:

$$L=\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}} \quad \dots\ (14)$$

وان التوزيع المشتركة يكون بالشكل الآتي:

$$\pi(\theta,\alpha,\beta)\ L\propto A\frac{\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}}{(\alpha\theta+\beta)^n}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}} \quad \dots (15)$$

$$A=\frac{b_1{}^{a_1}b_2{}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}$$

وان دالة الكثافة الحدية لمشاهدات العينة تكون بالصيغة الآتية:

$$f(x_1.x_2.\dots.x_n)=\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\pi(\theta,\alpha,\beta)\ L\,.\,d\theta d\alpha d\beta$$

$$=A\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\frac{\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}}{(\alpha\theta+\beta)^n}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\,d\theta d\alpha d\beta \dots (16)$$

وحسب نظرية بيز فان دالة التوزيع اللاحق (Posterior pdf) للمعلمات (θ,α,β) يمكن ان نحصل عليها باستعمال صيغة بيز العكسية في المعادلة (6) بقسمة دالة التوزيع المشتركة على دالة الكثافة الحدية وكما يأتي:

$$h\ (\theta,\alpha,\beta|x_1.x_2.\dots.x_n)=\frac{f(\theta,\alpha,\beta,X_1,\dots,X_n)}{\iiint_{\theta,\alpha,\beta}f(\theta,\alpha,\beta,X_1,\dots,X_n)d\theta d\alpha d\beta}$$

$$=\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)^{-n}\,\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\,d\theta d\alpha d\beta}$$

وباستعمال دالة الخسارة التربيعية في المعادلة رقم (9) يمكن الحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء وكما يأتي:

$$\hat{S}_{SBSEL}(x_1.x_2.\dots.x_n)\ =E(S|x_1.x_2.\dots.x_n)$$

$$=\int_\theta\int_\alpha\int_\beta S(x)h\ (\theta.\alpha.\beta|x_1.x_2.\dots.x_n)d\theta d\alpha d\beta$$

$$=\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)^{-n}\,\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta \quad \dots (17)$$

ونلاحظ ان المعادلة (17)تمثل منظومة معادلات غير خطية (Non-Linear) وغير محكمة نظرياً ولأيمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحساب هذه التكاملات المعقدة لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر بيز القياسي لدالة البقاء في ظل دالة الخسارة التربيعية.

6-مقدر بيز الهرمي: (Hierarchical Bayes Estimator)

تعتمد هذه الطريقة على فكرة بأن هناك عدة مسـتويات للمعلمات الفوقية (Hyper parameters)تسـتعمل لاسـتخلاص المعلومات الاولية حول المعلمات المراد تقديرها.

قدمت هذه الطريقة من قبل الباحثان ليندلي وســـميث[4] ($Lindley$ & $Smith$) في عام (1972) بطرح فكرة التوزيع الأولي الهرمي بافتراض ان التوزيع الاولي يمكن تكييفه بالنسبة للمعلمات الفوقية بحيث يكون مقدر بيز بالاستناد على هذا التوزيع لا يعتمد على المعلمات الفوقية وذلك عن طريق افتراض توزيع احتمالي للمعلمات الفوقية بالنظر الى دالة الكثافة الاحتمالية الاولية $\pi_i(\theta.\alpha.\beta)$نجدها تعتمد على المعلمات الفوقية $(b_1, b_2\ a_1.a_2.c.d)$ والتي كما اقترح الباحثان (Lindley & Smith) من خلال تكييف توزيع احتمالي اولي للمعلمات الفوقية يمكن استخلاص المعلومات الاولية منها من دون الاعتماد على البيانات الحالية ، ويتم ايجاد مقدر بيز الهرمي وفقاً للخطوات الآتية[3]:

1- ايجاد التوزيع الاولي للمعلمة المراد تقديرها بعد التخلص من تأثير المعلمات الفوقية كالآتي:

$$\pi(\theta,\alpha,\beta) = \int_{\forall(da_1a_2\ b_1b_2c)} \pi\big(\underline{\theta}|a_1,a_2,b_1,b_2,c,d\big)\pi(a_1,a_2,b_1,b_2,c,d)ddda_1da_2d\ b_1db_2dcd \ldots \quad (18$$

(θ,α,β): التوزيع الأولي للمعلمات المراد تقديرها بعد التخلص من تأثير المعلمات الفوقية.

$\pi\big(\underline{\theta}|a_1.a_2,b_1,b_2,c,d\big)$: التوزيع الاولي للمعلمات الفوقية للتوزيع .

2-تعويض التوزيع الاولي للمعلمات $\underline{\theta}$ في المعادلة رقم (6) لإيجاد التوزيع اللاحق.

3- باستعمال دالة خسارة تربيعية نجد مقدر بيز الهرمي وكالآتي:

$$\underline{\hat{S}}_{HB} = \int_{\forall\theta} S(x)h^*(\theta,\alpha,\beta|x_1.x_2.\ldots.x_n)d\theta d\alpha\, d\beta \qquad \ldots(19)$$

6-1مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خسارة تربيعية

باستعمال صيغة بيز الهرمي في المعادلة رقم (18) ايجاد التوزيع الاولي للمعلمة المراد تقديرها بعد التخلص من تأثير المعلمات الفوقية:

$$\pi(\theta,\alpha,\beta) = \int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5} \frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-b_1\theta}e^{-b_2\alpha}$$

$$\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\left[\frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5}\right]da_1da_2d\ b_1db_2dcd\ d$$

$$\pi(\theta,\alpha,\beta) = \frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5}\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5} \frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}$$

$$\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\ b_1db_2dcd\ d \qquad \ldots(20)$$

وباستعمال التوزيع الاولي المشترك نجد التوزيع اللاحق لدالة البقاء وكالاتي:

$$h(\theta,\alpha,\beta|x_1\ldots x_n) = \frac{\frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5}\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}{\frac{1}{cc_1c_2c_3c_4c_5}\int_{(\theta,\alpha,\beta)}\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}$$

$$\frac{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}$$

فان مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء لتوزيع لندلي ذي الثلاث معلمات في ظل دالة الخسارة التربيعية كالآتي:

$$\hat{S}_{HBEL}=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}{\int_{(\theta,\alpha,\beta)}\frac{1}{c}\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}}\right.$$

$$\frac{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}$$

$$\left.\cdot\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta \qquad \dots(22)$$

ونلحظ ان المعادلة (22) تمثل منظومة معادلات غير خطية (Non-Linear) ولا يمكن إيجاد مقدراتها نظريا ولأيمكن ان تحل بالطرائق التحليلية الاعتيادية لذلك لابد من استعمال اسلوب تقريبي لحساب هذه التكاملات المعقدة لذلك سيتم استعمال تقريب ليندلي (Lindely Approximation) لأيجاد مقدر توقع بيز لدالة البقاء في ظل دالة خسارة تربيعية.

7 - تقريب ليندلي (Lindley Approximation)

وضع الباحث وضع الباحث (Lindley) في عام (1980) حل تقريبي للتكامل الناتج من استعمال طريقة مقدر بيز (Bayesian estimator) وحسب اسلوب الباحث لندلي يعاد صياغة توقع الدالة السابقة حسب الصيغة الآتية [**8**]:

$$E[u(\underline{\theta})\backslash x]=\frac{\int_\Omega u(\underline{\theta})e^{L(\underline{\theta})+\rho(\underline{\theta})}d\underline{\theta}}{\int_\Omega e^{L(\underline{\theta})+\rho(\underline{\theta})}d\underline{\theta}} \qquad \dots(23)$$

إذ إن:

$L(\underline{\theta})$: لوغاريتم دالة الامكان الاعظم.

$\rho(\underline{\theta})$:لوغاريتم دالة التوزيع السابق للمعلمة $(\underline{\theta})$.

$u(\underline{\theta})$:اي دالة للمعلمة $(\underline{\theta})$.

وقد اقترح الباحث لندلي الصيغة الآتية لحل التكاملات الناتجة من صيغة بيز وكالآتي[**1**]:

$$E[u(\underline{\theta}) / x] = u(\hat{\theta}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}[u_{ij} + 2u_i\rho_j]\,\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m} L_{ijk}u_l\sigma_{ij}\sigma_{kl} \;\ldots (24)$$

أذان:

m :تمثل عدد المعلمات ، (m=3) .

$u(\hat{\theta})$**:** مقدر الامكان الاعظم لدالة البقاء.

وأن:

$$L_{ijk} = \frac{\partial^3 L(\underline{\theta})}{\partial\underline{\theta}_1\,\partial\underline{\theta}_2\,\partial\underline{\theta}_3}\Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}} \qquad i.j.k = 1.2.3 \qquad \ldots (25)$$

$$\partial\underline{\theta}_1 = \partial\theta$$

$$\partial\underline{\theta}_2 = \partial\alpha$$

$$\partial\underline{\theta}_3 = \partial\beta$$

$$\sigma_{ij} = -\left(\frac{\partial^2 L(\underline{\theta})}{\partial\underline{\theta}_i\,\partial\underline{\theta}_j}\Big|_{\underline{\theta}=\hat{\underline{\theta}}}\right)^{-1} \theta_1 = \theta; \theta_2 = \alpha; \theta_3 = \beta \;\;, i.j = 1,2,3 \qquad \ldots (26)$$

$$\rho = \mathrm{Log}\left(\pi(\underline{\theta})\right) = \mathrm{Log}\left(\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-b_1\theta}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right) \qquad \ldots (27)$$

$$\rho_i = \frac{\partial \log(\rho)}{\partial\underline{\theta}_i} \qquad i = 1,2,3 \qquad \ldots (28)$$

$$u_i = \frac{\partial u(\underline{\theta})}{\partial\underline{\theta}_i}; \qquad i = 1,2,3 \qquad \ldots (29)$$

$$u_{ij} = \frac{\partial u^2}{\partial\underline{\theta}_i\,\partial\underline{\theta}_j} \qquad i.j = 1,2,3 \qquad \ldots (30)$$

وللحصول على مقدر بيز القياسي لدالة البقاء $S(x)$ في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:

$$u(\theta;\alpha;\beta) = \int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(1 + \frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\; e^{-\theta x}\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta) - n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}}\right)$$

ISSN: 2618-0278 Vol. 4No. 12 December 2022

$$\left.\left.\frac{e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\,d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta \qquad \dots(31)$$

وباشتقاق المعادلة (31)للمعلمات فان:

$$u_1=\frac{\partial u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\theta}$$

$$u_2=\frac{\partial u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\alpha}$$

$$u_3=\frac{\partial u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\beta}$$

$$u_{12}=\frac{\partial^2\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\theta\,\partial\alpha}$$

$$u_{21}=u_{12}$$

$$u_{22}=\frac{\partial^2\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{(\partial\alpha)^2}$$

$$u_{13}=\frac{\partial^2 u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\theta\,\partial\beta}$$

$$u_{13}=u_{31}$$

$$u_{23}=\frac{\partial^2 u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$u_{32}=u_{23}$$

$$u_{33}=\frac{\partial^2 u\int_\theta\int_\alpha\int_\beta\left(\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\left(\frac{(\alpha\theta+\beta)^{-n}\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\int_\theta\int_\alpha\int_\beta(\alpha\theta+\beta)-n\theta^{2n+a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-a_1\theta}e^{-a_2\alpha}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}d\theta d\alpha d\beta}\right)\right)d\theta d\alpha d\beta}{(\partial\beta)^2}$$

$$L_{123}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\,\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$L_{132} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\, \partial\beta\, \partial\alpha}$$

$$L_{213} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha\, \partial\theta\, \partial\beta}$$

$$L_{231} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha\, \partial\beta\, \partial\theta}$$

$$L_{312} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta\, \partial\theta\, \partial\alpha}$$

$$L_{321} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta\, \partial\alpha\, \partial\theta}$$

$$L_{112} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\, \partial\theta\, \partial\alpha}$$

$$L_{332} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\, \partial\theta\, \partial\beta}$$

$$L_{323} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta\, \partial\alpha\, \partial\beta}$$

$$L_{233} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\alpha\, \partial\beta\, \partial\beta}$$

$$L_{113} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\, \partial\theta\, \partial\beta}$$

$$L_{131} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\, \partial\beta\, \partial\theta}$$

$$L_{311} = \frac{\partial^3 \left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta + \beta}\right)^n \prod_{i=1}^{n} (\alpha + \beta x_i) e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\beta\, \partial\theta\, \partial\theta}$$

$$L_{233}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\alpha\,\partial\beta\,\partial\beta}$$

$$L_{323}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$L_{322}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\alpha\,\partial\alpha}$$

$$L_{333}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\beta\,\partial\beta}$$

$$\rho_1=\frac{\partial\mathrm{Log}\left(\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-b_1\theta}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\theta}$$

$$\rho_2=\frac{\partial\mathrm{Log}\left(\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-b_1\theta}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\alpha}$$

$$\rho_2=\frac{\partial\mathrm{Log}\left(\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}\alpha^{a_2-1}e^{-b_1\theta}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}\right)}{\partial\beta}$$

$$\sigma_{11}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\theta\,\partial\theta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{12}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\theta\,\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{13}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\theta\,\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{21}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\theta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{22}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\alpha\,\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{23}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{32}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\alpha}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{31}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\theta}\right)^{-1}$$

$$\sigma_{33}=-\left(\frac{\partial^2\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\partial\beta\,\partial\beta}\right)^{-1}$$

فان المعادلة(24)تكون كالاتي:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{SBSEL}=\hat{S}_{mle}&+u_1\rho_1\sigma_{11}+u_1\rho_2\sigma_{12}++u_1\rho_3\sigma_{13}+0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11}+0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31}\\&+0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11}+0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21}+0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2+0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11}\\&+0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31}+0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13}+0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21}+0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31}\\&+0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2+0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21}\\&+0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31}\qquad\qquad\dots(32)\end{aligned}$$

وللحصول على مقدر بيز الهرمي لدالة البقاء $S(x)$ في ظل دالة خسارة تربيعية وعلى فرض ان:

$$u(\theta;\alpha;\beta)=\frac{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]}$$

$$\left.\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\overline{x}}\,d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta\qquad\dots(33)$$

وباشتقاق المعادلة (33)للمعلمات فان:

$$u_1=\frac{\partial u\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{c\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\theta}$$

$$\left.\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta$$

$$u_2=\frac{\partial u\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\alpha}$$

$$\left.\frac{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta$$

$$u_3=\frac{\partial u\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\beta}$$

$$\left.\frac{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta$$

$$u_{12}=\frac{\partial^2 u\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{c}\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\theta\,\partial\alpha}$$

$$\left.\frac{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta$$

$$u_{12}=u_{21}$$

$$\mathbf{u_{22}}=\frac{\partial^2 u\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{(\partial\alpha)^2}$$

$$\cdot\frac{\left.\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta}{}$$

$$u_{13}=\frac{\partial^2 u\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1}{c}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\theta\,\partial\beta}$$

$$\frac{\left.\frac{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta}{}$$

$u_{13}=u_{31}$

u_{23}

$$=\frac{\boldsymbol{\partial}^2 u\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}\theta^{a_1-1}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{\partial\alpha\,\partial\beta}$$

$$\cdot\frac{\left.\frac{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta}{}$$

$u_{23}=u_{32}$

$$u_{33}=\frac{\partial^2 u\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\left[1+\frac{\theta\beta x}{\theta\alpha+\beta}\right]e^{-\theta x}\frac{\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{c\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\left[\int_0^c\int_0^{c_1}\int_0^{c_2}\int_0^{c_3}\int_0^{c_4}\int_0^{c_5}\frac{1{b_1}^{a_1}{b_2}^{a_2}}{c\Gamma(a_1)\Gamma(a_2)}e^{-b_1\theta}\alpha^{a_2-1}e^{-b_2\alpha}\right.}\right.}{(\partial\beta)^2}$$

$$\frac{\left.\frac{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d}{\theta^{a_1-1}\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^n(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}\frac{\Gamma(c+d)}{\Gamma(c)\Gamma(d)}\beta^{c-1}(1-\beta)^{d-1}da_1da_2d\,b_1db_2dcd\,d]d\theta d\alpha\,d\beta}\right]d\theta d\alpha\,d\beta}{}$$

$$L_{123}=\frac{\partial^3\left(\frac{\theta^2}{\alpha\theta+\beta}\right)^n\prod_{i=1}^{n}(\alpha+\beta x_i)e^{-n\theta\bar{x}}}{\partial\theta\,\partial\alpha\,\partial\beta}$$

فان المعادلة(24)تكون كالاتي:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{SBSEL}=\hat{S}_{mle}&+u_1\rho_1\sigma_{11}+u_1\rho_2\sigma_{12}++u_1\rho_3\sigma_{13}+0.5L_{231}u_1\sigma_{23}\sigma_{11}+0.5L_{233}u_1\sigma_{23}\sigma_{31}\\&+0.5L_{311}u_1\sigma_{31}\sigma_{11}+0.5L_{312}u_1\sigma_{31}\sigma_{21}+0.5L_{313}u_1\sigma_{31}^2+0.5L_{321}u_1\sigma_{32}\sigma_{11}\\&+0.5L_{323}u_1\sigma_{32}\sigma_{31}+0.5L_{331}u_1\sigma_{33}\sigma_{13}+0.5L_{332}u_1\sigma_{33}\sigma_{21}+0.5L_{333}u_1\sigma_{33}\sigma_{31}\\&+0.5L_{111}u_1\sigma_{11}^2+0.5L_{112}u_1\sigma_{11}\sigma_{21}+0.5L_{113}u_1\sigma_{11}\sigma_{31}\qquad\dots(34)\end{aligned}$$

علماً ان جميع التكاملات والمشتقات للمعادلات آنفة الذكر تم اجراء ضمن الدوال الخاصة ببرنامج ما تلاب لصعوبة حلها يدوياً.

8-المحاكاة:

لقد تضمنت تجارب المحاكاة [1]المراحل الاساسية لتطبيق اساليب تقدير دالة البقاء في هذا البحث.

المرحلـة الأولـى: مرحلـة تحديـد القيم الافتراضـية وتعتبـر مـن المراحـل المهمـة الـذي تعتمـد عليهـا المراحـل اللاحـق للبرنـامج، وتتم اختيار القيم الافتراضية كالاتي:

1- تحديد قيم افتراضية مختلفة لمعلمات توزيع ليندلي ذو ثلاث معلمات وفق الجدول الآتي:

جدول (1) يبين القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع

Experiment	Θ	α	β
1	2	3	3
2	2	3.5	2

2-اختيار حجوم مختلفة للعينة لغرض معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة النتائج حيث كانت (10-25-50-75-100).

3-تكرار كل تجربة كان مساويا الى (L=1000) لغرض الحصول على تجانس عال.

المرحلة الثانية توليد البيات العشوائية : [7]وفي هذه المرحلة يتم توليد بينات عشوائية وفق توزيع ليندلي بالاعتماد على طريقة (مونت- كارلو) (Lambert W function)يمكن تلخيصها على وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$x=\frac{\theta\alpha+\beta}{\beta\theta}-w_{-1}\left[-\frac{1}{\beta}(1-ui)(\theta\alpha+\beta)\right]e^{-\theta x}\qquad\dots(35)$$

ui: متغير عشوائي مستمر يتبع التوزيع المنتظم.

المرحلة الثالثة إيجاد التقديرات: وفي هذه المرحلة تتم إيجاد المقدرات لمعلمات ودالة البقاء لتوزيع ليندلي باســتعمال طراق التقدير والمتمثلة بطريق بيز القياسية وطريقة بيز الهرمي .

المرحلة الرابعة المقارنة بين طرائق التقدير: وهي المرحلة الأخيرة من مراحل تجارب المحاكات حيث يتم فيها المقارنة بين طريقتي تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي وذالك بالاعتماد على المعيار الاحصـــائي متوسـط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) التي يعطى بالصـــيغة الاتية[11] :

$$\mathrm{IMSE}\left(\hat{S}(ti)\right)=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left(\hat{S}i(tj)-S(tj)\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\mathrm{MSE}\left(\hat{S}(ti)\right) \qquad \dots(36)$$

إذ إن:

L: تمثل عـدد مرات تكرار التجربة وهو (1000) مرة.

n_t : هي مـعبرة عن حدود المتغير (t_i) من الـحد الادنى الى الحد الاعلى .

$\hat{S}(t_i)$:القيمـة المقدرة لدالة البقاء وقف طـرائق التقدير المستعملة .

جدول رقم (2) القيم الحقيقية والتقديرية لدالة البقاء بجميع طرائق التقدير وقيم متوسط مربعات الخطاء التكاملي (IMSE) عند كل حجم عينة

Model 1			θ=2 α=3 β=3		Model 2			θ=2 α=3.5 β=2	
n	ti	Real(S(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$		ti	Real(S(t))	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	$\hat{S}(t)_{HBSEL}$
10	0.1	0.99889	0.99637	0.95238	10	0.1	0.99918	0.99722	0.95238
	0.2	0.99557	0.98993	0.90476		0.2	0.99674	0.99226	0.90476
	0.3	0.99005	0.98131	0.85714		0.3	0.99268	0.98558	0.85714
	0.4	0.98238	0.97074	0.80952		0.4	0.98702	0.97739	0.80952
	0.5	0.97260	0.95837	0.76190		0.5	0.97980	0.96779	0.76190
	0.6	0.96079	0.94433	0.71429		0.6	0.97104	0.95686	0.71429
	0.7	0.94701	0.92872	0.66667		0.7	0.96079	0.94470	0.66667
	0.8	0.93136	0.91165	0.61905		0.8	0.94910	0.93135	0.61905
	0.9	0.91393	0.89321	0.57143		0.9	0.93602	0.91690	0.57143
	1	0.89484	0.87351	0.52381		1	0.92161	0.90139	0.52381
IMSE			0.00160	0.05942			IMSE	0.00119	0.06605
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$				Best	$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	
25	0.1	0.99889	0.99770	0.99813	25	0.1	0.99918	0.99808	0.97561
	0.2	0.99557	0.99267	0.99374		0.2	0.99674	0.99403	0.95122
	0.3	0.99005	0.98535	0.98713		0.3	0.99268	0.98821	0.92683
	0.4	0.98238	0.97595	0.97844		0.4	0.98702	0.98079	0.90244

ISSN: 2618-0278 Vol. 4No. 12 December 2022

	0.5	0.97260	0.96459	0.96778		0.5	0.97980	0.97187	0.87805
	0.6	0.96079	0.95139	0.95522		0.6	0.97104	0.96152	0.85366
	0.7	0.94701	0.93646	0.94086		0.7	0.96079	0.94982	0.82927
	0.8	0.93136	0.91991	0.92479		0.8	0.94910	0.93685	0.80488
	0.9	0.91393	0.90184	0.90709		0.9	0.93602	0.92266	0.78049
	1	0.89484	0.88235	0.88788		1	0.92161	0.90734	0.75610
IMSE			0.00074	0.00062	IMSE			0.00057	0.01279
Best			$\hat{S}(t)_{HBSEL}$		Best			$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	
50	0.1	0.99889	0.99807	0.98361	50	0.1	0.99918	0.99881	0.98361
	0.2	0.99557	0.99350	0.96721		0.2	0.99674	0.99582	0.96721
	0.3	0.99005	0.98665	0.95082		0.3	0.99268	0.99118	0.95082
	0.4	0.98238	0.97767	0.93443		0.4	0.98702	0.98497	0.93443
	0.5	0.97260	0.96668	0.91803		0.5	0.97980	0.97724	0.91803
	0.6	0.96079	0.95379	0.90164		0.6	0.97104	0.96804	0.90164
	0.7	0.94701	0.93910	0.88525		0.7	0.96079	0.95742	0.88525
	0.8	0.93136	0.92273	0.86885		0.8	0.94910	0.94542	0.86885
	0.9	0.91393	0.90477	0.85246		0.9	0.93602	0.93212	0.85246
	1	0.89484	0.88535	0.83607		1	0.92161	0.91755	0.83607
IMSE			0.00048	0.00263	IMSE			0.00027	0.00407
Best			$\hat{S}(t)_{SBEL}$		Best			$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	
75	0.1	0.99889	0.99852	0.98750	75	0.1	0.99918	0.99870	0.98765
	0.2	0.99557	0.99465	0.97500		0.2	0.99674	0.99547	0.97531
	0.3	0.99005	0.98858	0.96250		0.3	0.99268	0.99052	0.96296
	0.4	0.98238	0.98041	0.95000		0.4	0.98702	0.98396	0.95062
	0.5	0.97260	0.97022	0.93750		0.5	0.97980	0.97585	0.93827
	0.6	0.96079	0.95807	0.92500		0.6	0.97104	0.96627	0.92593
	0.7	0.94701	0.94406	0.91250		0.7	0.96079	0.95527	0.91358
	0.8	0.93136	0.92826	0.90000		0.8	0.94910	0.94291	0.90123
	0.9	0.91393	0.91079	0.88750		0.9	0.93602	0.92928	0.88889
	1	0.89484	0.89173	0.87500		1	0.92161	0.91442	0.87654

IMSE			0.00034	0.00077	IMSE			0.000182	0.00225
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$			Best		$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	
100	0.1	0.99889	0.99854	0.99000	100	0.1	0.99918	0.99877	0.99010
	0.2	0.99557	0.99466	0.98000		0.2	0.99674	0.99564	0.98020
	0.3	0.99005	0.98854	0.97000		0.3	0.99268	0.99080	0.97030
	0.4	0.98238	0.98026	0.96000		0.4	0.98702	0.98433	0.96040
	0.5	0.97260	0.96992	0.95000		0.5	0.97980	0.97631	0.95050
	0.6	0.96079	0.95760	0.94000		0.6	0.97104	0.96679	0.94059
	0.7	0.94701	0.94337	0.93000		0.7	0.96079	0.95584	0.93069
	0.8	0.93136	0.92735	0.92000		0.8	0.94910	0.94352	0.92079
	0.9	0.91393	0.90962	0.91000		0.9	0.93602	0.92990	0.91089
	1	0.88796	0.87500	0.98000		1	0.92161	0.91505	0.90099
IMSE			0.00027	0.00025	IMSE			0.000179	0.00061
Best			$\hat{S}(t)_{HBEL}$			Best0.000148		$\hat{S}(t)_{SBSEL}$	

9-الاستنتاجات:

1- يكون مقدر بيز الهرمي في ظل دالة خســـارة تربيعية اكثر كفاءة من بقية الطرق لأنه يمتلك اقل قيمة (IMSE)لأغلب حجوم العينات وقيم المعلمات الافتراضية .

2- احتل مقدر بيز القياسي في ظل دالة خسارة تربيعية الأفضلية بعد مقدر بيز الهرمي.

3- وجد ان قيم (IMSE) تتناقص كلما زاد حجم العينة ولجميع الحالات المدروســة والقيم المعلمات المفترضــة وهذا ما يتطابق مع النظرية الإحصائية.

4- اثبتت طريقة بيز الهرمي كفاءتها في تقدير دالة البقاء لأنموذج توزيع ليندلي ذي الثلاث معلمات.

10-التوصيات:

1-يوصي الباحث بالاعتماد على طريقة بيز الهرمي لتقدير دالة البقاء بد ل من طريقة بيز القياسية.

2-يوصي الباحث بتوسيع نطاق الدراسة لتشمل استخدام بيانات حقيقية بالاعتماد على الطرائق البيزية المستعملة في البحث.

3-يوصي الباحث باقتراح دوال خسارة مع الدوال الخسارة المستخدمة.

المصادر:

1-عويد ، غزوان رفيق،(2012) ، "مقارنة مقدرات بيز لمعلمة ودالتي المعولية ومعدل الفشل لتوزيع رالي باستعمال دوال خسارة متزنة وغير متزنة " رسالة ماجستير ، كلية الادارة والاقتصاد – الجامعة المستنصرية.

2- Han, M.,(2008)."Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" ,Journal of Chen university ,pp. 339-407.

3- Ghitany, M. E., Alqallaf, F., Al-Mutairi, D. K. & Husain, H. A. A two-parameter weighted Lindley distribution and its applications to survival data. Math. Comput. Simul. **81**, 1190–1201 (2011).

4- Han, M.,(2008**)**."Expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate" ,Journal of Chen university ,pp. 339-407.

5-Ibrahim, J. G. & Laud, P. W. On Bayesian analysis of generalized linear models using Jeffreys's prior. J. Am. Stat. Assoc. **86**, 981–986 (1991).

6- Kamakura, W. A., & Wedel, M. (2004). An Empirical Bayes Procedure for lmproving. JOUrnal Of BusineSS & Economic Statistics, 22(1).

7- Kvam, P. H., & Vidakovic, B. (2007). Nonparametric statistics with applications to science and engineering (Vol. 653). John Wiley & Sons.

8- Mesfioui, M. & Abouammoh, A. M. On a multivariate Lindley distribution. Commun. Stat. Methods **46**, 8027–8045 (2017).

9- Naser, J. A. Under Different Priors &Two Loss Functions To Compare Bayes Estimators With Some of Classical Estimators For the Parameter of Exponential Distribution. (2017).

10-Reuven, Y. R.,(1981)"Simulation and theMonte Carlo Method " John Wiley & Sons New York Chichester Brisbane Toronto Singapore.

11- Shanker, R., Shukla, K. K., Shanker, R. & Tekie, A. L. A Three-parameter Lindley distribution. Am. J. Math. Stat. **7**, 15–26 (2017).