Warith Scientific Journal

المقارنة بين طريقة بيز و طريقة العزوم في تقدير دالة المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما بأستعمال المحاكاة

Comparison between Bays method and the moment method in estimating the fuzzy reliability function of an inverse gamma distribution using simulation

أ.د شروق عبد الرضا سعيد
Shorouq Abdul Reda Saeed
Shrookalsabah1968@gmail.com
جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد
Karbala University / College of Administration and Economics

بنين احمد حسين
Boys Ahmed Hussein
baneenalsaade84@gmail.com
جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد
Karbala University / College of Administration and Economics

المستخلص. تم في هذا البحث التطرق الى طريقة بيز وطريقة العزوم لتقدير معولية توزيع معكوس كاما في حالة البيانات ضبابية وقد تمت دراسة خصائص التوزيع من حيث التوقع والتباين ودالة الكثافة الاحتمالية والدالة التجميعية واستعملت تجارب المحاكاة لمعرفة افضلية طرق التقدير و تبين ان طريقة بيز تعد من افضل الطرق لتقدير المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما اما طريقة العزوم لا تصلح للتقدير.

الكلمات المفتاحية: المعولية الضبابية، توزيع معكوس كاما، المحاكاة،بيز الضبابية،العزوم الضبابية.

Abstract. in this paper the Bayes method and moment method for estimating the of the inverse gamma distribution in case the data is fuzzy, The characteristics of the distribution have been studied in terms of expectation, variance, probability density function, and cumulative function, and simulation experiments were used to find out the preference of estimation methods used to, It was found that the bayes method is one of the best methods for estimating the fuzzy reliability of an inverse gamma distribution, while the method of moments is not suitable for estimation.

Key words: Fuzzy reliability,Invers gamma distribution,Fuzzybays،Fuzzy moment.

1 المقدمة

يهتم الاحصاء الضبابي(المضبب) بالظواهر التي لا يمكن قياس متغيراتها نقطياً او انها قاس بفترات او ما يوصف بالحالات اللاموكدة او الحالات ذات البيانات الضبابية لما تتصف من صفات تجعلها غير واضحة لذلك تمت دراسة المعولية الضبابية من خلال تقدير المعلمات لتوزيع معكوس كاما باستخدام طريقة بيز الضبابية وكذلك تم في الجانب التجريبي استعمال المحاكاة في تقدير المعولية لتوزيع معكوس كاما باستخدام طريقة بيز الضبابية وطريقة العزوم اذ تبين ان طريقة بيز هي الافضل لتقدير المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما عند حجم عينة 50 من خلال المقارنة بين الطرق باستخدام المعايير متوسط مربعات الخطأ (MSE) ومتوسط مربعات الخطأ النسبي(MAPE).

2 هدف البحث

استخدام طريقة بيز وطريقة العزوم لتقدير دالة المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما و اختيار افضل تقدير لدالة المعولية الضبابية باستعمال معياري المقارنة متوسط مربعات الخطأ MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي(MAPE)

3 مشكلة البحث

تقدير المعولية يعتمد على دقة البيانات المستعملة في تقدير معالم التوزيع الاحتمالي ولكون بعض البيانات تعاني من مشكلة عدم الدقة في القياسات لذلك ستكون لها صفة الضبابية ولا بد من اعمام مفهوم الضبابية والانتقال من الطرق الكلاسيكية الاعتيادية الى تلك المختصة بالضبابية.

4 الجانب النظري

4.1توزيع معكوس كاما: وهو عبارة عن عائلة ذات معلمتين من التوزيعات الاحتمالية المستمرة على الخط الحقيقي الايجابي وهو توزيع المعاملة بالمثل لمتغير موزع وفقاً لتوزيع كاما و لعل الاستخدام الرئيسي لتوزيع معكوس كاما كما هو في الاحصاءات البيزية حيث يظهر التوزيع كتوزيع لاحق لتباين التوزيع الطبيعي الغير معروف في حالة استخدام معلومات سابقة كمرافق يمكن تتبعه من الناحية التحليلية اذا كان هناك معلومات سابقة. (Salah Abid & Alhassany/2016/17)

دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع معكوس كاما هي:

الدالة التوزيعية $f(x)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\,x^{-(\alpha+1)}\,e^{-(\frac{\beta}{x})}\quad ,x>0$ .....(1)

التجميعية (c.d.f) لتوزيع معكوس كاما هي:

دالة كاما $F(x)=\frac{\Gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma\alpha}$, β>0 α> 0 .....(2)

العظمى غير المكتملة ⬅ $\Gamma(u,v)=\int_{v}^{\infty}t^{u-1}\,e^{-t}dt$

دالة كاما المكتملة ⬅ $\Gamma(u,0)=\Gamma(u)$

دالة المعولية (Relibility function)

$R(x)=1-F(x)$

$=1-\frac{\Gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma(\alpha)}=\frac{\Gamma\alpha-\Gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma(\alpha)}$

$\because\ \Gamma(s,\lambda)+\gamma(s,\lambda)=\Gamma(s)$

$\therefore R(x)=\frac{\gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma(\alpha)}$

دالة المخاطرة (Hazard function) $H(x)=\frac{f(x)}{R(x)}$

$=\frac{\beta^{x}x^{-(\alpha+1)}e^{-(\frac{\beta}{x})}}{\gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}$ ..... (3)

عندما تكون γ(u,v) دالة كاما الصغرى المكتملة .

العزوم Moments

اما العزوم ذو الرتبة r حول نقطة الاصل ($\acute{r}th$ moment about original):

$E(x^{r})=\int_{-\infty}^{\infty}x^{r}f(x)dx=\int_{x=0}^{\infty}x^{r}\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}x^{-(\alpha+1)}e^{-\frac{\beta}{x}}dx$ .....(4)

$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_{0}^{\infty}x^{r-\alpha-1}\,e^{-\frac{B}{x}}\,dx$

$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_{0}^{\infty}x^{-(\alpha-r+1)}e^{-\frac{\beta}{x}}dx$

بأستخدام الفرضية لايجاد قيمة التكامل:

Let $z=\frac{\beta}{x}$, $x=\frac{\beta}{z}$

$X=\beta Z^{-1}$

$dx=-\beta Z^{-2}\,dz$

$dx=\frac{z^{-2}}{\beta}dz$

$$\therefore \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}(\beta z^{-1})^{-(\alpha-r+1)}\,e^{-z}\frac{z^{-2}}{\beta}dz$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}\beta^{r-\alpha-1}\,z^{-r+\alpha+1}\,e^{-z}\,\frac{z^{-2}}{\beta}\,dz$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}\beta^{r-\alpha-1}}{\beta\,\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}z^{-r+\alpha+1-2}\,e^{-z}\,dz$$

$$=\frac{\beta^{r-1}}{\beta\,\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}z^{\alpha-r-1}\,e^{-z}\,dz$$

$$=\frac{\beta^{r}}{\Gamma\alpha}\,\Gamma(\alpha-\mathrm{r})\Longrightarrow\frac{\beta^{r}\Gamma(\alpha-r)}{\Gamma\alpha}$$

اذن التوقع والتباين لتوزيع معكوس كاما للمتغير العشوائي (x) على التوالي:

$E(x)=\frac{\beta}{\alpha-1}$ for $\alpha>1$

$V(x)=\frac{\beta^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$ for $\alpha>2$

4.2 دالة المعولية الضبابية (Fuzzy Relibility). وهي الاحتمال الضبابي لأستمرارية عمل المركبة بنجاح لفترة زمنية ولدرجة انتماء يتم تحديدها من خلال دالة انتماء وباستحدام صيغة الاحتمال الضبابي نستطيع حساب المعولية الضبابية لأي مركبة وفق الصيغة

$$\widetilde{R}\,(t)=\int_t^{\infty}\mu_{\tilde{A}}\,(\tilde{x})\,f(\tilde{x})d\tilde{x}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

اذ ان$(\tilde{x})$ متغير عشوائي ضبابي.

$\mu_{\tilde{A}}(\tilde{x})$ دالة الانتماء التي تحدد درجة الانتماء لأي قيمة من قيم$\tilde{x}$.

وقد اقترح الباحث (Chingh sue Cheng) عام 1995 صيغة لدالة الانتماء خاصة بأوقات الحياة وهي :

$$\mu_{\tilde{A}}(X^*)=\begin{cases}0 & x^*\le t_1\\ \dfrac{x^*-t_1}{t_2-t_1} & t_1<x^*\le t_2\\ 1 & x^*>t_2\end{cases}$$

اذن دالة المعوليةالضبابية لتوزيع معكوس كاما هي:-

$$\tilde{R}(t)=1-\frac{\Gamma(\alpha,\frac{\beta}{\tilde{x}})}{\Gamma(\alpha)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

4.3 طريقة بيز الضبابية (Fuzzy Bayes Method).في العقود الاخيرة كانت وجهة نظرية بيز كبديل قوي وصالح للمنظورات الاحصائية التقليدية ولها اهمية كبيرة في الاحصاء الاستدلالي.

في طريقة بيز يجب ان نفترض ان المعلمة (المعلمات) هي متغير عشوائي ولها توزيع مسبق يتم تحديدها من المعلومات والخبرات السابقة للدراسات المماثلة، ثم يتم الجمع بين هذه التوزيعات السابقة مع دالة الاحتمال من اجل الحصول على دالة الكثافة اللاحقة المشتركة التي تصبح الاساس لحل الاستدلال لتقدير بيز.

(*zadeh,1970*,141-164)

العناصر الاساسية في دالة بيز:-

1- معرفة الدالة الاساسية.

2- معرفة الاحتمال السابق.(*prior distribution*)

3- نحصل على الاحتمال اللاحق. (postiror dis*tribution*)

4- نستخدم المخاطرة لتقدير المعلمة (المعالم).

لتكن $(x_1,x_2,\ldots\ldots\ldots\ldots,x_n)$ عينة عشوائية بدالة احتمالية لها توزيع معكوس كاما$f(x,\alpha,\beta)$ ولتكن $\pi_1(\alpha)$ و $\pi_2(\beta)$ التوزيع الاولي للمعلمة α وβ على التوالي وسوف نفترض بأن لهما توزيع اولي سابق مستقل هو التوزيع الاسي (*exponential*) وكالاتي:

$$\pi_1(\alpha) = \theta e^{-\theta\alpha}$$

$$\pi_2(\beta) = \lambda e^{-\lambda\beta}$$

إذ ان $\alpha\sim exp(\theta)$ و $\beta\sim exp(\lambda)$ وبالاستناد الى تلك التوزيعات الاولية آنفا فان دالة الكثافة اللاحقة المشتركة (*joint posterior function*) للα وβ تكتب بالشكل الاتي:

$$\pi_1(\alpha,\beta|\tilde{x}) = \frac{\pi_1(\alpha).\pi_2(\beta).l(\alpha,\beta,\tilde{x})}{\int\int \pi_1(\alpha).\pi_2(\beta).l(\alpha,\beta,\tilde{x})dx\,d\alpha\,d\beta} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

اذ ان :

$$l(\alpha,\beta,\tilde{x}) = \frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^n}\prod_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)} \exp -(\frac{\beta}{x})\,\mu_{\tilde{x}i}(x)dx \ldots\ldots (8)$$

اذ تمثل المعادلة(8) دالة الامكان الاعظم المستندة على عينة ضبابية.

دالة التوزيع اللاحق (posterior distribution) ناتجة من التوزيع الاولي ودالة الامكان الاعظم الضبابية وكالاتي:

$$f(\alpha,\beta|\tilde{x}) = \frac{\theta e^{-\theta\alpha}\,\lambda\, e^{-\lambda\beta}\frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^n}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\ \exp^{-(\frac{\beta}{x})}\,\mu_{\tilde{x}i}\,dx}{\iint \theta\, e^{-\theta\alpha}\,\lambda\, e^{-\lambda\beta}\frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^n}\ \prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\ \exp^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)}\ \mu_{\tilde{x}i}\,dx\,d\alpha\,d\beta}$$

$$= \frac{\lambda\,\theta\, e^{-(\theta\alpha+\lambda B)}\ \frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^n}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\exp^{-(\frac{\beta}{x})}\,\mu_{xi}\,dx}{\iint \theta\lambda e^{-(\theta\alpha+\lambda\beta)}\ \frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^n}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\ \exp^{-(\frac{\beta}{x})}\ \mu_{\tilde{x}i}\,dx\,d\beta\,d\alpha} \ldots\ldots (9)$$

وعلى فرض ان$g(\alpha,\beta)$ *دالة خسارة ، وبما ان مقدر بيز هو ذلك المقدر الذي يجعل توقع دالة الخسارة في نهايتها الصغرى فان توقع دالة الخسارة يكون كالاتي:*

$$E(g(\alpha,\beta|\tilde{x})) = \frac{\iint g(\alpha,\beta)\ \prod_{i=1}^{n}(\alpha,\beta|\tilde{x})\ d\alpha\,d\beta}{\iint \prod(\alpha,\beta|\tilde{x})\,d\alpha\,d\beta}$$

$$= \frac{\iint g(\alpha,\beta)\,\lambda\theta\, e^{-(\theta\alpha+\lambda\beta)}\,\frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^{n}}\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\exp^{-\left(\frac{\beta}{x}\right)}\,\mu_{\tilde{x}}\,dx\,d\alpha\,d\beta}{\iint \lambda\,\theta\, e^{-(\theta\alpha+\lambda\beta)}\,\frac{\beta^{n\alpha}}{(\Gamma\alpha)^{n}}\,\prod_{i=1}^{n}\int_0^{\infty} x^{-(\alpha+1)}\exp^{-\frac{\beta}{x}}\,\mu_{\tilde{x}}\,dx\,d\alpha\,d\beta}$$

ونظرا لكون هذ المعادلات لايمكن حلها بالطرق الرياضية الاعتيادية لذى سيتم حلها باستخدام خوارزمية تكرارية تعتمد على طريقة(Tierney and kandanes approximation T&k) للحصول على تقديرات المعلمات(βوα).

3.4 طريقة العزوم للتقدير(*Moment Method estimation*)

تعد طريقة العزوم من طرائق التقدير التقليدية الشائعة الاستخدام وذلك لسهولتها وتعتمد على مساواة عزم المجتمع المقدر (μi) مع عزم العينة (mr) .

(Melamed, B. and Rubinstein, 1998)

$$Ex^r = \int_0^{\infty} x^r\ f(x)\ \ dx = \frac{\beta^r \Gamma(\alpha-r)}{\Gamma(\alpha)} \qquad r = 1,2,3,\ldots. \qquad ,\alpha > r$$

$$Ex = \frac{\beta}{\alpha-1} \qquad .$$

$$Ex^2 = \frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

تمثل عزوم المجتمع بعدد المعلمات

وان: $$m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\ (X/\tilde{x}i)$$

$$m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\ (X^2/\tilde{x}i)$$

تمثل عزوم العينة بعدد المعلمات

وبمساوات عزوم العينة مع عزوم المجتمع تنتج لدينا المعادلتين:

$$\frac{\beta}{\alpha-1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}i) \ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\ (X^2/\tilde{x}i) \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

وما دام انه ليس هناك صيغة مغلقة لحل المعادلتين فأننا سوف نستعمل العمليات العددية التكرارية للحصول على تقديرات المعلمات والتي يمكن ان توصف كالاتي:-

1. لنفرض التقديرات الابتدائية للα وβ هي $\alpha^{\circ}, \beta^{\circ}$ عندما (h=0).
2. في التكرار رقم (h+1) نحسب اولا

$$E_{\alpha^{(h)},\beta^{(h)}}(X^r/\tilde{x}i) = \frac{\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty} x^{-\left(\alpha^{(h)}+1\right)+r}\ e^{-\frac{\beta^{(h)}}{x}}\ \mu_{\tilde{x}i}\ dx}{\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty} x^{-\left(\alpha^{(h)}+1\right)}\ e^{-\frac{\beta^{(h)}}{x}}\ \mu_{\tilde{x}i}\ dx}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} x^{-\left(\alpha^{(h)}+1\right)+r}\ e^{-\frac{\beta^{(h)}}{x}}\ \mu_{\tilde{x}i}\ dx}{\int_0^{\infty} x^{-\left(\alpha^{(h)}+1\right)}\ e^{-\frac{\beta^{(h)}}{x}}\ \mu_{\tilde{x}i}\ dx} \qquad ,r = 1,2\ldots\ldots\ldots(12)$$

بالاستناد الى المعادلات (11و12) نحل اولا لل α ونحصل على المعادلة الاتية :

$$\frac{(\frac{\beta}{\alpha-1})^2}{\frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}} = \frac{[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}\iota)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\,(X^2/\tilde{x}\iota)}$$

$$\frac{\beta^2\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]^2}{\frac{\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}} = \frac{\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}\iota)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\,(X^2/\tilde{x}\iota)}$$

$$\frac{\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{\frac{1}{n^2}[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}\iota)]^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\,(X^2/\tilde{x}\iota)}$$

$$\alpha^{h+1} = \frac{\left[\frac{1}{\alpha-1}\right]^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{[\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}(X/\tilde{x}\iota)]^2}{n\sum_{i=1}^{n} E_{\alpha,\beta}\,(X^2/\tilde{x}\iota)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots(13)$$

4.الجانب التجريبي (المحاكاة): *Simulation*

4.1 مفهوم المحاكاة: *The Concept of Simulation*

تعد المحاكاة عملية تطبيق لخيال المستعمل على واقع افتراضي تجريبي لغرض فحص مشكلة معينة او قياس اداء معين لغرض دراسة السلوك وإعمام النتائج على الواقع الحقيقي ، اي هو عملية تقليد لنظام معين ينطوي على بناء تاريخ اصطناعي مع مميزات النظام الحقيقي لغرض فهم ذلك النظام افضل ما يكون ودراسة سلوكه وتطوره بمرور الوقت . وكثيرا ما نجد في الواقع الحقيقي ان هناك عمليات تكون معقدة الفهم والتحليل لذلك فمن الافضل ان نوصف هذه العمليات بصورة مشابهة للصور الحقيقية بنماذج معينة، ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الادراك للعملية الاصلية او الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة الانموذج، ومن الطبيعي ان درجة المشابهة بين أي تجربة محاكاة والواقع الحقيقي تعتمد على مدى مطابقة او مشابهة انموذج المحاكاة للنظام الحقيقي. لقد تعددت اساليب المحاكاة ولاسيما بعد التطور السريع الذي حصل في استعمال الحاسبة الالكترونية ولكونها الاسلوب الفعال الذي يمكننا من ادارته بشكل تطبيقي واسع في التطبيق العملي.

ومن المبادئ الاساسية للمحاكاة باستعمال الحاسبة وضع برنامج يمثل او يشابه سلوك العملية الحقيقية بشكل مقارب للواقع الحقيقي قدر الامكان، وغالباً ما يكون هذا الواقع معقداً جداً لتمثيله أو تقليده بصورة متقنة في برنامج الحاسبة وعلى الرغم من ذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يعطي معلومات مفيدة عن الواقع الحقيقي الذي يشابهه، ونماذج المحاكاة الاكثر شبيه للواقع الحقيقي تكون اكثر دقة في النتائج والمعلومات المستخلصة منها. ان اول مراحل استعمال اسلوب المحاكاة هو توليد المتغيرات العشوائية قيد الدراسة، كما ان أي تجربة محاكاة ماهي الا عبارة عن نوع معين من انواع المعاينة اذ تسحب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بأحجام مختلفة من العينات ، وتكرار العملية مرات كثيرة بدلا من ان تسحب من المجتمع الحقيقي وبذلك فأن اسلوب المحاكاة يمكن ان يحقق للباحثين حلولا تحليلية وكذلك يؤمن قاعدة تجريبية تكون دليلاً لهم مع القاعدة النظرية لاختيار الاسلوب الملائم او الطريقة الملائمة لتحليل ودراسة بيانات الظواهر التي يدرسونها عن طريق مطابقة خصائصها مع الانواع التي طبقت المحاكاة عليها.

2.4 (Silva& et al :2010 P:429-430)

وصف تجربة المحاكاة *Describe of simulation experiment*

تم استعمال اسلوب المحاكاة مونت-كارلو *(Monte-Carlo)* لغرض المقارنة بين طرائق تقدير دالة المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما بتوليد بيانات بأحجام مختلفة تستعمل في تقدير دالة المعولية الضبابية لتوزيع معكوس كاما ***Inverse Gamma distribution*** وكانت خطوات تطبيق المحاكاة كالآتي:

1- **افتراض احجام عينات مختلفة *Sample Sizes*** وكما يأتي:

اختيرت عدة احجام عينات و كما يأتي:

1- حجم عينة صغير **(n=10)**.

2- حجم عينة متوسط **(n=50)**.

3- حجم عينة كبير ***(n=150)*** .

2- تحديد قيم افتراضية لمعلمات توزيع معكوس كاما :

اختيرت عدة قيم افتراضية لمعلمة الشكل $\boldsymbol{\alpha}$ ومعلمة القياس $\boldsymbol{\beta}$ لتوزيع معكوس كاما وظهرت افضل النتائج واكثرها دقة عند القيم الافتراضية الموضحة في الجدول (1).

جدول (1) القيم الافتراضية لمعلمات توزيع معكوس كاما

Parameter / ***Relation***	$\boldsymbol{\alpha}$	$\boldsymbol{\beta}$
Equal	**3**	**3**
Shape less than scale	*2*	*3*
Shape greater than Scale	**5**	**3**

3- توليد البيانات ***Data generation*** :

استعمل الباحث برامج خاصة لتوليد البيانات واستخدامها في ايجاد دوال انتماء للدالة:

- توليد متغير يتبع توزيعاً منتظماً $\boldsymbol{u \sim U(0,1)}$
- *توليد بيانات تتبع توزيع معكوس كاما بتطبيق الصيغة الاتية:*

$$x_i = \text{gamrnd}(\alpha, \beta, 1, n)$$

$$t_i = 1./\, x_i \qquad ; \; i = 1,2, \dots \dots, n \qquad \dots(14)$$

والعينة العشوائية مستقلة ومتماثلة التوزيع $(i.i.d)$ متمثلة بالمتجه $\underline{t}$ من توزيع معكوس كاما وتم تحويل متجه العينة t الى الضـــــبابية باستعمال نظام المعلومات الضبابية الافتراضي*Fuzzy Hypothetical information system* المبين في الشكل (1) المقابل لدوال الانتماء الاتية باستخدام برنامج الماتلاب:

$$\begin{cases} \mu_{\tilde{t}_1}(t) = 1 & t \le 0.05 \\ \dfrac{0.25-t}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_2}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.05}{0.2} & 0.05 \le t \le 0.25 \\ \frac{0.5-t}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_3}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.25}{0.25} & 0.25 \le t \le 0.5 \\ \frac{0.75-t}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

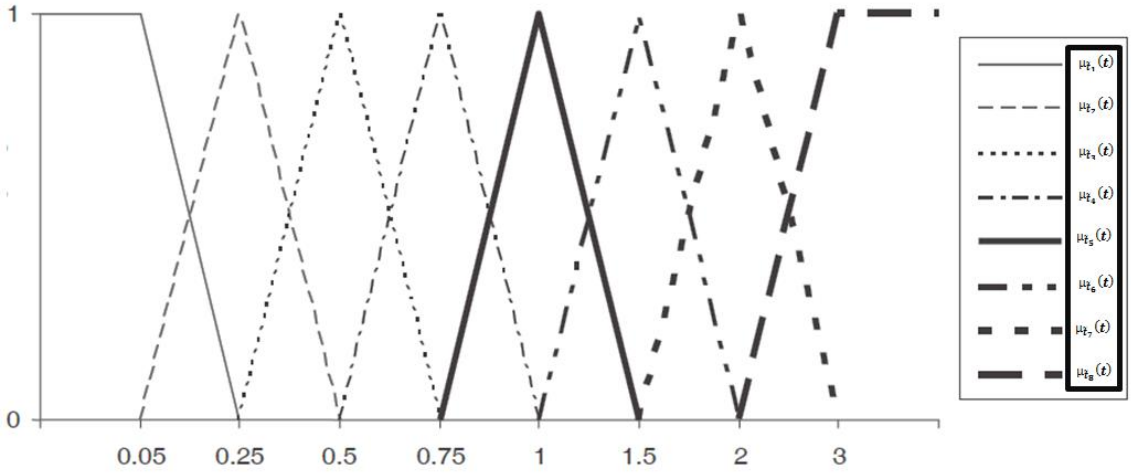
$$\mu_{\tilde{t}_4}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.5}{0.25} & 0.5 \le t \le 0.75 \\ \frac{1-t}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_5}(t) = \begin{cases} \frac{t-0.75}{0.25} & 0.75 \le t \le 1 \\ \frac{1.5-t}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_6}(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ \frac{2-t}{0.5} & 1.5 \le t \le 2 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_7}(t) = \begin{cases} \frac{t-1.5}{0.5} & 1 \le t \le 1.5 \\ 3-t & 2 \le t \le 3 \\ 0 & o.w \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{t}_8}(t) = \begin{cases} t-2 & 2 \le t \le 3 \\ 1 & t \ge 3 \\ o.w & 0 \end{cases}$$



شكل (1) نظام المعلومات الضبابيه الافتراضي المستخدم في تضبيب بيانات توزيع معكوس كاما في تجارب المحاكاة(FIS **)** باستخدام برنامج الماتلاب

وتم الحصول على تقديرات α و β للعينة الضبابية استعملت خوارزمية تكرارية تعتمد على تقريب(***Tierney and Kandane's approximation T&k***) للحصول على تقديرات بيز وطريقة تكرارية لإيجاد تقديرات العزوم (***Moments Method***)، ولحساب تقديرات بيز سنفترض بان α و β لها توزيع اولي اسي $(Non\ Informative)$ ، وسنفترض بان التوزيعات الاولية للمعلمات غير كاملة المعلومات $\alpha \sim exp(\theta), \beta \sim exp(\lambda)$ ، اقترح $Press(2011)$ استعمال قيم موجبة صغيرة جدا للمعلمات الفوقية في التوزيع الاولي ، لذلك سنفترض $a = b = c = d = 0.0001$ وبحجوم العينات المفترضة، و بتكرار (1000) مرة لكل تجربة محاكاة لغرض الحصول على اكبر تجانس $Homogenous$ في تقدير دالة المعولية لتوزيع معكوس كاما وقد نفذت تجارب المحاكاة باستعمال لغة البرمجة $Matlab\ 2015$.

- تم ايجاد قيم دالة المعولية الضبابية باستعمال الصيغة الاتية :

$$\tilde{R}(t_i) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma\alpha - \Gamma(\alpha,\frac{\beta}{x})}{\Gamma(\alpha)}; \quad i = 1,2,\dots\dots,n \qquad \dots\dots(15)$$

- بعد توليد القيم العشوائية الضبابية $(\tilde{t}_i)$ من دالة CDF وفقاً الى احجام عينات معلومة وقيم افتراضية للمعلمات(اولية) حسب الصيغة (14)تم تعويض قيم $(\tilde{t}_i)$ والمعلمات الاولية حسب دوال الانتماء $\mu_{\tilde{t}_i}(t)$ المقابلة لكل مشاهدة $(\tilde{t}_i)$ في دالة المعولية الضبابية في الصيغة (11) لاستخراج $\tilde{R}(t_i)$ لكل مشاهدة ضبابية ومن ثم استخراج التوقع لكل الـ $\tilde{R}(t_i)$ كما يأتي :

$$\tilde{R}(t) = \hat{E}(\tilde{R}(t_i)/\tilde{x}_i) = \frac{1}{K}\sum_{h=1}^{K} R^{(h)}(t) \qquad \dots\dots\dots(16)$$

اذا ان :

K يمثل عدد مرات تكرار التجربة وتساوي (1000) .

h القيمة الاولية للتكرار $(Initial\ Value)$ ، بحيث ان $h = 0,1,2,\dots\dots K$

4- مقارنة نتائج المحاكاة : تتم مقارنة نتائج المحاكاة باستعمال المقاييس الاحصائية الاتية :

- متوسط مربعات الخطأ ***Mean Square error*** :

$$MSE(\tilde{R}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(\tilde{R} - R)^2 \qquad \dots(17)$$

تمثل K عدد التكرارات ***Replication*** لكل تجربة .

- متوسط الخطأ النسبي المطلق(***Mean Absolut Proportional Error***) :

$$MAPE(\tilde{R}) = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{k}\left|\frac{\tilde{R}-R}{R}\right| \qquad \ldots\ldots\ldots(18)$$

تمثل K عدد التكرارات ($Replication$) لكل تجربة.

وقد تم الحصول على نتائج المحاكاة باستعمال برنامج (*Matlab 2015*)

4.3 تحليل نتائج المحاكاة: *Analysis of Simulation* Results

سيتم عرض وتحليل نتائج تجارب المحاكاة وفق الجداول(*2*) الى (*4*)

جدول (*2*) يبين متوسط مربعات الخطا MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ لمعلمات توزيع معكوس كاما α وβ وللمعولية الضبابية $\tilde{R}$ المقدرة عند حجوم العينات المفترضة ولقيم اولية لمعلمات توزيع معكوس كاما $\alpha = 3, \beta = 3$

جدول (2)

n	$Meth$	$Results$				$Best$
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	$FBays$	$\hat{\alpha}$	3.244744	0.001387	0.152084	$FBays$
		$\hat{\beta}$	3.335401	0.001301	0.119206	
		$\tilde{R}$	0.728641	0.001186	0.445143	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	4.5172333	0.504337	5.331414	
		$\hat{\beta}$	4.3772517	0.201901	3.747521	
		$\tilde{R}$	0.85559	0.028311	2.371564	
50	$FBays$	$\hat{\alpha}$	3.258631	0.000014	0.007077	$FBays$
		$\hat{\beta}$	3.324335	0.000015	0.006471	
		$\tilde{R}$	0.693642	0.000065	0.139281	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	3.803756	0.078861	1.015044	
		$\hat{\beta}$	3.967976	0.028544	0.557346	
		$\tilde{R}$	0.819875	0.022034	1.925043	
150	$FBays$	$\hat{\alpha}$	3.828440	0.052471	0.479307	FMom
		$\hat{\beta}$	3.994613	0.013231	0.242068	
		$\tilde{R}$	0.855843	0.028377	2.176442	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	3.934843	0.000560	0.025334	
		$\hat{\beta}$	3.7125455	0.000011	0.003345	
		$\tilde{R}$	0.662972	0.000059	0.103466	

يتضح من الجدول(3)وللقيم الاولية $\alpha = 3 , \beta = 3$ عن طريق المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ عند احجام العينات المفترضة كما يأتي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.
- عند حجم عينة $n = 150$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة العزوم الضبابية.

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية هي طريقة بيزعند حجم عينة $n = 50$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة مع القيم الافتراضية.

جدول (3) يبين متوسط مربعات الخطأ MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ لمعلمات توزيع معكوس كاما α و β وللمعولية الضبابية $\tilde{R}$ المقدرة بالطـــرائق عند حجوم العينات المفترضة ولقيم اولية لمعلمات توزيع معكوس كاما $\alpha = 2 , \beta = 3$

جدول (3)

n	$Meth$	$Results$				$Best$
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	$FBays$	$\hat{\alpha}$	**2.381386**	**0.000068**	**0.039764**	$FBays$
		$\hat{\beta}$	**3.248387**	**0.000294**	**0.051613**	
		$\tilde{R}$	**0.781231**	**0.000082**	**0.124584**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	2.907231	0.505343	8.072113	
		$\hat{\beta}$	3.677267	0.201911	2.886585	
		$\tilde{R}$	0.777886	0.010034	1.315945	
50	$FBays$	$\hat{\alpha}$	**2.556666**	**0.000012**	**0.008804**	FBays
		$\hat{\beta}$	**3.0173131**	**0.000007**	**0.003445**	
		$\tilde{R}$	**0.707578**	**0.000022**	**0.055124**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	1.319632	0.091154	1.639264	
		$\hat{\beta}$	1.415648	0.024820	0.415648	
		$\tilde{R}$	0.781298	0.008514	1.163879	
150	$FBays$	$\hat{\alpha}$	2.497686	0.000911	0.001319	FBays
		$\hat{\beta}$	3.954672	0.000714	0.003128	
		$\tilde{R}$	0.711565	0.000055	0.103444	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	2.696833	0.036644	0.597890	
		$\hat{\beta}$	3.511781	0.010984	0.170260	
		$\tilde{R}$	0.791013	0.010385	1.323943	

يتضح من الجدول (3) وللقيم الاولية $\alpha = 2 , \beta = 3$ من خلال المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيار متوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ ولأحجام عينات مختلفة كما يلي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.
- عند حجم عينة $n = 150$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز الضبابية عند حجم عينة $n = 50$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة جدا مع القيم الافتراضية.

جدول (4) يبين متوسط مربعات الخطا MSE ومتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ لمعلمات توزيع معكوس كاما α و β وللمعولية الضبابية $\tilde{R}$ المقدرة بالطـــرائق الثلاثة عند حجوم العينات المفترضة ولقيم اولية لمعلمات توزيع معكوس كاما $\alpha = 5, \beta = 3$

جدول (4)

n	$Meth$	$Results$				$Best$
			$Estimate$	MSE	$MAPE$	
10	$FBays$	$\hat{\alpha}$	**5.318393**	0.012221	0.318631	$FBays$
		$\hat{\beta}$	**3.211816**	0.000401	0.074700	
		$\tilde{R}$	**0.745411**	**0.001172**	**0.430154**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.653678	0.582471	4.763456	
		$\hat{\beta}$	3.617356	0.207761	2.782425	
		$\tilde{R}$	0.924021	0.043113	1.730622	
50	$FBays$	$\hat{\alpha}$	**5.220234**	**0.000018**	**0.003047**	FBays
		$\hat{\beta}$	**3.174555**	**0.000016**	**0.004541**	
		$\tilde{R}$	**0.719344**	**0.000119**	**0.141753**	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.754433	0.166567	1.254436	
		$\hat{\beta}$	3.678945	0.048498	0.837595	
		$\tilde{R}$	0.914634	0.051675	2.994111	
150	$FBays$	$\hat{\alpha}$	5.625044	0.000347	0.014065	FBays
		$\hat{\beta}$	3.596476	0.000019	0.004461	
		$\tilde{R}$	0.681923	0.000387	0.278658	
	$FMom$	$\hat{\alpha}$	5.885223	0.045861	0.328371	
		$\hat{\beta}$	3.596897	0.012434	0.243166	
		$\tilde{R}$	0.888195	0.042444	2.746046	

يتضح من الجدول (4) وللقيم الاولية $\alpha = 5, \beta = 3$ من خلال المقارنة بمقياس متوسط مربعات الخطأ MSE ومعيارمتوسط مربعات الخطأ النسبي المطلق $MAPE$ عند احجام العينات المفترضة كما يلي :

- عند حجم عينة $n = 10$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.
- عند حجم عينة $n = 50$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضـــبابية .

❖ عند حجم عينة $\boldsymbol{n = 150}$ اتضح ان مقدر المعولية الضبابية $\boldsymbol{\tilde{R} = 0.681923}$ هو الافضل عند المعلمات المقدرة بطـــريقة بيز الضبابية.

يتضح من ذلك ان افضل قيمة تقديرية للمعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز الضبابية عند حجم عينة $\boldsymbol{n = 50}$ ، حيث نلحظ ان القيم التقديرية للمعلمات متوافقة مع القيم الافتراضية وكذلك المعولية الضبابية المقدرة متوافقةً مع المعولية الافتراضية.

4. الاستنتاجات

1. تفوقت طريقة بيز على طريقة العزوم في تقدير دالة المعوليةالضبابية لتوزيع معكوس كاما عند حجم عينة 50 بحيث المعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز تعطي أقل متوسط مربعات خطأ ***MSE*** واقل متوسط خطأ نسبي ***MAPE***.
2. عدم ملائمة طريقة العزوم في تقدير دالة المعولية لتوزيع معكوس كاماعند العينات الصغيرة.
3. ان المعولية الضبابية المقدرة بطريقة بيز متوافقة جداً مع المعولية الافتراضية.

5 .التوصيات

1. نوصي بالتوسع في استعمال المنطق الضبابي باستعمال دوال انتماء مختلفة لانه يعطي نتائج ادق في القياسات في حالة البيانات الضبابية وعن طريق مجموعة القطع-α.

2.استعمال طرائق التقدير للبيانات الضبابية لتوزيعات اخرى مثل توزيع ويبل أو الاسي او اللوجيستي وغيرها.

3.استعمال طرائق اخرى تقليدية وحديثة في حالة البيانات ضبابية للتقدير مثل طريقة المربعات الصغرى وطريقة البعد الاصغر وطريقة جاك نايف .

6. المصادر

1. Al-sultany &Mohammed, Shurooq and Sahar Ahmed,2017,mixture of two inverse exponential distribution based on fuzzy data, department of mathematics, collage of science, Mustansiriyah university, Iraq.
2. Bellman & zadeh,1970, decision making in a fuzzy environment, management science,pp.141-164.
3. Canz,1996, fuzzy linear programming in dass for energy system planning, international instinte for applied systems analysis, wp-69-132.
4. Chen, Shyi-Ming, (1997), "Fuzzy system reliability analysis based on vogue set theory", 0-7803-4053-1/97) IEEE, pp 1650-1655.
5. Cheng, Ching-Hsue; Mon Don-Lin, , (1993), " Fuzzy system reliability analysis of confidence by interval ", Fuzzy Sets and systems, 56, pp.29-35.
6. Hamdan& Garibaldi,2010,adaptive neuro fuzzy inference system (ANFIS),Ieee international conference,pp.1-8.
7. Ibrahim, N. A., & Mohammed, H. A. (2017). Parameters And Reliability Estimation For The Fuzzy Exponential Distribution. American Journal Of Mathematics And Statistics, 7(4), 143-151.
8. Liu ,Shujie; Zhang, Hongchao; Li ,Chao; Lu, Huitian; Hu, YaWei , (2014), "Fuzzy Reliability Estimation for Cutting Tools", ELSEVIER ,Science Direct , Procedia CIRP, 15, 62 – 67.
9. Mleki, tata & mashinchi, 2000,linear programing with fuzzy variable, fuzzy set and systems,pp.21-33.
10. Pak &Ali &saraj, Abbas and Gholam and Mansour, 2013, inference for the weibull distribution based on fuzzy data, department of statistics, faculty of mathematical sciences and computer, shahid chamran university of Ahvaz, Ahvaz, Iran.
11. Sommer & pollatchek,1976,a fuaay programming approach to an air pollution regulation problem,No.76,inst.writes chafts wiss. R.W.T.H.A achen.
12. Tanaka, 1987,fuzzy data analysis by possibility linear models, fuzzy set and system 24, p 363-375.
13. Venkatesh&Elango,2013,reliability analysis for effect of based on gamma distribution,Issn:2248-9622,pp.1295-1298.
14. Wu, Hsien-Chung, (2003), "The fuzzy estimators of fuzzy parameters based on fuzzy random variables", EuropeanJournal of Operational Research, 146, pp. 101–114.