مقارنة بين خوارزمية (EM) وخوارزمية (NR) لإيجاد مقدرات التوزيع الهجين ويبل كاما باستخدام المحاكاة

أ.م.د.علي عبد الحسين — **جامعة بغداد/كلية الادارة والاقتصاد**

م.م.علي ناصر حسين — **جامعة البصرة/كلية الادارة والاقتصاد**

A comparison between the algorithms (EM) and (NR) to find a hybrid distribution Weibull Gamma using simulation

Ali A. Al Wakeel **Ali N. Hussein**

****

مقارنة بين خوارزمية (EM) وخوارزمية (NR) لإيجاد مقدرات التوزيع الهجين ويبل كاما باستخدام المحاكاة

أ.م.د. علي عبدالحسين
م.م.علي ناصر حسين

المستخلص

عند استعمال طريقة الترجيح الاعظم (MLM) لتقدير معلمات التوزيعات المختلطة (MD)نحصل على منظومة معادلات غير خطية (System of Non Linear Equations) ، لحل هذه المنظومة تستخدم بعض الخوارزميات العددية ومن هذه الخوارزميات المستخدمة هي خوارزمية تعظيم التوقع (EM) حيث يتم فيها اعادة صياغة المسألة الى مسألة بيانات غير تامة و من ثم ايجاد التوقع الشرطي ، ومن الخوارزميات الاخرى المستخدمة لايجاد مقدرات طريقة الترجيح الاعظم خوارزمية نيوتن رافسون (NR) وهذه الخوارزمية هي اسلوب رياضي تكراري يعتمد على ايجاد الحل لمجموعة من المعادلات غير الخطية باستخدام مفكوك تايلر. ان قيمة المقدرات الناتجة تختلف تبعاً لاختلاف الخوارزمية المستخدمة ،ومن هنا تاتي اهمية هذه الدراسة و المتمثلة بايجاد افضل خوارزمية يمكن استخدامها لايجاد الحل لمنظومة المعادلات الخطية لطريقة الترجيح الاعظم عند استخدام هذه الطريقة في تقدير معلمات التوزيع الهجين ويبل كاما

ABSTRACT

When using Maximum Likelihood Method for estimating the Mixture Distribution Parameters ,we get the equation of non-linear system This system is used to solve some numerical algorithms and the algorithms used are the expectation maximization algorithm (EM) where rewritten to instabilmente incomplete data and then where to find the conditional expectation. Among the other algorithm which used to find the estimation of Mixture Distribution Parameters is Newton Raphson , which is iterative methods depending on finding the solution of non-linear system of equation by using Taylor Series

المقدمـــة

في كثير من التطبيقات يكون السلوك الاحتمالي للمشاهدات غير متجانس بحيث تجميع هذه المشاهدات غير المتجانسة في مجاميع جزئية متجانسة، ان مشاهدات المجموعات الجزئية قد يكون لها سلوك احتمالي بدالة كثافة احتمالية متشابه لكن بمعلمات مختلفة، او ان دالة الاحتمالية لهذه المجاميع الجزئية تكون مختلفة، ان توزيع المجتمع الكلي في هذه الحالة يكون تركيبة خطية لدوال الكثافة الاحتمالية للمجاميع الجزئية، ويسمى التوزيع في هذه الحالة بالتوزيع المختلط (Mixture Distribution) ، ويعتبر (Pearson 1894) من الباحثون الاوائل الذين اهتموا بفكرة التوزيعات المختلطة[13,5].

وقد استخدمت التوزيعات المختلطة في تطبيقات مختلفة، من اهم المجالات استخدامات التوزيعات المختلطة هو في المعولية واختبارات الحياة ((Reliability and Life Testing) لدراسة اسباب عطل الاجهزة في حالة وجود أكثر من سبب واحد للعطل، كما استخدمت التوزيعات المختلطة في دراسة سرعة الرياح وايجاد التوزيع الامثل لبيانات سرعة الرياح في منطقة معينة لغرض انتاج الطاقة الكهربائية حيث تعتبر طاقة الرياح من اهم مصادر الطاقة البديلة لإنتاج طاقة كهربائية تكون قليلة التكلفة وبدون تلوث.

ان التوزيع الهجين ويبل كاما هو احدى التوزيعات المختلطة يمثل دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مجتمع غير متجانس (Non Homogeneous) يتألف من مجتمعين جزئيين المجتمع الجزئي الاول يتبع توزيع ويبل اما المجتمع الجزئي الثاني فيتبع توزيع كاما.

مشكلة الدراسة:

تعتبر طريقة تقدير الترجيح الاعظم واحدة من اهم طرق تقدير معلمات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المختلطة، وعند استخدام هذه الطريقة لإيجاد تقديرات التوزيع الهجين ويبل كاما ينتج منظومة معادلات غير الخطية ولحل هذه المنظومة تستخدم خوارزميات مختلفة تعتمد دقة هذه المقدرات على الخوارزمية المستخدمة.

هدف البحث:

يهدف البحث الى ايجاد مقدرات طريقة الترجيح الاعظم لمعلمات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما باستخدام اسلوباً تكرارياً الاسلوب الاول يتمثل بخوارزمية تعظيم التوقع (EM) و الاسلوب الثاني يتمثل بخوارزمية نيوتن رافسن (NR) ومن ثم المقارنة بينهما لايجاد افضل النتائج

التوزيع الهجين ويبل كاما

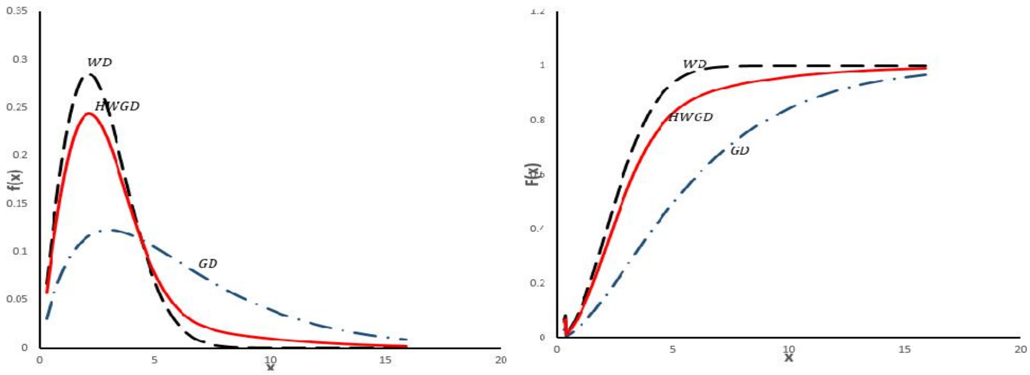
ان التوزيع الهجين ويبل كاما يقصد منه ان المجتمع الكلي غير المتجانس *(Non Homogeneous)* تم تجزئته الى مجموعتين متجانسة*(Homogeneous)* بحيث ان السلوك الاحتمالي لمشاهدات احدى المجموعات يسلك سلوك توزيع ويبل*(WD)* اما مشاهدات المجموعة الثانية فان السلوك الاحتمالي لها يكون توزيع كاما*(GD)* ان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما تكون كمايلي:

$$f(\chi,\psi) = \mathcal{P}\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} + (1-\mathcal{P})\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \quad (1)$$

حيث ان $\psi = (\alpha,\gamma,\beta,\lambda,\mathcal{P})$

$\alpha,\beta,\gamma,\lambda > 0 \qquad 0 < \mathcal{P} < 1$

ويوضح الشكل *(1)* منحنى دالة الكثافة *(pdf)* الاحتمالي و منحنى الدالة التجمعية *(cdf)* للتوزيع الهجين ويبل كاما *(HW-GD)*كما يوضح منحنى دالة الكثافة الاحتمالية *(pdf)*ومنحنى الدالة التجمعية *(cdf)* لتوزيع ويبل *(WD)* وتوزيع كاما *(GD)* الذين يمثلان توزيع المجتمعات الجزئية *(SP)*



شكل (1) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية و الدالة التجمعية للتوزيع الهجين ويبل كاما ومنحنى دالة الكثافة الاحتمالية والتجمعية لتوزيع ويبل وتوزيع كاما للمجتمع الجزئي :

تعتبر خوارزمية تعظيم التوقع (EM) احدى طرق حساب مقدرات دالة الامكان الاعظم في الحالات التي يكون فيها استعمال الطرق الرياضية الاعتيادية شاقة او صعبة ، وهي اسلوب تكرارية أي انها لا تعطي قيمة نهائية للحل وانما يتم تكرارها عدد من المرات الى ان يتم الوصول الى قيمة تقريبية الى المعلمة الحقيقية.

ان البداية لهذه الخوارزمية ترجع الى العام (1977)عندما قام الباحثون (Dempster, Laird and Rubin) بنشر بحثهم الموسوم (Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm)[10] و الذي اشتمل على مبرهنات مهمة جعلت من هذه الخوارزمية واحدة من اهم الاساليب التكرارية التي يمكن استخدامها في اكثر من تطبيق ومن اهمها ايجاد تقديرات المعلمات عند استخدام طريقة الترجيح الاعظم (ML)، ولقد سميت هذه الخوارزمية بـ (Expectation Maximization Algorithm) و اختصار تسمى (EM).

استخدام خوارزمية (EM) لحساب مقدرات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD)

ان احد تطبيقات خوارزمية تعظيم التوقع (EM) تتمثل بإيجاد مقدرات التوزيعات المختلطة عند استخدام طريقة الترجيح الاعظم للتقدير حيث استخدمت و بشكل واسع لحساب مقدرات الكثير من دوال الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المختلطة.

ان خوارزمية تعظيم التوقع (EM) هي اسلوب تكراري يستخدم لحساب مقدرات دالة الترجيح الاعظم (ML) في حالة البيانات غير التامة (Incomplete Data)ولإيجاد مقدرات دالة الترجيح الاعظم (ML) لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما يعاد صياغة المسئلة الى مسئلة بيانات غير تامة وكما يلي[8,3]:

ليكن

$\underline{x} = [x_1 x_2 \cdots x_n]$

متجه عشوائي يمثل مشاهدات العينة، ولنفرض مقابل كل مشاهدة (x_i) من مشاهدات العينة يوجد متغير اضافي اصم (Latent)[3] غير مشاهد (z_{ji}) يعرف كما يلي:

$$z_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \text{ belong to component j} \\ 0 & 0.\text{w} \end{cases} \qquad (2)$$

$$i = 1,2 \ldots n \qquad j = 1,2$$

ان مشاهدات المتغير $(\underline{z})$ هي مشاهدة عشوائية مستقلة بعضها عن البعض ولها دالة كثافة احتمالية معرفة كما يلي:

$$g(z_j / \psi) = p^{z_{1i}}(1-p)^{z_{2i}} \qquad (3)$$

ان المشاهدات الشرطية $(x/z_j, \psi)$ هي ايضاً مشاهدات عشوائية مستقلة عن بعضها ولها دالة الكثافة الاحتمالية معرفة وفق المعادلة الاتية:

$$h(x_i/z_{ji}, \psi) = \sum_{j=1}^{k} z_{ji}\, f_j(x_i / \theta_i) = \prod_{j=1}^{k} f_j\,(x_i / \theta_j) \qquad (4)$$

ان دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة (Joint Density) للمتغير العشوائي (x_i) والمتغير الاضافي (z_{ji})يعرف وفق المعادلة الاتية:

$$k(x_i, z_{ji}/\psi) = h(x_i/z_{ji}\,; \psi)g(z_{ji} / \psi) \qquad (5)$$

كما ان دالة الترجيح لدالة الكثافة الاحتمالية المشتركة تكون كالاتي:

$$L = \prod_{i=1}^{n}\{h(x_i/z_{ji}\,;\psi)g(z_{ji} / \psi)\} \qquad (6)$$

تعويض المعادلتين (3) ، (4) في المعادلة)6(ينتج الاتي:

$$\mathrm{L} = \prod_{i=1}^{n}\left\{\left(\prod_{j=1}^{2}\left(f_j(x_i;\theta_j)\right)^{z_{ji}}\right)\left(\prod_{j=1}^{2} p_j^{z_{ji}}\right)\right\} \qquad (7)$$

حيث ان

$$p_1 = p \qquad p_2 = (1-p)$$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (7) و التبسيط ينتج:

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{2} z_{ji}.Ln\{\pi_i f_i(x_j, \theta_i)\}\right] \qquad (8)$$

حيث ان$Ln\ L = \mathcal{L}$

الخطوات اعلاه تم من خلالها اعادة صياغة المسألة الى مسألة بيانات غير تامة لكي يتم تطبيق خوارزمية تعظيم التوقع (EM) وكما ياتي:

اولا خطوة التوقع (Expectation Step):- يتم من خلالها ايجاد التوقع للبيانات التامة علما بوجود البيانات غير التامة أي ان:

$$Q\left(\psi,\psi^{(t)}\right)=E\{\mathcal{L}(\omega,\psi\ /\ x)\} \qquad (9)$$

حيث ان (ω) تمثل مجموع المشاهدات التامة $\left(z_{ji},x_j\right)$.

و بتعويض المعادلة (8) في المعادلة (9) ينتج:

$$Q(\psi,\psi^t)=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2} z_{ji}Ln(\pi_i f_j(x_j,\theta_i^t))\Big/ X_i=x_i\right\} (10)$$

وبما ان قيم المتغير العشوائي (x) هي قيم مشاهدة أي انها قيم ثابته(fixed) بينما قيم المتغير العشوائي الاصم$(\mathcal{Z})$(latent Variable)هي قيم غير مشاهدة فان المعادلة (10) تكون كالاتي:

$$Q(\psi,\psi^t)=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{2} Ln\{\pi_1 f_j(x_j,\theta_i)\}E\left(z_{ji}/X_i=x_i\right)\right] (11)$$

وبما ان

$$E(z/X=x_i)=p(z/X=x_i) \qquad (12)$$

تطبيق نظرية بيز فان المقدار اعلاه يبسط كما يأتي:

$$p\left(z_{ij}/X_j=x_i\right)=\frac{p\left(X_j=x_i\ /\ z_{ij}\right)p\left(z_{ij}=1\right)}{\sum_{i=1}^{2} p\left(X_j=x_i/z_{ij}=1\right)p\left(z_{ij}=1\right)} (13)$$

ينتج:(13)تبسيط المعادلة

$$p\left(x_j/Z_{ij}=z_{ij}\right)=\mathcal{G}(\mathrm{j}/\chi_i\,,\theta_j)=\frac{p_j f_j(x_i/\theta_j)}{\sum_{j=1}^{2} p_j f_j(x_i/\theta_j)} (14)$$

والتبسيط ينتج :(13) في المعادلة (14)تعويض المعادلة

$$\begin{aligned}Q(\psi,\psi^t)=&\,Ln(p)\sum_{i=1}^{n} f(1\ /\ \chi_i,\psi^{(t)})+Ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} f(2\ /\ \chi_i,\psi^{(t)})\\&+\sum_{i=1}^{n} Ln\left\{\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right\} f(1\ /\ \chi_i,\psi^{(t)})\\&+\sum_{i=1}^{n} Ln\left\{\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i^{\gamma-1}e^{\frac{\chi_i}{\lambda}}\right\} f\left(2/\chi_i\,,\psi^{(t)}\right) \qquad (15)\end{aligned}$$

تمثل معادلة التوقع الشرطي للبيانات التامة (15): ان المعادلة (**Maximization Step**)**ثانياً خطوت التعظيم** بوجود البيانات المشاهدة (الخطوة الاولى من خوارزمية تعظيم التوقع)، ولإيجاد المقدرات للتوزيع الهجينة وبيلكاما

في نهايتها العظمى اي ايجاد الخطوة الثانية و التي (15) تحسب قيمة المقدرة التي تجعل المعادلة (HWGD) تمثل خطوة التعظيم(Maximization Step).

لمعرفة القيمة التقديرية لمعلمة وزن الخليط (Weighted Mixture Parameter) يستخدم الحد الاول والثاني من المعادلة ادناه وكما يأتي

ليكن

$$Q = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(j \,/\, \chi_i, \psi^{(t)})\, Ln(p_j) \qquad (16)$$

وبما ان المجموع الكلي للأوزان يساوي واحد:

$$\sum_{j=1}^{2} p_j = 1 \qquad (17)$$

تستخدم المعادلة (17) كقيد يتم استخدامه لا يجاد قيمة معلمة الوزن اي استخدام معامل لاكرانج وكما يأتي

$$Q = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(j \,/\, \chi_i, \psi^{(t)})\, Ln(p_j) + \xi\Big(\sum_{j=1}^{2} p_j - 1\Big) \qquad (18)$$

حيث ان $p_1 = p \qquad p_2 = (1-p)$

تمثل معامل لاكرانج (ξ)

ايجاد المشتقة للمعادلة (18) بالنسبة (p_i) واخذ المجموع لـ (j) و التبسيط نحصل على القيمة التقديرية لمعلمة وزن الخليط (Weighted Mixture Parameter)

$$\hat{p}^{(t+1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1/\chi_i\,, \theta_j^{(t)}) \qquad (19)$$

ان القيمة التقديرية للمعلمة(α) تحسب بايجاد المشتقة الجزئية للمعادلة (15) بالنسبة للمعلمة(α) ينتج الاتي

$$\hat{\alpha}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f\left({}^{1}\!/_{\chi_i,\,\theta^{(t)}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} f\left({}^{1}\!/_{\chi_i,\,\theta^{(t)}}\right) Ln\left(\frac{\chi_i}{\beta_1^{(t)}}\right) - \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{1}\!/_{\chi_i,\,\theta^{(t)}}\right) Ln\left(\frac{\chi_i}{\beta_1^{(t)}}\right)\left(\frac{x_j}{\beta_1^{(t)}}\right)} \qquad (20)$$

ان القيمة التقديرية للمعلمة(β) تحسب بايجاد المشتقة الجزئية للمعادلة (15) بالنسبة للمعلمة(β) ينتج الاتي

$$\hat{\beta}_1^{(t+1)} = \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_i f\left({}^{1}\!/_{\chi_i,\,\theta^{(t)}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} f\left({}^{1}\!/_{\chi_i,\,\theta^{(t)}}\right)}\right\}^{{}^{1}\!/_{\alpha_1}} \qquad (21)$$

وللحصول على تقديرات معلمة الشكل و القياس لتوزيع كاما يتم باخذ المشتقة الجزئية للمعادلة *(15)* بالنسبة للمعلمات$(\lambda;\gamma)$ فبالنسبة لمعلمة القياس (λ) فان معادلة حساب القيمة التقديرية تكون كما ياتي

$$\hat{\lambda}^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \chi_i f\left({}^{2}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right)}{\hat{\gamma}^{(t)} \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{2}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right)} \qquad (22)$$

ولحساب القيمة التقديرية للمعلمة (γ)تستخدام طريقة نيوتن رافسون *(NR)* وكما ياتي:

$$\overset{\frown(t+1)}{\gamma} = \hat{\gamma}^{(t)} - \left(\frac{-Ln(\hat{\lambda}^{(t)}) \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{2}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right) - psi \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{2}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right) + \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{1}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right) Ln(\chi_i)}{-psi(1,\hat{\gamma}^{(t)}) \sum_{i=1}^{n} f\left({}^{2}/_{\chi_i,\, \theta^{(t)}}\right)} \right) (23)$$

استخدام خوارزمية نيوتن رافسون لحساب مقدرات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل –كاما

هي احدى الاساليب الرياضية المستخدمة لإيجاد الحل للمعادلات غير الخطية(Nonlinear Equation) وتستخدم هذه الخوارزمية لإيجاد قيمة تقريبه لجذر المعادلة غير الخطية كما يمكن استخدامها في حالة وجود منظومة من المعادلات غير الخطية (System of Nonlinear Equation) لإيجاد الجذور لهذه المعادلات[(1)].

ان طريقة نيوتن رافسن (NR) تمتاز بخاصية ان تقاربها يكون تقارب التربيعي (Quadratic convergence) اي ان التقارب (Convergence) يكون بعدد من الدورات اقل مقارنة بالخوارزميات التي يكون تقاربها بشكل خطي [(6,10)](Linear Convergence).

اضافة الى انها تمتاز بان عدد الدورات فيها للوصول الى القيمة النهائية يكون قليلة[(1)]. فأنها و في حالة كون منحنى الدالة (Function Carve) مقعر (Concave) فأننا سوف نصل الى القيمة النهائية للحل من دورة واحدة [(10)].

لكن لا تخلو هذه الخوارزمية من وجود بعض المشاكل ومن هذه المشاكل هي اننا نحتاج وفي كل دورة ان نحسب المشتقة الثانية للمعادلة و في حالة منظومة المعادلات فأننا نحتاج الى ايجاد مصفوفة (Matrix) تمثل عناصرها المشتقات الثانية ان عدد الصفوف و الاعمدة في هذه المصفوفة يزداد كلما زادة عدد جذور المعادلة المجهولة كما ان خوارزمية نيوتن رافسن (NR) ليس دائما تعطي ناتج نهائي عند استخدامها[(6)] .

في هذا المبحث سوف نستعرض خطوات تطبيق خوارزمية نيوتن رافسن (NR) لحساب مقدرات طريقة الترجيح الاعظم لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الهجين ويبل كاما

تعتبر طريقة نيوتن رافسون واحدة من الخوارزميات التكرارية التي يمكن استخدامها لحساب معادلات طريقة الترجيح الاعظم[(10)] لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيعات الهجين ويبل كاما المختلطاي لإيجاد الحل لمجموعة المعادلات الناتجة من اجراء الاشتقاق الجزئي لمعادلة لوغاريتم دالة الترجيح لمشاهدات العينة اي ايجاد الحل للمعادلة أدناه .

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 \qquad (\ 24\ )$$

يتم فيها ايجاد (NR) يمثل اللوغاريتم الطبيعي لدالة الترجيح ان خوارزمية نيوتن رافسون $(\mathcal{L})$ حيث ان . حيث تكون الصيغة العامة لطريقة نيوتن (Taylor Series)مقدرات طريقة الترجيع الاعظم باستخدام صيغة تايلر رافسون[(1)](NR).

$$\left(\psi^{(t+1)}\right) = \left(\psi^{(t)}\right) + I^{-1}\left(\psi^{(t)}, x\right) s(x, \psi^{t}) \qquad (25)$$

حيث ان:

$I^{-1}\left(\psi^{(t)}, x\right)$: (Hessian Matrix) تمثل مصفوفة ذات سعة (k×k) عناصرها تمثل المشتقة الثانية للوغاريتم دالة الترجيح بالنسبة للمعلمات المجهولة.

$s(x, \psi^{t})$: متجه ذات سعة (k×1) المشتقة الاولى للوغاريتم دالة الامكان بالنسبة للمعلمات المجهولة.

$\psi^{(t)}$:متجه ذات سعة (k×1) يمثل قيمة المعلمة المقدرة في التكرار t.

$\psi^{(t+1)}$: متجه ذات سعة (k×1) يمثلقيمة المعلمة المقدرة في التكرار (t+1).

وبصورة عامة ان صيغة نيوتن رافسون لتقدير مجموعة من المعلمات تكتب كما يلي[(1)]:

$$\begin{bmatrix} \psi_1^{(t+1)} \\ \psi_2^{(t+1)} \\ \vdots \\ \psi_k^{(t+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^{(t)} \\ \psi_2^{(t)} \\ \vdots \\ \psi_k^{(t)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_1^{(t)}\partial\psi_1^{(t)}} & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_1^{(t)}\partial\psi_2^{(t)}} & \cdots & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_1^{(t)}\partial\psi_k^{(t)}} \\ \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_2^{(t)}\partial\psi_1^{(t)}} & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_2^{(t)}\partial\psi_2^{(t)}} & \cdots & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_2^{(t)}\partial\psi_k^{(t)}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_k^{(t)}\partial\psi_1^{(t)}} & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_k^{(t)}\partial\psi_2^{(t)}} & \cdots & \frac{\partial^2 LogL}{\partial\psi_k^{(t)}\partial\psi_k^{(t)}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial LogL}{\partial\psi_1^{(t)}} \\ \frac{\partial LogL}{\partial\psi_2^{(t)}} \\ \vdots \\ \frac{\partial LogL}{\partial\psi_k^{(t)}} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ولايجاد تقدير لمعلمات دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD)يجب حساب عناصر متجه المشتقات الجزئية الاولى و مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية لدالة الترجيح لمشاهدات العينة وكما يلي

اناللوغاريتم الطبيعيلدالة الترجيح للتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD) يكون كما يلي:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} ln\left\{\mathcal{P}\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} + (1-\mathcal{P})\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right\} \quad (27)$$

ايجاد المشتقة للمعادلة (27) بالنسبة للمعلمة$(\mathcal{P})$ ينتج الاتي:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right) \Big/ \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\right\} (28)$$

ايجاد المشتقة للمعادلة (27) بالنسبة للمعلمة(α) ينتج الاتي:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^{\alpha}}\chi_i^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)\right.$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\right\}\ (29)$$

ايجاد المشتقة للمعادلة (27) بالنسبة للمعلمة (γ) ينتج الاتي:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\gamma}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\Psi(\gamma)-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}ln(\lambda)\right.$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right\}\ (30)$$

حيث ان $\psi(\gamma)$ تمثل مشتقة الـ $\Gamma(\gamma)$

ايجاد المشتقة للمعادلة (27) بالنسبة للمعلمة (β) ينتج الاتي:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{2}}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{2}}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\mathcal{P}\alpha^{2}}{\beta^{2}}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right\}\qquad(31)$$

ايجاد المشتقة للمعادلة (27) بالنسبة للمعلمة (λ) ينتج الاتي:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma+\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{2}}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right.$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right\}\ (32)$$

ايجاد المشتقة (28) بالنسبة للمعلمة $(\mathcal{P})$ نحصل على

$$\frac{\partial\mathcal{L}^{2}}{\partial\mathcal{P}\partial\mathcal{P}}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\frac{\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)^{2}\right.$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\right\}\ (33)$$

ايجاد المشتقة (28) بالنسبة للمعلمة (α) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}\partial\alpha}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\left(\frac{1}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}+\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}\right.\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}\right)$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\right)$$
$$-\left(\left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}\right)$$
$$\left.\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)^2\right)\right\}\ (34)$$

ايجاد المشتقة (28) بالنسبة للمعلمة (γ) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}\partial\gamma}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\left(-\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}ln(\chi_i)e^{-\frac{\chi}{\lambda}}+\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\Psi(\gamma)+\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}ln(\lambda)\right)\right.\right.$$
$$\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right)$$
$$-\left(\left(\frac{\alpha}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}+\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\left(\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}ln(\chi_i)e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right.\right.$$
$$\left.-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\Psi(\gamma)-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}ln(\lambda)\right)$$
$$\left.\left./\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)^2\right)\right\}(35)$$

ايجاد المشتقة (28) بالنسبة للمعلمة (β) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\left(-\frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}\right)/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}{\chi_i}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{\mathcal{P}}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\right)$$
$$-\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}{\chi_i}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\left(-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}\right)\right\}\qquad(36)$$

ايجاد المشتقة (28) بالنسبة للمعلمة (λ) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{P} \partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\left(\frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda} \chi_i^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \gamma - \frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^2} \chi_i^{\gamma-1} \chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right) \right. \right.$$
$$\left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi_i^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}} \chi_i^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right) \right)$$
$$- \left(\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi_i^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}} \chi_i^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right) \left(- \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda} \chi_i^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \gamma \right. \right.$$
$$\left. + \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^2} \chi_i^{\gamma-1} \chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right)$$
$$\left. \left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi_i^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}} \chi_i^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right)^2 \right) \right\} \quad (38)$$

ايجاد المشتقة (29) بالنسبة للمعلمة ($\mathcal{P}$) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \mathcal{P}} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathcal{P} \partial \alpha} \quad (39)$$

ايجاد المشتقة (29) بالنسبة للمعلمة (α) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \alpha \partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\left(\frac{2\mathcal{P}}{\beta^{\alpha}} \chi_i^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{2\mathcal{P}}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} \right. \right. \right.$$
$$+ \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{3\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^2 \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}}$$
$$\left. + \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^2 \left(\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2 e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} \right)$$
$$\left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \right) \right)$$
$$- \left(\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^{\alpha}} \chi_i^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} + \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} \right. \right.$$
$$\left. - \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} \right)$$
$$\left. \left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}} \chi^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \right)^2 \right) \right\} \quad (39)$$

ايجاد المشتقة (29) بالنسبة للمعلمة (γ) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\alpha\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha} {\chi_i}^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} + \frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} \right.\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha} \right) \left(\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} {\chi_i}^{\gamma-1} ln(\chi_i) e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} \right.$$

$$\left. - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} {\chi_i}^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \Psi(\gamma) - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} ln(\lambda) \right)$$

$$\left.\left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \right) \right) \right\} \quad (40)$$

يجاد المشتقة (29) بالنسبة للمعلمة (β) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\alpha\partial\beta} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} (\alpha-1) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} \right.\right.\right.$$

$$+ \frac{2\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$- \frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} (\alpha-1) ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$+ \frac{2\alpha^2\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$+ \frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$+ \frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} (\alpha-1) ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$\left. + \frac{\alpha^2\mathcal{P}}{\beta^2} \left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right) \left(\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha} \right)^2 e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} \right)$$

$$\left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \right) \right)$$

$$- \left(\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha} {\chi_i}^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} + \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} \right.\right.$$

$$\left. - \frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} \left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right) e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} \right)$$

$$\left.\left. / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha} \chi^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma} \chi^{\gamma-1} e^{-\frac{\chi}{\lambda}} \right)^2 \right) \right\} \quad (42)$$

ايجاد المشتقة (29) بالنسبة للمعلمة (λ) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\alpha\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\Bigg(\Bigg(\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}+\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$
$$-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}\Bigg)\Bigg(\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma\lambda}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma$$
$$-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma\lambda^2}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\Bigg)$$
$$/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)^2\Bigg)\Bigg\}\,(43)$$

ايجاد المشتقة (30) بالنسبة للمعلمة $(\mathcal{P})$ نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\mathcal{P}}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}\partial\gamma}\qquad(44)$$

ايجاد المشتقة (30) بالنسبة للمعلمة (α) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\alpha}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\alpha\partial\gamma}\,(45)$$

ايجاد المشتقة (30) بالنسبة للمعلمة (β) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\Bigg(\Bigg(\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma\lambda}\chi_i{}^{\gamma-1}ln(\chi_i)^2e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\Psi(\gamma)$$
$$-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}ln(\lambda)\Bigg)\Bigg(\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}$$
$$+\frac{\mathcal{P}}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^\alpha}\Bigg)$$
$$/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\Bigg)$$
$$-/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^\alpha}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^\alpha}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^\gamma}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)^2\Bigg\}\,(46)$$

ايجاد المشتقة (30) بالنسبة للمعلمة (λ)

$$\varepsilon\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\lambda} =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(\left(-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda}\chi_i{}^{\gamma-1}ln(\chi_i)e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma+\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^2}\chi_i{}^{\gamma-1}ln(\chi_i)\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}+\right.\right.\right.$$

1−𝒫Γγλγλχiγ−1e−χiλΨγλ−1−𝒫Γγλγλ2χiγ−1e−χiλΨγ+1−𝒫Γγλγλχiγ−1e−χiλΨγλ−1
−𝒫Γγλγλ2χiγ−1χie−χiλlnλ−1−𝒫Γγλγλχiγ−1e−χiλ/𝒫αβαχiα−1e−χiβα−1−𝒫Γγλγχiγ
−1e−χiλ−1−𝒫Γγλγλχiγ−1lnχie−χiλ−1−𝒫Γγλγχiγ−1e−χiλΨγ−1−𝒫Γγλγχiγ−1e−χiλ
lnλ−1−𝒫Γγλγλχiγ−1e−χiλγ−1−𝒫Γγλγχiγ−1e−χiλχi/𝒫αβαχiα−1e−χiβα−1−𝒫Γγλγχ
iγ−1e−χiλ247

ايجاد المشتقة (31) بالنسبة للمعلمة $(\mathcal{P})$ نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\mathcal{P}}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\mathcal{P}\partial\beta} \qquad (48)$$

ايجاد المشتقة (31) بالنسبة للمعلمة (α) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\alpha} \qquad (49)$$

ايجاد المشتقة (31) بالنسبة للمعلمة(γ) نحصل على

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\gamma\partial\beta}=\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\gamma} \qquad (50)$$

ايجاد المشتقة (32) بالنسبة للمعلمة (β) نحصل على

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial\beta\partial\beta}=\sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\Bigg(\Bigg(&\frac{2\alpha\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{3\alpha\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\\
&-\frac{3\alpha^2\mathcal{P}}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)^2e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\\
&-\frac{2\alpha^2\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}(\alpha-1)\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\alpha^3\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\\
&+\frac{2\alpha^2\mathcal{P}}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^2}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}ln\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\\
&+\frac{\alpha\mathcal{P}}{\beta^3}\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha-1}\left(\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}\right)^2e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\Bigg)\Bigg/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)\Bigg)\\
&-\Bigg(\left(\frac{\mathcal{P}}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}+\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}(\alpha-1)e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{\mathcal{P}\alpha^2}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}\right)\\
&\Bigg/\left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi}{\beta}\right)^{\alpha}}-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi}{\lambda}}\right)^2\Bigg)\Bigg\} \qquad (51)\end{aligned}$$

ايجاد المشتقة (33) بالنسبة للمعلمة (λ) نحصل على

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial\lambda\partial\lambda} = \sum_{i=1}^{n}\Bigg\{\Bigg(\Bigg(-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{2}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma^2+\frac{2(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{2}}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma + \frac{2(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{3}}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{4}}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i^2 e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\Bigg) / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)\Bigg) - \left(-\frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\gamma + \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}\lambda^{2}}\chi_i{}^{\gamma-1}\chi_i e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)^2 / \left(\frac{\mathcal{P}\alpha}{\beta^{\alpha}}\chi_i{}^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{\chi_i}{\beta}\right)^{\alpha}} - \frac{(1-\mathcal{P})}{\Gamma(\gamma)\lambda^{\gamma}}\chi_i{}^{\gamma-1}e^{-\frac{\chi_i}{\lambda}}\right)^2\Bigg\} \quad (53)$$

ولايجاد تقدير المعلمات يتم بتعويض المعادلات *(28-53)* في المعادلة حيث يتم تدويرها عدد من المرات الى ان يكون الفرق بين القيمة المقدرة في الدورة *(t)* و قيمة في الدورة *(t+1)* اقل من (ε) (قيمة صغيرة جداً)

المحاكاة :

لقد استعملت المحاكاة(Simulation) للحصول على بيانات تتبع التوزيع الهجين ويبل كاماثم تم تقدير المعلمات بطريقة الترجيح الاعظم(MLM)وللحصول على الحل لمجموعة المعادلات غير الخطية الناتجة من استخدام طريقة الترجيح الاعظم (MLM) استخدمت خوارزمية تعظيم التوقع وخوارزمية نيوتن رافسن وادناه وصف لخطوات تجربة المحاكاة ونتائج الافظلية لكل اسلوب اعتماد على بعض المقاييس الاحصائية.

اعتمدت المحاكاة لغرض المقارنة بين الخوارزميات المستخدمة للحصول على مقدرات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD) وكذالك لتوضيح تاثير الخوارزميات تجاه مايلي:

1- التغير في حجم العينة (Sample Size)

2- التغير معلمة الشكل لتوزيع ويبل (WD) واوزيع كاما (GD)

1-حجم العينة (Sample Size)

اختيرت عدد من القيم الافتراضية لاحجام العينات و كما يلي:

1- حجم العينة صغير $(n = 50)$.

2- حجم العينة متوسطة$(n = 100)$.

3- حجم العينة كبير $(n = 500)$

ان حجم العينة الجزئي$(n_j; j = 1; 2)$ يحدد اعتمادا على حجم العينة الكلية(n) و معلمة نسبة الخلط.

2-معلمة نسبة الخلط

اختيرت قيمة افتراضية لمعلمة نسبة الخلط $(\mathcal{P})$ و هي (0.25) ويوضح الجدول ادناه القيمة الافتراضية لاحجام العينات الكلية و الجزئية كما يلي

جدول (1)

القيمة الافتراضية لحجم العينة الكلية و الجزئية ونسبة الخلط

n	50	100	500
p	n_1		
.25	13	25	125

3- اختيار قيم افتراضية للمعلمات

اختيرت عدد من القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع الهجين ويبل كاما(HWGD)على اساس العلاقة بين معلمة الشكل لكل توزيع للمجتمعات الجزئية وكما موضح في مايلي:

1- معلمة الشكل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المجتمعات الجزئية متساوية (Equal)

2- معلمة الشكل لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيعات المجتمعات الجزئية غير متساوية (Notequal)

جدول (2)

قيم المعلمات الافتراضية للتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD) لتجربة المحاكاة.

Relation				
Greater than	10.00	4.00	25.00	100.00
Equal	.002	.002	.008	.003

4-توليد البيانات

للحصول على مشاهدات لتوزيع الهجين ويبل بقيم المعلمات الافتراضية المذكورة في الجدول(2) استخدم اسلوب المحاكاة مونت كارلو للحصول على البيانات وقد كررت كل تجربة (2000) مرة للحصول على التجانس المطلوب ،حيث نفذت هذه التجارب باستخدام لغة البرمجة (Matlab) و في ما يلي وصف لخطوات تجارب المحاكاة:[2]

- تم توليد متغيرات تتبع توزيع منتظم $u_1 \sim U(0,1)$ ، $u_2 \sim U(0,1)$ بالاستعانة بالايعاز .Rand
- في حالة ان $u_1<p$ يتم توليد بيانات تتبع توزيع ويبل بمعلمتين(WD) يمثل توزيع المجتمع الجزئي الاول بتطبيق خوارزميةالتحويل المعكوس و باستخدام الصيغة

$$w_{1j} = \beta_1\left(-Ln\left(-u_{2j}\right)\right)^{1/\alpha_1}$$

- في حالة $u_1>p$ يتم توليد بيانات تتبع توزيع كاما(GD) يمثل توزيع المجتمع الجزئي الثاني بتطبيق خوارزمية التحويل المعكوس و باستخدام الصيغة

$$w_{2j} = \sum_{i=1}^{a_2} -\beta_2 u_{2i}$$

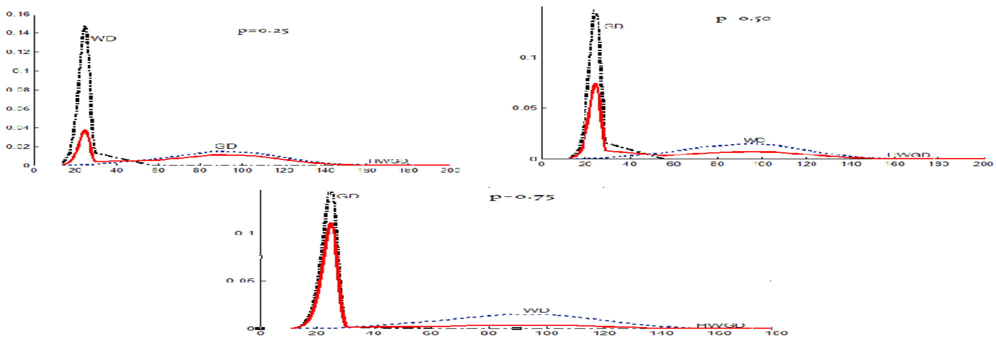
المقارنة بين الخوارزميات المستخدمة لايجاد مقدرات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما

تم استخدام معيار متوسط مربع الخطاء (MSE) للمقارنة بين مقدرات خوارزمية تعظيم التوقع وخوارزمية نيوتن رافسن ،يقس هذا المعيار متوسط مربع المسافة بين القيمة الحقيقية و القيمة التقديرية و تكون طريقة التقدير افضل كلما كان هذا المقياس اقل و الصيغة لهذا المقياس هي

$$MSE(\hat{\theta}_i)=\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}(\hat{\theta}_i-\theta)^2 \quad (4-3)$$

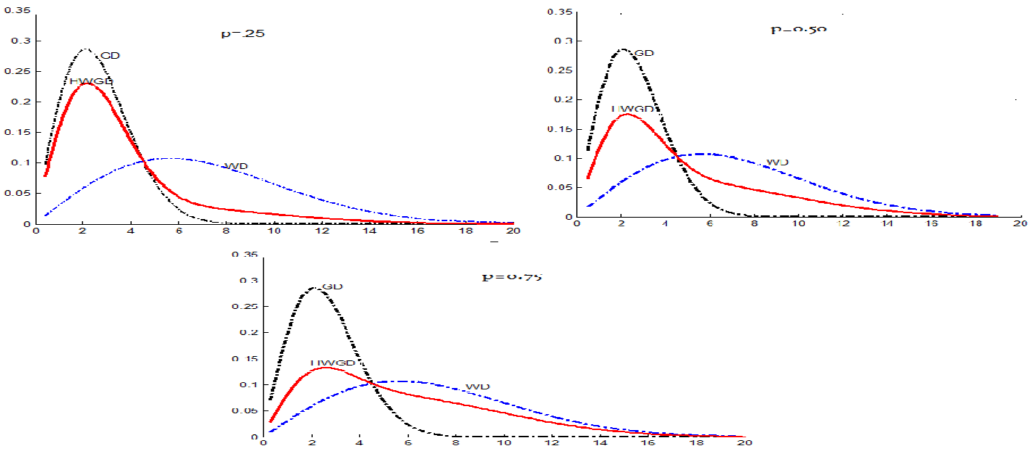
اذ ان R(Replication) تمثل عدد التكرارات لكل تجربة و الذي كان مساوي الى (2000)

1-الحالة الاولى (معلمة الشكل غير متساوية):- في هذه الحالة افترض ان المجتمع غير متجانسة بحيث تم تجميع المشاهدات المتجانسة في مجموعتين كل مجموعة لها توزيع احتمالي بـ دالة كثافة احتمالية مختلفة المجتمع الجزئي الاول (SP_1) له توزيع احتمالي بـ دالة كثافة احتمالية توافق توزيع ويبل (WD) اما المجتمع الجزئي الثاني (SP_2) لها توزيع احتمالية بـ دالة كثافة احتمالية على وفق توزيع كاما (GD) وبقيمة افتراضية للمعلمات $(\alpha=10;\gamma=4;\beta=25;\lambda=100;\mathcal{P}=0.25)$



منحنات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما للعينة الكلية وتوزيع ويبل للمجتمع (3)شكل الجزئي الاول وتوزيع كاما للمجتمع الجزئي الثاني بالمعلمات $(\alpha=10;\gamma=4;\beta=25;\lambda=100)$ ومعلمة نسبة خلط بالقيمة (0.25;0.50;0.75)

2-الحالة الثانية (معلمة الشكل متساوية):- في هذه الحالة افترض ان المجتمع غير متجانسة بحيث تم تجميع المشاهدات المتجانسة في مجموعتين كل مجموعة لها توزيع احتمالي بـ دالة كثافة احتمالية مختلفة المجتمع الجزئي الاول (SP_1) له توزيع احتمالي بـ دالة كثافة احتمالية توافق توزيع ويبل (WD) اما المجتمع الجزئي الثاني (SP_2) لها توزيع احتمالية بـ دالة كثافة احتمالية على وفق توزيع كاما (GD) وبقيمة افتراضية للمعلمات $(\alpha=2;\gamma=2;\beta=8;\lambda=3;\mathcal{P}=0.25$



منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما للعينة الكلية وتوزيع ويبل للمجتمع (4)شكل ومعلمة $(\alpha = 2; \gamma = 2; \beta = 8; \lambda = 3)$الجزئي الاول وتوزيع كاما للمجتمع الجزئي الثاني بالمعلمات (0.25:0.50:0.75)نسبة خلط بالقيمة

يظهر الجدول (3) نتائج محاكاة تقديرات التوزيع الهجين باستخدام خوارزمية تعظيم التوقع (EM) وخوارزمية نيوتن رافسن (NR)الحالة الاولى (معلمة الشكل للمجتمع الجزئي الاول اكبر من معلمة الشكل للمجتمع الجزئي الثاني) ، اما الجدول (4) فيظهر نتائج محاكاة تقديرات التوزيع الهجين في الحالة الثانية (معلمة الشكل للمجتمع الجزئي الاول تساوي من معلمة الشكل للمجتمع الجزئي الثاني) حيث نستنتج الاتي

1- عند حجم عينة (n=50) تكون قيمة معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) لخوارزمية نيوتن رافسون (NR) اقل من قيمة المقابل لها لخوارزمية (EM) اي ان خورزمية نيوتن رافسن تكون افضل من خوارزمية تعظيم التوقع.
2- عند حجم عينة (n=200) تكون قيمة معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) لخوارزمية نيوتن رافسون (NR) اكبر من قيمة المقابل لها لخوارزمية (EM) اي ان خورزمية تعظيم التوقع تكون افضل من خوارزمية نيوتن رافسون.
3- عند حجم عينة (n=100) تكون قيم معيار متوسط مربع الخطأ (MSE) لخوارزمية نيوتن رافسن وخوارزمية تعظيم التوقع متقاربة وفي هذه الحالة لم تحقق اي من الخورزميات افظلية.

جدول (3)

يوضح ملخص نتائج تقدير المحاكاة لتقدير معلمات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما(HWGD)الحالة الاولى

N	Algorithm		α1	α2	β1	β2	P
		True V.	.0010	4.00	25.00	100.00	0.25
50	NR	Estimate	10.35205	3.59940	23.8936	98.09525	0.23014
		MSE	20.18704	0.16471	3.39079	18.67760	0.20262
	EM	Estimate	6.35722	3.40523	24.2604	107.4795	0.24863
		MSE	46.55918	1.6078	1.80547	19.53403	0.3128
100	NR	Estimate	10.20387	3.81896	23.90456	99.6892	0.24517
		MSE	6.94457	0.24086	3.27000	3.21027	0.00183
	EM	Estimate	.181538	3.70613	24.36877	102.1056	0.24064
		MSE	51549.6	0.33381	1.34002	2.85038	0.00113
200	NR	Estimate	.1356321	4.12949	23.74117	99.81170	0.24009
		MSE	41.81865	0.10794	1.02761	1.40652	0.00192
	EM	Estimate	.829219	4.00580	24.60533	100.1554	0.24464
		MSE	20.31890	0.00817	0.80810	0.11146	0.00086

جدول (4)

يوضح ملخص نتائج تقدير المحاكاة لتقدير معلمات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما(HWGD)الحالة الثانية

N	Algorithm		α1	α2	β1	β2	P
		True V.	2.00	2.00	8.00	3.00	0.25
50	NR	Estimate	10.44355	3.72091	24.14939	97.10293	0.2367
		MSE	21.36260	0.07492	4.02337	18.22889	0.14678
	EM	Estimate	6.83899	3.21636	23.14565	13.11431	0.2234
		MSE	48.39727	1.54849	6.81536	20.3073	0.3855
100	NR	Estimate	12.51207	4.03241	24.9394	101.2164	0.24566
		MSE	49.80415	0.05290	2.77403	16.9264	0.04662
	EM	Estimate	8.08967	3.8538	24.77510	101.81758	0.24646
		MSE	46.63780	0.43631	3.73308	16.27311	0.00966
200	NR	Estimate	11.15724	4.18924	24.7942	101.20698	0.23065
		MSE	29.29133	0.91665	0.50637	8.79960	0.04564
	EM	Estimate	9.08967	4.01380	24.07510	100.8175	0.24946
		MSE	26.63780	0.00363	1.73308	4.27311	0.00966

الاستنتاجات

من خلال نتائج المحاكاة نستنتج الاتي:

1- ان خوارزمية نيوتن رافسن تكون اكثر كفائة من خوارزمية تعظيم التوقع لحساب تقديرات معلمات التوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD) كلما كان حجم العينة صغير، في حين تحقق خوارزمية تعظيم التوقع افظلية في حالة احجام العينة الكبيرة.

2- لا يؤثر العلاقة بين معلمات الشكل في التوزيعات المختلطة للمجتمعات الجزئية (توزيع ويبل وتوزيع كاما) على نتائج التقدير للمعلمات.

التوصيات

من خلال الاستنتاجات اعلاه نوصي بالاتي.

1- ايجاد تقديرات معلمات دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الهجين ويبل كاما (HWGD) باستخدام خوارزميات لم تناقش في هذا البحث مثل خوارزمية (Scoring) .

2- استخدام خوارزمية نيوتن رافسن(NR) وخوارزمية (EM) لايجاد تقديرات طريقة الترجيح للدوال الكثافة الاحتمالية لتوزيعات مختلطة اخرى .

المصادر العربية

1. الامي، كاظم محمد حسين (1985) *"مقدمة في التحليل العددي"* وزارة التعليم العالي و البحث العلمي- جامعة البصرة.
2. الطائي، خالد ضاري " مقارنة طرائق توليد كلا من بيانات توزيع كاما وتوزيع بيتا" مجلة العلوم الاقتصادية والادارية ،المجلد (19) ، العدد (72) ص ص 214-242.
3. جليل، طالب جليل، هيفاء عبد الجواد سعيد (2007) *" التقدير و التنبؤ في التوزيع الطبيعي المبتور "* المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ،العدد،12، ص ص (114-124).
4. حسين ، انعام عبود (2010) *تحليل البيانات غير التامة لنماذج الانحدار المتعدد باستخدام الخوارزميات ECME، ECM , EM مع تطبيق عملي"* رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية الادارة و الاقتصاد- جامعة بغداد.
5. سعيد ، هيفاء عبد الجواد (2005) *تقدير معلمات التوزيعات المختلطة وتطبيقاتها على البيانات* حديثي *الولادة في محافظة نينوى"* اطروحة دكتوراه غير منشورة ،كلية العلوم و الحاسبات والرياضيات ، جامعة الموصل.

6. Armitage ,P. and Colton , T. (1998) " Optimization and Nonlinear Equations" John Wily & Sons. Ltd. Chichester
7. Burden , L.R. and Faires , J.D. (2011) "Numerical Analysis" Ninth Edition, Molly Taylor, Canada
8. Corduneanu, A. and Bishop, C.M. (2001) " Variation Bayesian Model Selection for Mixture Distribution" Biometrics, Vol.22.pp, 566-572.
9. Jolevska, B.T. and Jolevski, I. (2013) "Some results on the Digamma Function" Appl. Math.Inf.SCi.7.No.1.pp.167-170.
10. Mclachlan, G.J. (2007) "The EM. Algorithm and Extensions" Second Edition , A John Wiley and Sonc, INC, Publication.
11. Nocedal ,J. and Wright , J.S. (2006) "Numerical Optimization" Second Edition, Springer.
12. Paloschi ,J.R. and Perkin, J.D (1988) " AN Implementation of Quasi-Newton Methods for Solving sets of Nonlinear Equation"Comput. Chem. Engng. Vol.12.No.8.pp.767-776
13. Titterngton, D.M. et.al (1985) " A statistical Analysis of Finite Mixture Distributions " John Wiley & Sons.