نظرة في العلاقة بين توزيع عملية ARMA(p,q) وتوزيع بواقيها

أ.د. صلاح حمزة عبد
كلية الادارة

I - المقدمة

يعتبر النموذج الخليط للانحدار الذاتي (Autoregressive) من الدرجة p والمتوسطات المتحركة (Moving Average) من الدرجة q ، والذي يرمز له اختصارا" بالشكل ARMA(p,q) ، احد اكثر نماذج السلاسل الزمنية استخداما" في التطبيقات العملية ، إذ لو خضعت له السلسلة الزمنية X_t , $(t=0,\pm1,\pm2,...)$ ، لكانت صيغته بالشكل ،

$$\sum_{k=0}^{p}\phi_k\, X_{t-k}=\sum_{k=0}^{q}\theta_k\, a_{t-k}=\left(\sum_{k=0}^{q}\theta_k\, B^k\right)a_t \qquad ----(1)$$

حيث إن $\phi_0=\theta_0=1$ وان $B^m a_t=a_{t-m}$ ، لكل عدد صحيح مثل m ، وان a_t يمثل متغير البواقي الذي يختلف توزيعه باختلاف الظاهرة المدروسة المتمثلة بالسلسلة X_t . فاذا افترضنا ان $r_1,r_2,...,r_q$ تمثل جذور المعادلة $\sum_{k=0}^{q}\theta_k\, B^k=0$ فانه يمكن كتابة المعادلة (١) لتكون :

$$a_t=\frac{\sum_{k=0}^{p}\phi_k\, X_{t-k}}{\prod_{j=1}^{q}(B-r_j)} \qquad ----(2)$$

إن النموذج أعلاه قد اخذ حيزا" كبيرا" من اهتمام الباحثين منذ الخمسينات من القرن المنصرم حتى وقتنا الراهن ، ولذلك سنحاول هنا حصر أدبيات الموضوع بالبحوث الحديثة التي لها صلة وطيدة بالموضوع فقط .

إن أول من اهتم بموضوع إيجاد توزيع لعملية تخضع لنموذج سلاسل زمنية ، هو الباحث Andel وذلك في بحثه الذي ألقاه في مؤتمر الأكاديمية الجيكيه للعلوم عام ١٩٨٢ ، فقد استطاع تمثيل الدالة المميزة لعملية انحدار ذاتي من الدرجة الأولى $\Phi_x(u)$ بدلالة الدالة المميزة لمتغير البواقي فيها $\Phi_a(u)$ ، بالشكل التالي :

$$\Phi_x(u)=\prod_{j=0}^{\infty}\Phi_a(u\ r_1^{\,j}) \qquad ----(3)$$

بعد أن مثل تلك العملية بدلالة بواقيها ، بالشكل :

$$X_t=\sum_{j=0}^{\infty} r_1^{\,j}\ a_{t-j} \qquad ----(4)$$

أما في عام ١٩٨٤ ، فقد تصدى الباحث Priestley لنفس المسألة التي اهتم بها سلفه Andel ، ولكن لعملية انحدار ذاتي من الدرجة الثانية ، فتوصل إلى تمثيل للدالة المميزة لتلك العملية بدلالة الدالة المميزة لبواقيها ، بالشكل :

$$\Phi_x(u)=\prod\Phi_a\left[u\left(\frac{r_1^{\,j+1}-r_2^{\,j+1}}{r_1-r_2}\right)\right] \qquad ----(5)$$

بعد أن مثل تلك العملية بدلالة بواقيها ، على النحو التالي :

$$X_t=\frac{1}{r_1-r_2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(r_1^{\,j+1}-r_2^{\,j+1}\right)a_{t-j} \qquad ----(6)$$

لقد اخذ التوزيع الطبيعي قدرا" ليس بيسير من اهتمام الباحثين، فافترضوه توزيعا" للبواقي في اغلب النماذج التي تصف الظواهر والمسائل قيد اهتمامهم لان هذا الافتراض يسهل العمل كثيرا" ، كون التوزيع الطبيعي احد المرتكزات القوية في النظرية الإحصائية لأنه يعطي معايير محددة لشقي تلك النظرية ، التقدير والاختبار .

ان كثرة واتساع التطبيقات العملية التي لا يخضع متغير البواقي فيها للتوزيع الطبيعي قد كانت السبب الرئيسي وراء اندفاع الباحثين باتجاه فهم سلوك الظواهر والمسائل محور تلك التطبيقات وكيفية تحليلها ، فأتجه بعضهم للبحث في الحصانة (Robustness) ، ومنهم من ذهب للبحث في الطرق اللامعلمية (Nonparametric) ، ومنهم من ذهب الى الاساس النظري وحاول ان يغيره ليرى مالذي سيحصل ، وما النتائج التي سيجنيها ؟! .

ان من ابرز الباحثين اللذين اهتموا بدراسة سلوك عملية انحدار ذاتي مستقرة ومن الدرجة الاولى ، يخضع متغير البواقي فيها لعمليتي كاما ووبل ، هو الباحث Sim عام ١٩٨٦ ، ليتبع ذلك ببحث حول نفس العملية ، AR(1) ، عام ١٩٩٠ ، ولكن عند خضوع متغير البواقي فيها لعمليتي كاما و الاسي ، ثلاثية المعلمات هذه المره ، واشتق في كلا بحثيه صيغة نظرية لدالة الارتباط الذاتي لعملية AR(1) تحت الفروض التي استخدمها ، كما توصل الى ان اسلوب المربعات الصغرى الشرطية CLS هو افضل من اسلوب الامكان الاعظم في تقدير معلمات الانموذج . اما في عام ١٩٩٢ ،فقد استثمرت الباحثة المرزوك ماتوصل له Andel عام ١٩٨٢ لتستخدم تحويل لابلاس بهدف التوصل لصيغة تحدد من خلالها توزيع بواقي سلسله مستقره تخضع لنموذج انحدار ذاتي من الدرجة الاولى . وفي عام ١٩٩٣ درس الباحثان Al-zaid و Al-osh خصائص انموذج ARMA(p,p-1) يخضع لعملية بواسون المعممة (Generalized Poisson) من حيث التوزيع المشترك والانعكاسية في الزمن وسلوك الانحدار . وفي نفس السنة عاد الباحث Sim مرة" اخرى

ليدرس عزوم سلسلة زمنية تخضع لنموذج AR(1) ، ولكن ببواقي تخضع للنموذج اللوجستي ، كما درس هيكلية الارتباطات الذاتية للعملية . اما في عام ١٩٩٤ فقد افترض نفس الباحث بان بواقي عملية AR(1) تخضع لتوزيعات اللوجستي والقطع الزائد والقاطع وكاما والاسي ولابلاس ، والقى الضوء عما سيحدث عند تشخيص وتقدير النموذج الملائم للسلسلة على وفق تلك الفروض ، وكذلك عند اختبار ملائمة النموذج المقدر ، وطبق ماتوصل اليه على سلسلة مؤلفة من ٢٤٠ مشاهدة تمثل مستوى مياه نهر Mekong التايلندي الشهرية . وفي عام ١٩٩٥ ، قام الباحث الموسوي ، بدراسة التوزيع الحر لعملية انحدار ذاتي من الدرجة الثانية ، مستفيدا" مما قدمه Priestley عام ١٩٨٤ ، كما وعرض بعض الجوانب التجريبية مستخدما" معايير مختلفة ، ابرزها الكفاءة النسبية ، للمقارنة بين الاحصاءات التي استخدمها ، وطبق ماتوصل اليه على سلسلة مبيعات قطرات السعال في العراق التي ذكر بانها تخضع للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي . اما في عام ١٩٩٧ فقد قام كل من Al- nachawati و Al- wasel و Al-zaid باستخدام المحاكاة لمقارنة طريقتين لتقدير معلمات انموذج انحدار ذاتي من الدرجة الاولى يخضع لعملية بواسون المعممة ، الا وهما طريقتي الامكان الاعظم و يل - ولكر، فتوصل هؤلاء الباحثين الى ان قيمة معلمة بواسون المعممة λ تلعب دورا" كبيرا" في افضلية احدى الطريقتين على الاخرى جنبا" الى جنب مع حجم العينة ، وقد طبقوا ماتوصلوا اليه من نتائج على بيانات تمثل عدد الاخطاء في نظام حاسبة الكترونيه . وفي عام ١٩٩٨ ، قام نفس الباحثين باستخدام المحاكاة لمقارنة اربع طرق لتقدير معلمات انموذج انحدار ذاتي من الدرجة الاولى يخضع لعملية ذي الحدين ، الا وهي طرق يل - ولكر والمربعات الصغرى الشرطية والامكان الاعظم وطريقة العزوم ، فتوصلوا الى عدة استنتاجات تبين افضلية طريقه على اخرى باختلاف حجوم العينات واقيام معلمات عملية ذي الحدين . وفي عام ٢٠٠٠ قامت الباحثه الخفاجي بدراسة بعض الخصائص الاحتمالية لعملية متوسطات متحركة من الدرجة الاولى ، طبيعية وغير طبيعية ، وذلك باستخدام المحاكاة . وفي نفس العام قدم الباحث عبد بحثا" للمؤتمر القطري الاول لعلوم الاحصاء توصل فيه الى ايجاد صيغة عامه لتمثيل الدالة المميزه لعملية الانحدار الذاتي من الدرجة p بدلالة الدالة المميزه لبواقيها . اما في عام ٢٠٠٢ ، فقد قدم كل من الناصر والعزاوي بحثا" للمؤتمر العلمي الثالث عشر للجمعيه العراقيه للعلوم الاحصائيه تناولا فيه استخراج التوزيع الحدي لعملية ARMA(1,1) عند خضوع بواقيها لتوزيعات كوشي ، الطبيعي وذي الحدين حيث توصلا نظريا" الى ان العملية التي تخضع بواقيها لتوزيعي كوشي والطبيعي ، تخضع هي بدورها لهذين التوزيعين على التوالي ولكن بمعلمات اخرى مختلفه حدداها ، كما استنتجا اعتمادا" على تجربة محاكاة بخضوع العملية التي تخضع بواقيها لتوزيع ذي الحدين ، لذات التوزيع ، ولكن بمعلمات مختلفة . اما في نهاية عام ٢٠٠٣ فقد عاد الباحث عبد مرة" اخرى ليعمم صيغة نظرية على درجة كبيرة من الاهمية حدد من خلالها الدالة المميزة وبالتالي توزيع العملية ARMA(p,q) ، استنادا" على الدالة المميزة لبواقي تلك العملية . وفي عام ٢٠٠٤ عاد الباحث الناصر مرة" اخرى ولكن هذه المرة مع الباحث عبدالله ، ليحتسبا عزوم العملية ARMA(1,q) ، وذلك عند خضوع بواقي تلك العملية لاي توزيع سواء اكان طبيعيا" ام غير ذلك .

II - أهمية وهدف البحث

لاحظنا مما سبق وتم عرضه من أدبيات ، إن الاهتمام فيها منصب على توزيع العملية التي تخضع لها السلسلة الزمنية وما يرتبط بها من سلوك وعزوم ودوال مولدة للعزوم ودالة مميزة ، إذا ما علم توزيع بواقي تلك العملية .

إن نظرة موضوعية للأمر تبين لنا إن ما ذهب إليه الباحثين أعلاه هو محض افتراضات غير واردة عمليا" بالمرة، لان المشاهد فعلا" هي السلسلة الزمنية قيد التمحيص وليس بواقيها ، بمعنى إن ما بين يدي الباحث هي السلسلة الزمنية ، التي من خلال اقيامها يستطيع استكشاف نمط وبالتالي توزيع العملية التي تخضع لها ، من خلال الطرق الإحصائية التي تهتم بهذا الجانب . عليه لربما يكون من المنطقي أكثر إن نحدد توزيعا" لبواقي العملية التي تخضع لها السلسلة استنادا" إلى توزيع تلك العملية ، وليس العكس .

مما ورد أعلاه يتبين بعضٌ من أهمية هذا البحث ، أما هدف البحث فمبنيٌ على ما لتلك الأهمية من قيمة ، فجاء متمثلا" ، بإيجاد صيغة عامة لتمثيل بواقي عملية ARMA(p,q) بدلالة العملية نفسها تمهيدا" لكتابة الدالة المميزة لبواقي العملية بدلالة الدالة المميزة للعملية نفسها .

إن هناك بقية باقية لاهمية هذا البحث يمكن اجمالها بالنقاط الثلاثة التالية ،

١- من المعلوم ان الدالة المميزة ترتبط بتوزيع احتمالي وحيد والعكس صحيح ، فكل توزيع احتمالي يرتبط بدالة مميزة وحيدة ، فلو تمكنا من استخراج الدالة المميزة للسلسلة الزمنية لاستطعنا تحديد التوزيع الاحتمالي الذي تسلك على وفقه ، مما يعني امكانية وصف سلوك تلك السلسلة واستخراج عزومها وملاحظة خصائص ومؤشرات اخرى ترتبط بها ، الامر الذي يجعل تحليل هذا السلوك اكثر يسرا" وفائدة" سواء في جانب التقدير او في جانب الاختبار .

٢- ربما ستكون الجوانب النظرية التي سترد في هذا البحث اسسا" لبحوث اخرى قادمة تستند عليه او تستخدمه ، خصوصا" وان حيز الدراسة هنا يتمثل بعملية ARMA(p,q) بشكل عام وليس حالة خاصة منها ، الامر الذي لم تتطرق له دراسات سابقة على حد علمنا مطلقا" .

٣- إن الحاجة لتحديد توزيع لبواقي العملية ARMA(p,q) استنادا" على توزيع العملية ذاتها هي من الاهمية بمكان كبير اذ إن هناك بعض طرق التقدير كطريقة الامكان الأعظم وبعض الاختبارات كأختباري Box و pierce عام ١٩٧٢ و Ljung و Box عام ١٩٧٨ لقصور الملائمة ، على سبيل المثال لا الحصر ، تستند على توزيع البواقي في صلب اسس عملها بدءا" من صياغة احصاءتها مرورا" بتحديد توزيع لتلك الاحصاءة ومن ثم بما يروم الباحث من تلك الاحصاءة في النهاية تقديرا" ام اختبارا" .

III - تمثيل بواقي العملية ARMA(p,q) بدلالة العملية ذاتها

سنقدم في هذه الفقرة اسلوبا" لتمثيل بواقي العملية ARMA(j ,q) ، j = 1,2,3,4 بدلالة العملية ذاتها ، بالتفصيل ، تمهيدا" لتعميم الحالة الى الدرجة j = p ، أي للعملية ARMA(p,q) ، وكما يلي :

a- تمثيل بواقي العملية ARMA(p,1) بدلالة العملية ذاتها

بوضع q=1 في المعادلة (٢) فأن ،

$$a_t = \frac{\sum_{k=0}^{p} \phi_k X_{t-k}}{B - r_1} \qquad ----(7)$$

فيمكن كتابة :

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{1}{B}\left(1 + \frac{r_1}{B} + \frac{r_1^2}{B^2} + \dots\right)\sum_{k=0}^{p} \phi_k X_{t-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \left(F + r_1 F^2 + r_1^2 F^3 + \dots\right) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \left(X_{t-k+1} + r_1 X_{t-k+2} + r_1^2 X_{t-k+3} + \dots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \sum_{j=0}^{\infty} r_1^j X_{t-k+j+1} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \sum_{j=0}^{\infty} \phi_k r_1^j X_{t-k+j+1} \qquad , \ \phi_0 = 1 \qquad , \qquad ----(8) \end{aligned}$$

b- تمثيل بواقي العملية ARMA(p,2) بدلالة العملية ذاتها

بوضع q=2 في المعادلة (٢) فأن ،

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{\sum_{k=0}^{p} \phi_k X_{t-k}}{(B - r_1)(B - r_2)} \qquad ----(9) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \left(\frac{1}{(B - r_1)(B - r_2)}\right) X_{t-k} \end{aligned}$$

فنحصل على :

$$\begin{aligned} a_t &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_1 - r_2}\left(\frac{1}{B\left(1 - \frac{r_1}{B}\right)} - \frac{1}{B\left(1 - \frac{r_2}{B}\right)}\right) X_{t-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_1 - r_2} . \frac{1}{B}\left(1 + \frac{r_1}{B} + \frac{r_1^2}{B^2} + \dots - \left(1 + \frac{r_2}{B} + \frac{r_2^2}{B^2} + \dots\right)\right) a_{t-k} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_1 - r_2} \cdot \frac{1}{B} \left\{ \frac{r_1 - r_2}{B} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{B^2} + \frac{r_1^3 - r_2^3}{B^3} + \dots \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_1 - r_2} \left\{ F^2 (r_1 - r_2) + F^3 (r_1^2 - r_2^2) + F^4 (r_1^3 - r_2^3) + \dots \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_1 - r_2} \sum_{j=0}^{\infty} (r_1^{j+1} - r_2^{j+1}) X_{t-k+2+j} \quad , \quad \phi_0 = 1 \quad , \quad ----(10)$$

c- تمثيل بواقي العملية ARMA(p,3) بدلالة العملية ذاتها

بوضع q=3 في المعادلة (٢) فأن ،

$$a_t = \frac{\sum_{k=0}^{p} \phi_k X_{t-k}}{(B - r_1)(B - r_2)(B - r_3)} \quad ----(11)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \frac{\left(\frac{1}{B - r_2} - \frac{1}{B - r_3} \right)}{(B - r_1)(r_2 - r_3)} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \frac{1}{r_2 - r_3} \left(\frac{1}{(B - r_1)(B - r_2)} - \frac{1}{(B - r_1)(B - r_3)} \right) X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \frac{1}{r_2 - r_3} \left\{ \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{1}{B - r_1} - \frac{1}{B - r_2} \right) - \frac{1}{r_1 - r_3} \left(\frac{1}{B - r_1} - \frac{1}{B - r_3} \right) \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{(r_2 - r_3)B} \left\{ \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1}{B} + \frac{r_1^2}{B^2} + \dots - \frac{r_2}{B} - \frac{r_2^2}{B^2} - \dots \right) - \frac{1}{r_1 - r_3} \left(\frac{r_1}{B} + \frac{r_1^2}{B^2} + \dots - \frac{r_3}{B} - \frac{r_3^2}{B^2} - \dots \right) \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{(r_2 - r_3)B} \left\{ \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{r_1 - r_2}{B} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{B^2} + \dots \right) - \frac{1}{r_1 - r_3} \left(\frac{r_1 - r_3}{B} + \frac{r_1^2 - r_3^2}{B^2} + \dots \right) \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \frac{\phi_k}{r_2 - r_3} \left\{ \left(\frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 - r_2} - \frac{r_1^2 - r_3^2}{r_1 - r_3} \right) B^{-3} + \left(\frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1 - r_2} - \frac{r_1^3 - r_3^3}{r_1 - r_3} \right) B^{-4} + \dots \right\} X_{t-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \frac{\theta_k}{r_2 - r_3} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{r_1^{j+2} - r_2^{j+2}}{r_1 - r_2} - \frac{r_1^{j+2} - r_3^{j+2}}{r_1 - r_3} \right) a_{t-j-k} \right\} \quad , \ \theta_0 = 1 \ , \ ----(12)$$

$$a_t = \frac{\sum_{k=0}^{p} \phi_k \, X_{t-k}}{(B-r_1)(B-r_2)(B-r_3)(B-r_4)} \qquad ----(13)$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \frac{\left(\frac{1}{F-r_3} - \frac{1}{F-r_4}\right) X_{t-k}}{(B-r_1)(B-r_2)(r_3-r_4)}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \phi_k \frac{1}{(B-r_1)(r_3-r_4)} \left(\frac{1}{(B-r_2)(B-r_3)} - \frac{1}{(B-r_2)(B-r_4)} \right) X_{t-k}$$

V - تمثيل الدالة المميزة لبواقي عملية ARMA(p,q) بدلالة الدالة المميزة للعملية ذاتها

بناء" على الصيغة العامة لتمثيل بواقي العملية ARMA(p,q) بدلالة العملية ذاتها ، التي تم التوصل اليها في الفقرة السابقة ، والواردة في المعادلة (١٥) ، فانه يمكن تمثيل الدالة المميزة لبواقي تلك العملية بدلالة الدالة المميزة للعملية ذاتها ، وعلى النحو التالي :

$$\Psi_a(u) = E \, \exp\{i u \, a_t\}$$

$$= E \, \exp\left\{ iu \left(\sum_{k=0}^{p} \phi_k \sum_{j=0}^{\infty} \xi_p(j+q-1, r_1, r_2, ..., r_q) \right) X_{t+j-k+q} \right\}$$

$$= \prod_{k=0}^{p} \prod_{j=0}^{\infty} E \, \exp\{iu \phi_k \xi_q(j+q-1, r_1, r_2, ..., r_q)\} a_{t+j-k+q}$$

$$= \begin{cases} \prod_{k=0}^{p} \prod_{j=0}^{\infty} \Psi_X(u \phi_k \xi_q(j+q-1, r_1, ..., r_q)) & , \quad q = 2,3,... \\ \prod_{k=0}^{p} \prod_{j=0}^{\infty} \Psi_X(u \phi_k r_1^{\,j}) & , \quad q = 1 \end{cases} \qquad ----(21)$$

ولغرض إبراز الفائدة التطبيقية لهذا البحث ، لنفترض بعض التوزيعات الشائعة للسلسلة الزمنية ،

a- عند خضوع السلسلة الزمنية التي تسلك على وفق عملية ARMA(p,q) ، للتوزيع الطبيعي ، بالدالة المميزة $\Psi_X(u)=\exp\{iu\mu-(u^2\sigma^2/2)\}$ ، فان الدالة المميزة لبواقي تلك السلسلة ستكون على وفق المعادلة (١٥) بالشكل :

$$\Psi_a(u)=\begin{cases}\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\{iu\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\mu-u^2\phi_k^2\sigma^2\xi_q^2(j+q-1,r_1,...,r_q)/2\} & ,q=2,3,...\\ \prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\{iu\phi_k r_1^j\mu-u^2\phi_k^2 r_1^{2j}\sigma^2/2\} & ,q=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\exp\left\{iu\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\xi_p(j+q-1,r_1,...,r_q)\right)\mu-\frac{u^2\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k^2\xi_p^2(j+q-1,r_1,...,r_q)\right\} & ,q=2,3,...\\ \exp\left\{iu\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k r_1^j-\frac{u^2\sigma^2}{2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k^2\, r_1^{2j}\right\} & ,q=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow X_t\approx\begin{cases}N\left(\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\xi_p(j+q-1,r_1,...,r_q),\sigma^2\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k^2\xi_p^2(j+q-1,r_1,...,r_q)\right) & ,q=2,3,...\\ N\left(\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k r_1^j,\sigma^2\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k^2\, r_1^{2j}\right) & ,p=1\end{cases}$$

----(22)

وكحالات خاصة فانه عند كون q=1 ، يكون توزيع البواقي a_t للسلسلة X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,1) هو الوارد في الصيغة اعلاه ، اما عند كون q=2 فان الدالة المميزة لبواقي السلسلة الزمنية X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,2) و تخضع للتوزيع الطبيعي بالمتوسط μ والتباين σ^2 ستكون :

$$\Psi_a(u)=\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\Psi_X\left(\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}u\right)$$

$$\Psi_a(u)=\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\left\{ i\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}u\phi_k\mu-\frac{\left(r_1^{j+1}-r_2^{j+1}\right)^2}{(r_1-r_2)^2}\frac{\sigma^2\phi_k^2u^2}{2}\right\}$$

$$=\exp\left\{ iu\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\phi_k-\frac{\sigma^2u^2}{2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right)^2\phi_k^2\right\}$$

$$\Rightarrow a_t\approx N\left\{\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\phi_k,\sigma^2\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right)^2\phi_k^2\right\}$$

وعلى وفق نفس الإجراء فان الدالة المميزة لبواقي السلسلة الزمنية X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,3) ، و تخضع للتوزيع الطبيعي بالمتوسط μ والتباين σ^2 ستكون :

$$\Psi_a(u)=\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\Psi_X\left(\frac{u\phi_k}{r_2-r_3}\left[\frac{r_1^{j+2}-r_2^{j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{j+2}-r_3^{j+2}}{r_1-r_3}\right]\right)$$

وان توزيع a_t سيكون عبارة عن التوزيع الطبيعي بالمتوسط :

$$\mu\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\phi_k}{r_2-r_3}\left(\frac{r_1^{j+2}-r_2^{j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{j+2}-r_3^{j+2}}{r_1-r_3}\right)$$

والتباين :

$$\sigma^2\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\phi_k^2}{(r_2-r_3)^2}\left(\frac{r_1^{j+2}-r_2^{j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{j+2}-r_3^{j+2}}{r_1-r_3}\right)^2$$

وهكذا نستمر لقيم q الأخرى .

b- عند خضوع السلسلة الزمنية التي تسلك على وفق عملية ARMA(p,q) ، لتوزيع كوشي ، بالمعلمتين d و m والدالة المميزة $\Psi_X(u)=\exp\{iud-m|u|\}$ ، فان الدالة المميزة لبواقي تلك السلسلة ستكون وعلى وفق المعادلة (٢١) بالشكل :

$$\Psi_a(u)=\begin{cases}\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\left(idu\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)-m\left|u\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right|\right), & q=2,3,...\\ \prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\left(idu\phi_k r_1^{\,j}-m\left|u\phi_k r_1^{\,j}\right|\right) & ,q=1\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \exp\left(iud\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\xi_p(j+q-1,r_1,...,r_q) - m|u|\sum_{k=0}^{q}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right| \right), q=2,3,... \\ \exp\left(iud\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k r_1^j - m|u|\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k r_1^j\right| \right) \qquad , q=1 \end{cases}$$

$$a_t \approx Cauchy\begin{cases} \left(d\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q),\ m\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right| \right), q=2,3,... \\ \left(d\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k r_1^j\ ,\ \sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k r_1^j\right| \right) \qquad , q=1 \end{cases}$$

$$----(23)$$

وكحالات خاصة فأنه عند q=1 ، يكون توزيع a_t للسلسلة التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,1) هو الوارد في الصيغة اعلاه ، اما عند كون q=2 فان الدالة المميزة لبواقي السلسلة الزمنية X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,2) ، و تخضع لتوزيع كوشي بالمعلمتين d و m ستكون عبارة عن :

$$\Psi_a(u) = \prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\Psi_X\left(\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}u\right)$$
$$= \exp\left\{ iud\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2} - m|u|\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right| \right\}$$

$$\Rightarrow a_t \approx Cauchy\left(d\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2},\ m\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right| \right)$$

وعلى وفق نفس الأجراء ، فأنه عند q=3 ، فان توزيع بواقي السلسلة X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,3) وببواقي تخضع لتوزيع كوشي بالمعلمتين d و m سيكون عبارة عن توزيع كوشي بالمعلمتين

$$d\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\phi_k}{r_2-r_3}\left(\frac{r_1^{\,j+2}-r_2^{\,j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{\,j+2}-r_3^{\,j+2}}{r_1-r_3}\right)$$

$$m\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{\phi_k}{r_2-r_3}\left(\frac{r_1^{\,j+2}-r_2^{\,j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{\,j+2}-r_3^{\,j+2}}{r_1-r_3}\right)\right|$$

وهكذا نستمر لقيم q الأخرى .

c- عند خضوع السلسلة الزمنية التي تسلك على وفق عملية ARMA(p,q) ، للتوزيع الطبيعي المعكوس (Inverse Gaussian)، بالمعلمة λ والدالة المميزة $\Psi_X(u)=\exp\{-(-2i\lambda u)^{1/2}\}$ ، فان الدالة المميزة لبواقي تلك السلسلة ستكون على وفق المعادلة (٢١) بالشكل :

$$\Psi_a(u)=\begin{cases}\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\left\{-\left(-2i\lambda u\,\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right)^{1/2}\right\} & ,\ q=2,3,...\\ \prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\left\{-\left(-2i\lambda u\,\phi_k r_1^{\,j}\right)^{1/2}\right\} & ,q=1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\exp\left\{-\left(-2i\lambda u\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right)^{1/2}\right\} & ,q=2,3,...\\ \exp\left\{-\left(-2i\lambda u\right)^{1/2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi_k r_1^{\,j}\right)^{1/2}\right\} & ,q=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a_t\approx IG\begin{cases}\lambda\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi_k\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q)\right)^{1/2}\right)^2 & ,\ q=2,3,...\\ \lambda\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi_k r_1^{\,j}\right)^{1/2}\right)^2 & ,\ q=1\end{cases}\qquad ----(24)$$

وكحالات خاصة فانه عند كون q=1 ، يكون توزيع البواقي a_t ، للسلسلة الزمنية X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,1) هو الوارد في الصيغة (١٨) اعلاه ، اما عند كون q=2 ، فان الدالة المميزة لبواقي السلسلة الزمنية X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,2) و تخضع للتوزيع الطبيعي المعكوس بالمعلمة λ ستكون :

$$\Psi_a(u)=\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\Psi_X\left(\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}u\right)$$
$$=\exp\left\{-(-2i\lambda u)^{1/2}\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right)^{1/2}\right\}$$

$$\Rightarrow a_t\approx IG\left(\lambda\left(\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\phi_k\frac{r_1^{j+1}-r_2^{j+1}}{r_1-r_2}\right]^{1/2}\right)^2\right)$$

وعلى وفق نفس الاجراء ، فانه عند q=3 فان توزيع بواقي السلسلة X_t التي تسلك على وفق العملية ARMA(p,3) و تخضع للتوزيع الطبيعي المعكوس بالمعلمة λ سيكون عبارة عن التوزيع الطبيعي المعكوس ايضا" ولكن بالمعلمة $\lambda\left\{\sum_{k=0}^{p}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{\phi_k}{r_2-r_3}\left(\frac{r_1^{j+2}-r_2^{j+2}}{r_1-r_2}-\frac{r_1^{j+2}-r_3^{j+2}}{r_1-r_3}\right)\right)^{1/2}\right\}^2$ ، وهكذا نستمر لقيم q الاخرى. .

d- عند خضوع السلسلة الزمنية التي تسلك على وفق عملية ARMA(p,q) ، لتوزيع بواسون ، بالمعلمة λ والدالة المميزة $\Psi_X(u)=\exp(\lambda(e^{iu}-1))$ ، فان الدالة المميزة لبواقي تلك السلسلة ستكون وعلى وفق المعادلة (٢١) بالشكل :

$$\Psi_a(u)=\begin{cases}\prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\{\lambda(\exp(iu\phi_k\,\xi_q(j+q-1,r_1,...,r_q))-1)\} & ,q=2,3,...\\ \prod_{k=0}^{p}\prod_{j=0}^{\infty}\exp\{\lambda(\exp(iu\phi_k\,r_1^{j})-1)\} & ,q=1\end{cases}\quad ----(25)$$

ان الدالة اعلاه لا تؤشر أي صيغة دالة مميزة لتوزيع معروف ، ولغرض ايجاد دالة كثافة احتمال a_t لمثل هذه الحالة واية حالة مماثلة ، فانه يمكن استخدام علاقة الوحدانية التي تربط الدالة المميزة بدالة الاحتمال التي تناظرها للوصول لتلك الدالة .

المصادر

١- الخفاجي ،كريمة عبد الكاظم (٢٠٠٠) " دراسة بعض الخصائص الاحتمالية لانموذج الوسط المتحرك من الدرجة الاولى (الطبيعي وغي الطبيعي) باستخدام المحاكاة " ، اطروحة دكتوراه- كلية الاداره والاقتصاد - جامعة بغداد .

٢- المرزوك ،عصرية ردام (١٩٩٢) "الانحدار الذاتي غير الطبيعي من الدرجة الاولى ،مع تطبيق عملي " ، اطروحة دكتوراه- كلية الاداره والاقتصاد - جامعة بغداد .

٣- الموسوي ،جواد كاظم (١٩٩٥) "التوزيع الحر في السلاسل الزمنية ،نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الثانية ،الطبيعي وغير الطبيعي ،مع تطبيق عملي "، اطروحة دكتوراه- كلية الاداره والاقتصاد - جامعة بغداد .

٤- الناصر،عبد المجيد حمزة والعزاوي ،ماجد (٢٠٠٢) "التوزيع الحدي للنموذج المختلط من الدرجة الاولى ARMA(1,1) الطبيعي وغير الطبيعي " ، بحث منشور في مجلة وقائع المؤتمر العلمي الثالث عشر للجمعية العراقية للعلوم الاحصائية .

٥- الناصر،عبد المجيد حمزة و عبدالله ، سهيل (٢٠٠٤) " طريقة مقترحة لحساب العزوم للنماذج المختلطة ARMA(1,q) الطبيعية وغير الطبيعية " ، المجلة العراقية للعلوم الاحصائية ، العدد ٦ ، المجلد ٤ .

٦- عبد ،صلاح حمزة (٢٠٠٠) "صيغة عامة لتمثيل الدالة المميزة لعملية الانحدار الذاتي من الدرجة p بدلالة الدالة المميزة لبواقيها " ، بحث منشور في مجلة وقائع المؤتمر القطري الاول لعلوم الاحصاء .

٧ - Al-Nachawati , H. & Al-Wasel , I. And Al-Zaid , A. (1997) "Estimating the parameters of the generalized poisson AR(1) process " , J.statis. comput. Simu. , VOL.66 , pp.337- 352 .

٨ - Al-Wasel , I & Al-Zaid ,A. and Al-Nachawati , H.(1998) "Estimating the parameters of the Binomial AR(1) process" , Applied Math. & comp. , VOL.95 , pp.193-204 .

٩ - Al-Zaid , A. and Al-Osh , M. (1993) "Some autoregressive moving average processes with generalized poisson marginal distributions " , Ann. Inst. Math. , VOL.45 ,No.2 ,pp.223-232.

١٠ - Andel , J. (1982) "Amarginal distributions of autoregressive process" , Prague Conference Of Information Theory .

1١ - Brockwell , P. and Davis , R. (2002) "Introduction to time series and forecasting " , Springer texts in statistics , USA .
12 - Priestley , M. (1984) "Spectral analysis and time series" , Academic Press Company .
13 - Sim , C. (1986) "Simulation of weibull and gamma autoregressive stationary process" ,
Comm. Stat. Simul. , VOL.15 ,No.4 , pp.1141-1146 .
14 - _____(1990) "First order autoregressive models for gamma and exponential processes" ,
J. Appl. Prob. , VOL.27 , pp.325-332 .
15 - _____(1993) "First order autoregressive Logistic processes"
J. Appl. Prob. , VOL.30 ,
pp. 467-470 .
16 - _____(1994) "Modeling non normal first order autoregressive time series " J. Of Forecasting , VOL.13 , pp.369-381 .