Warith Scientific Journal

مقارنة طريقة OHD وطريقة GS لتقدير معلمات توزيع معكوس كاما النصف دائري باستعمال المحاكاة

Comparison of the OHD method and GS method for estimating ibution using the parameters of the inverse semicircular distr simulation

عمار محمد جاسم
Ammar Mohammed Jassim
ammar.m@s.uokerbala.edu.iq
جامعة كربلاء كلية الإدارة والاقتصاد
Karbala University/ College of Administration and Economics

أ. د. مهدي وهاب نعمة
Prof. Mahdi Wahab Nea'ama
mehdi.wahab@uokerbala.edu.iq
جامعة كربلاء كلية الإدارة والاقتصاد
Karbala University/ College of Administration and Economics

المستخلص:

في هذا البحث , تم المقارنة بين طريقتي مقدر المسافة العامة (GS) وطريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة(OHD), لتقدير معلمات توزيع معكوس كاما النصف الدائري المحول (HCTIG) باستعمال محاكاة مونت-كارلوا عن طريق برنامج ماتلاب MatLab بافتراض مجاميع من القيم الافتراضية لـ (α,β) هي α =1,2.5 و β =0.5,1,2,3, واحجام عينات مختلفة (10,30,50,100,200) اذ تم توليد بيانات المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع (HCTIG) , وكذلك تمت المقارنة بين طريقتي التقدير باستعمال معايير المقارنة (Bias) و (MSE) و (CP) , وكذلك ايجاد بعض خصائص التوزيع المحول الدائري مثل الدالة التوزيعية . وتم التوصل من خلال تجارب المحاكاة الى تفوق طريقة (OHD) على طريقة (GS) اذا سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات المفترضة.

الكلمات المفتاحية: التوزيع الدائري القطبي، توزيع كاما النصف دائري, مقدر المسافة العامة، مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة.

Abstract:

Comparison of the two general distance estimator (GS) and one-step least Hellinger distance estimator (OHD) methods, to estimate the parameters of the transformed inverse semicircular gamma distribution (HCTIG). The comments for (α, β) are α = 1,2.5 and β = 0.5, 1,2,3, and different sample sizes (10,30,50,100,200) as the data of the random variable that follows the (HCTIG) distribution was generated, and the two estimation methods were compared using the comparison criteria (Bias), (MSE) and (CP), as well as finding some characteristics of the transformed distribution The circular is like the distributive function. It was concluded, through simulation experiments, that the OHD method is superior to the (GS) method if this method recorded the lowest bias rate (Bias), the least mean square error (MSE), and the largest coverage ratio (CP) at the assumed sample sizes.

Keywords: Circular(Polar) distribution, Half circular gamma distribution, The General spacing estimator, One-step Hellinger Least Distance Estimator.

1. المقدمة: تلعب التوزيعات الدائرية دورًا مهمًا في نمذجة البيانات الزاوية (الدائرية) والتي تنشأ في مختلف المجالات, وبالتالي من المهم البحث عن طرق لتوليد عائلات من التوزيعات الدائرية القادرة على نمذجة مجموعة متنوعة من البيانات الزاوية. وتعد البيانات الدائرية من التقنيات التطبيقية الوثيقة الصلة والمهمة للغاية في العديد من المجالات مثل العلوم الفيزيائية والعلوم الطبية وعلم الارصاد الجوي وعلم النفس وغيرها من العلوم. (Gatto & Jammalamdaka 2003), ويمكن تصور البيانات الدائرية على أنها البيانات الموزعة على محيط دائرة الوحدة (root circular). والتوزيع الدائري الأكثر شيوعًا هو توزيع فون مايزس ذو المعلمتين (Two Parammeters Von-Mises distribution) ، والذي يمكن تقريبه من خلال التوزيع الطبيعي بالاستناد الى نظرية الغاية المركزية.

في السنوات الأخيرة، تم اقتراح توزيعات دائرية أكثر تفصيلاً وتم تطبيقها بنجاح على البيانات الحقيقية. ففي عام (2005) قدم (M. C. JONES & Pewsey) عائلة من التوزيعات الدائرية احادية النمط (Circular Unimodal distributions) وهي التوزيع الدائري المنتظم , توزيع Von-Mises الدائري وتوزيع cardioid الدائري وتوزيع كوشي الملتف الدائري (Circular Wrapped Cauchy distribution) التي اشتقت عن طريق التكييف وإسقاط بعض التوزيعات المتماثلة ثنائية المتغير كرويًا وبيضاويًا على دائرة الوحدة وناقشا خصائص هذه التوزيعات وقدرا معلمات هذه التوزيعات باستعمال طريقة الإمكان الأعظم. وفي عام (2010) اقترح (Abed et al.) عائلة جديدة من التوزيعات الدائرية التي تعتبر امتداد لعمل Jones and Pewsey (2005) والتوزيعات الاحادية الوسائط المعدلة لـ Minh and Farnum (2003) على أساس الإسقاط المجسم ,وفي عام (2013) قدم (Yedlapalli et al) وآخرون توزيع ويبل النصف دائري المجسم والتوزيع الأسي النصف دائري المجسم باستعمال تقنية الاستقاط العكسي ودرسوا خصائص هذه التوزيعات والعزوم المثلثية واثبتوا بان هذه التوزيعات ملائمة لنمذجة البيانات التي تقع على نصف دائرة الوحدة .وفي العام (2014) أنشأ (S. Girija et al.) وآخرون توزيع ثنائي الحدين الملتف الدائري باستعمال طريقة الانموذج الخطي المتقطع الملتف وتوصلوا الى الخصائص الاساسية للتوزيع مثل دالة الكتلة الاحتمالية والدالة التوزيعية والمتوسط الاتجاهي والتباين الاتجاهي والالتواء الاتجاهي والتفلطح الاتجاهي والدالة المميزة والدالة المولدة للعزوم والعزوم المثلثية . في العام (2021) اقترح (R. Bapat) التوزيع الأسي الملتف النصف دائري (Half-circular wrapped-exponential distribution) لغرض تقدير عمر جائحة كورونا Corona virus (pandemic) وذلك باستعمال بيانات تمثل عمر قطرة اللعاب للاشخاص المصابين بالفايروس عن طريق تحديد زاوية تلامس قطرة اللعاب المصابة بالفايروس على اسطح القماش لغرض تقدير وقت جفاف القطرة.

في هذا البحث، سيتم المقارنة بين طريقتي التقدير (OHD) وطريقة (GS) لتقدير معلمات توزيع كاما المعكوس النصف دائري عن طريق المحاكاة للحصول على افضل طريقة تقدير.

2. التوزيع الدائري(القطبي) :

التوزيع الدائري (Circular distribution) أو التوزيع القطبي (Polar distribution) هو التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي الذي تكون قيمه هي الزوايا القطبية، والتي تقع ضمن الفترة $[0، 2\pi)$, والتوزيعات الدائرية غالبًا ما تكون توزيعات احتمالية مستمرة ، وبالتالي تكون لها دالة كثافة احتمالية ، ولكن يمكن أيضًا أن تكون هذه التوزيعات منفصلة ، وفي هذه الحالة تسمى توزيعات شبكية دائرية , يمكن استخدام التوزيعات الدائرية حتى عندما لا تكون المتغيرات المدروسة زوايا صريحة فالاعتبار الرئيسي هو أنه لا يوجد عادة أي تمييز حقيقي بين الأحداث التي تحدث في الطرف السفلي أو العلوي من النطاق ، ويمكن تقسيم النطاق نظريًا في أي وقت. (Dodge, Y. 2006)

إذا كان التوزيع الدائري له كثافة احتمالية كالآتي:

$$p(\phi) \qquad 0 \le \phi \le 2\pi \qquad (1)$$

$p(\phi)$= دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الدائري

ϕ= متغير عشوائي

والتي يمكن تمثيلها بيانيا بمنحنى مغلق:

$$[x(\phi), y(\phi)] = [r(\phi)cos\phi, r(\phi)sin\phi] \qquad (2)$$

(Phani,. & Rao. 2012) حيث ان

$r(\phi)$ = نصف قطر الدائرة والذي يساوي :

$$r(\phi) = a + bp(\phi) \qquad (3)$$

حيث ان a, b يتم اختيارهما على اساس شكل التوزيع

على سبيل المثال اذا كان لدينا متغير عشوائي X يمثل الولادة في شهر معين من السنة ، وكانت الاشهر مرتبة حول دائرة ، بحيث يكون كل شهر بجوار الشهر التالي . فسيكون التوزيع الشبكي الدائري هو احتمال الولادة في شهر معين من السنة . أي ان دالة الكثافة الاحتمالية $p(x)$ يمكن ان تلتف حول محيط دائرة نصف قطرها الوحدة والتي تشكل دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير الملتف (Wrapped Variable)

$$\theta = x_w = x \; mode \; 2\pi \in (-\pi, \pi) \qquad (4)$$

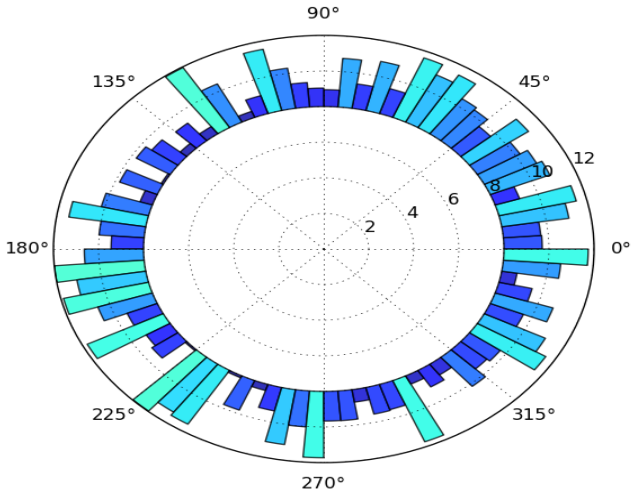
فأن :

$$p_w(\theta) = \sum_{k1=-\infty}^{\infty} p(\theta + 2\pi k) \qquad (5)$$

يمكن توسيع هذا المفهوم ليشمل السياق متعدد المتغيرات من خلال امتداد المجموع البسيط إلى عدد F من المجاميع التي تغطي جميع الابعاد وكالآتي:

$$p_w(\vec{\theta}) = \sum_{k1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_F=-\infty}^{\infty} p(\vec{\theta} + 2\pi k_1 e_1 + \cdots + 2\pi k_F e_F) \qquad (6)$$

$e_F = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ متجه الفضاء الاقليدي من الرتبة k



شكل (1) توزيع الاحتمالات على قطر دائرة الوحدة

3. توزيع معكوس كاما النصف دائري المحول (HCTIG):

لنفرض انه لدينا المتغير العشوائي X له توزيع كاما بالمعلمتين (α, β) حيث ان α معلمة الشكل , β معلمة القياس , فان دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائب X تعطى بالصيغة الآتية:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \, x^{\alpha-1} \quad exp^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)} \; I_{(0,\infty)} \qquad (7)$$

اذ ان $\Gamma(\alpha)$ تعرف بدالة كاما والتي تحسب كما يأتي :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx = (\alpha - 1)! \qquad (8)$$

عندما تكون قيمة α عدد صحيح موجب, اما عندما تكون قيمة α عدد غير صحيح عندئذ يتم احتسابها كالاتي:

$$\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = \frac{1.2.5 \ldots (\alpha-1)}{2^{\alpha}} \sqrt{\pi} \qquad (9)$$

ويعرف توزيع كاما بأسم توزيع ايرلانك (Erlang distribution) اذا كانت قيمة ((αعدد صحيح.

ولـ $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ فان التوزيع يكون ملتوٍ بمقياس الالتواء $(2/\sqrt{\alpha})$.

فان توزيع كاما المحول النصف دائري يرمز له $CTG(\alpha,\beta)$ يمكن الحصول عليه باستعمال التحويل :

(Wang, M-Z. & Shimizu, K. 2012)

$$\theta = 2tan^{-1}x \qquad (10)$$

بحيث ان θ تعطى ضمن الفترة $(0,\pi)$

ليكن $m(\theta) = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$, باستخدام إسقاط مجسم عكسي فان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG تعطى بالشكل الآتي:

$$g(\theta) = |m'(\theta)|f(m(\theta)) \qquad (11)$$

ومن معادلة (11) سنحصل على الآتي:

$$|m'(\theta)| = |\frac{1}{2}sec^2\left(\frac{\theta}{2}\right)| = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-\cos\left(2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}{1+\cos\ 2\left(\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}\right)$$

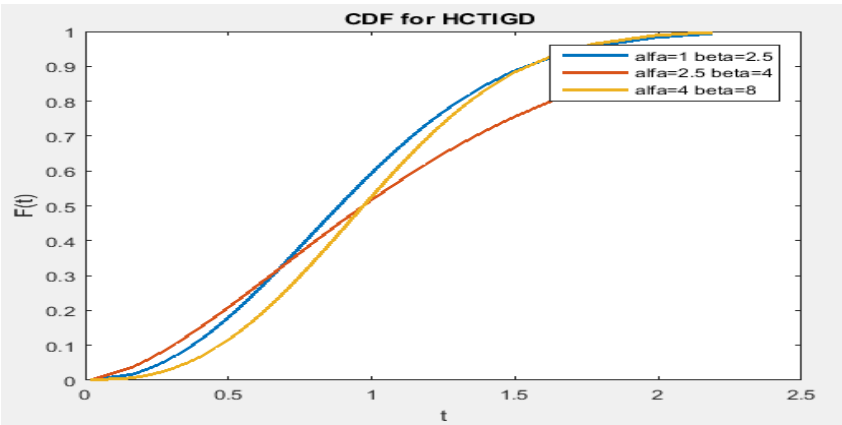
$$= \frac{1}{1+\cos(\theta)} \qquad (12)$$

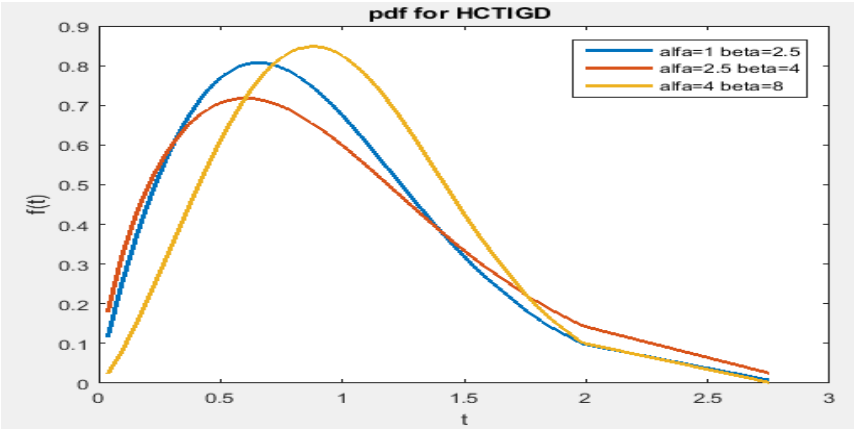
وأن:

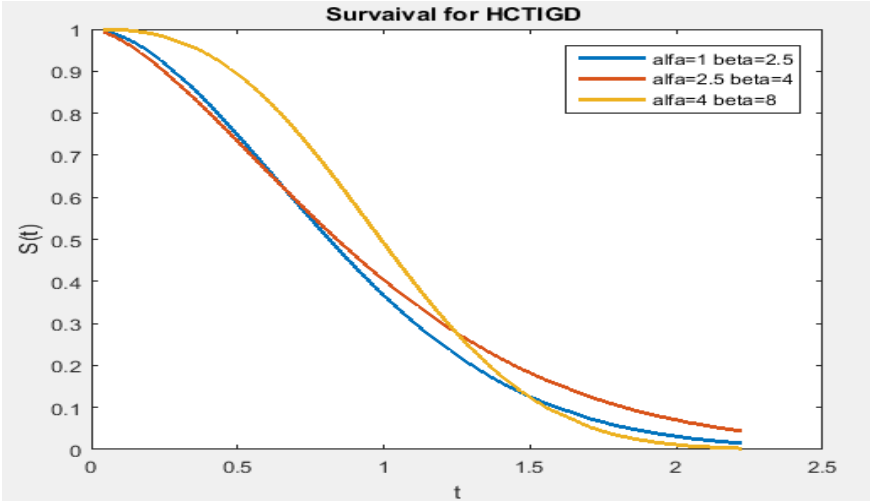
$$f[m(\theta)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \quad exp^{\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right)} \qquad (13)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع $HCTIG(\alpha,\beta)$ كالآتي: (ADZHAR et al , 2019)

$$g(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1+\cos(\theta))} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1} \quad exp^{\left(-\frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right)} \quad ; 0<\theta<\pi \qquad (14)$$







والشكل (2) يبين سلوك دالة الكثافة الاحتمالية ودالة الكثافة التجميعية ودالة البقاء لتوزيع (HCTIG) عند قيم مختلفة للمعلمات (α,β) باستعمال برنامج MatLab .

4. دالة التوزيع التراكمية :

ان دالة التوزيع التراكمية لتوزيع HCTIG(α,β) تعطى بالشكل الآتي:(Venables, W.N. & Ripley, B.D. 2002)

$$G(\theta) = p(\Theta \le \theta) = p(2tan^{-1}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}}\int_0^{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} x^{\alpha-1} \quad exp^{\left(-\frac{x}{\beta}\right)}dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}(1+\cos(\theta)}\gamma\left(\alpha, \frac{\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\beta}\right) \qquad ; 0 \le \Theta \le \pi \qquad (15)$$

حيث أن : $\gamma(\alpha,\beta)$ هس دالة كاما الناقصة والمعرفة بالصيغة

$$.\gamma(\alpha,\beta) = \int_0^x t^{\alpha-1} \quad exp^{(-t)}dt \qquad (16)$$

5. تقدير معلمات توزيع HCTIG باستعمال طريقة مقدر المسافة العامة (GS)

قدمت هذه الطريقة من قبل (BRÄNNSTRÖM, **2018,15**) لايجاد مقدرات فعالة باستعمال المسافات المتداخلة والمسافات الغير متداخلة بين القياسات الدائرية .
ليكن لدينا قياسات نصف دائرية θ_i مرتبة من الاصغر الى الاعلى وكالآتي:

$$0 < \theta_{(1)} < \theta_{(2)} \dots < \theta_{(n)} < \pi$$

ومن ثم تحويلها الى الاحتمالات المقابلة لكل مشاهدة حسب الدالة التراكمية للتوزيع المدروس وكالآتي:

$$0 < F_{\theta_{(1)}} < F_{\theta_{(2)}} \dots < F_{\theta_{(n)}} < \pi$$

وستكون لدينا حالتين لـ **m** من المسافات المرتبة الاولى تعتمد على المسافات المتداخلة والثانية تعتمد على المسافات الغير متداخلة ومنهما نحصل على مقدر لمعلمات التوزيع النصف دائري المدروس وكالآتي:

الحالة الاولى : مقدر المسافة العامة المعتمد على المسافات الغير المتداخلة , ليكن لدينا **m** من المسافات المرتبة الغير متداخلة والمعرفة كالآتي:

$$D_{i,m}^{NOL} = \begin{cases} (F_\delta(\theta_{(i+1)m}) - F_\delta(\theta_{im})) & i = 1,2, \dots . k-1 \\ 1 - F_\delta(\theta_{km}) + F_\delta(\theta_m) & i = k \end{cases} \qquad (17)$$

اذ ان m **عدد صحيح بما فيه الكفاية ليكون اصغر من** n

$$K = \frac{n}{m} \text{ عدد صحيح} \qquad (18)$$

الحالة الثانية : مقدر المسافة العامة المعتمد على المسافات المتداخلة الذي قدم من قبل (BRÄNNSTRÖM, **2018,16**) , ليكن لدينا **m** من المسافات المرتبة المتداخلة والمعرفة كالآتي:

$$D_{i,m}^{OL} = \begin{cases} (F_\delta(\theta_{(i+m)}) - F_\delta(\theta_i)) & i = 1,2, \dots . n-m \\ 1 - F_\delta(\theta_i) + F_\delta(\theta_{i+m-n}) & i = n-m+1 \dots . n \end{cases} \qquad (19)$$

فاذا كان **m=3** فان المسافة الاولى $F_\delta(\theta_4) - F_\delta(\theta_1)$ في كلتا الحالتين و المسافة التالية :

$$D_{2,3}^{NOL} = F_\delta(\theta_7) - F_\delta(\theta_4)$$

$$D_{2,3}^{OL} = F_\delta(\theta_5) - F_\delta(\theta_2)$$

وعموماً , ليكن لدينا مسافات مرتبة عامة من الدرجة **m** يرمز لها $\boldsymbol{D_{i,m}}$ التي تقابل $D_{i,m}^{NOL}(\theta)$ و $D_{i,m}^{OL}(\theta)$ فان دالة المسافة تعرف كالآتي:

$$\boldsymbol{S_{h,n}(\theta) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{S} h(k)\, D_{i,m}(\theta)} \qquad (20)$$

اذ ان :

S=K في حالة المسافات الغير متداخلة و **S=n** في حالة المسافات المتداخلة

h(.) دالة محدبة تخضع لبعض القيود العامة والتي تساوي :

$$h(\theta) = h_\lambda(\theta) = \begin{cases} \frac{\theta^{\lambda+1}-1}{\lambda(\lambda+1)} & if\ \lambda \neq 1, 0 \\ -log(\theta)\ if\ \lambda = 1 \\ \theta log(\theta)\ \ if\ \lambda = 0 \end{cases} \qquad (21)$$

فان مقدر المسافة العامة **GS** يكون كالآتي:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{\theta}} = \underset{\delta\ \in\Theta}{\operatorname{argmax}}\, \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{h,n}}(\boldsymbol{\theta}) \qquad (22)$$

(BRÄNNSTRÖM**, 2018,15-19)**

6. تقدير معلمات توزيع HCTIG باستعمال طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD)

قدمت هذه الطريقة من قبل (**Lund u,1999,20**) لايجاد مقدرات فعالة وذات كفاءة عالية ومبدأ هذه الطريقة هو استعمال طريقة نيوتن رافسون لمرة واحدة فقط بافتراض تقدير اولي للمعلمة(المعلمات) المراد تقديرها والتي تجعل مسافة **Hellinger** (مطلح يستخدم لتحديد التشابه بين توزيعين احتماليين) اقل ما يمكن بين مقدر كثافة معلمي $\mathbf{f_\delta(\theta)}$ ومقدر لامعلمي $\mathbf{f_n(\theta)}$ بالاستناد على زاوية دائرية **θ** أي أن:

$$\widehat{\boldsymbol{\delta}}_{\boldsymbol{MHD}} = \underset{\delta\ \in\boldsymbol{\Theta}}{\mathbf{argmax}} \int_0^{\pi} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{\delta}}(\boldsymbol{\theta})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{f}_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\theta})^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{d\theta} \qquad (23)$$

ولايجاد المقدر بطريقة (**OHD**) نحتاج الى الآتي:

1. مقدر كثافة لبية $\boldsymbol{g_n(\theta)}$ والذي يمكن ان يستخدم كمقدر كثافة لامعلمي $\boldsymbol{f_n(\theta)}$. وبما ان التوزيع المدروس نصف دائري , وهذا يتطلب ان يكون مقدر الكثافة اللبي دائري ايضاً.

   فليكن لدينا الكثافة اللبية الدائرية في زاوية معينة كالآتي:

$$\boldsymbol{g_n(\beta)} = \frac{\boldsymbol{C_\gamma(k_c)^n}}{\boldsymbol{n}} \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{k_c}\left(\frac{\boldsymbol{1-cos(\beta-\theta)}}{\boldsymbol{\gamma^2}}\right) \qquad (24)$$

اذ ان:

$\boldsymbol{k_c}$ النواة الدائرية

$\boldsymbol{C_\gamma(k_c)^n}$ ثابت معياري يؤكد بان $\boldsymbol{g_n(\beta)}$ تكاملها يساوي 1

$\boldsymbol{\gamma}$ معلمة الحزمة التي تسيطر على تمهيد المعلمة

سيتم استعمال النواة الدائرية **Von-misses** الشائعة وهي $\boldsymbol{k_c(\theta) = e^{-\theta}}$ وتبقى المسألة الأهم هي كيفية اختيار معلمة الحزمة $\boldsymbol{\gamma}$ والذي يكون مهمة لكيفية سلوك مقدر كثافة النواة . هنالك طريقتين لاختيار معلمة الحزمة , الاولى باستعمال خاصية **cross-validation** والتي تتطلب عمليات حسابية معقدة وكبيرة . اما الثانية هي طريقة الاختيار التلقائي عن طريق الدالة الآتية:

$$\gamma_{Auto} = \left(\frac{4\pi^{0.5}\left(I_0(\tilde{k})\right)}{\tilde{k}(2I_1(2\tilde{k})+3\tilde{k}I_2(2\tilde{k}))n}\right)^{\frac{1}{5}} \qquad (25)$$

اذ أن:

$\tilde{k}$ مقدر مناسب لمعلمة كثافة **Von-misses** **k**

وبذلك يكون مقدر المعلمة حسب طريقة **OHD** كالآتي:

$$\hat{\delta} = \hat{\delta}_{in} - \frac{\int_0^{\pi} \dot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) g_n(\theta)^{\frac{1}{2}} d\delta}{\int_0^{\pi} \ddot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) g_n(\theta)^{\frac{1}{2}} d\delta} \qquad (26)$$

اذ ان:

$$S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) = f_{\delta}(\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$\dot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ المشتقة الاولى للـ $S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ بالنسبة للمعلمة δ

$\ddot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ المشتقة الثانية للـ $S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta)$ بالنسبة للمعلمة δ

(Haocheng et al., 2018,19-20) (J. Karunamuni1 &Wu, 2011, 3-5)

$$S_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) = f_{\delta}(\theta)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-\frac{(\alpha+1)}{2}} e^{-\frac{1}{2\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad (27)$$

$$\dot{S}_{\hat{\alpha}_{in}}(\theta) = \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)}{2\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)}{2\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}(ln(\beta)-1)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)}{2\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(ln(\beta)-1)}{2}\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}} \tag{28}$$

$$\ddot{S}_{\hat{\delta}_{in}}(\theta) = \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^2}{4\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^2}{4\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}(ln(\beta)-1)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^2}{4\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{\frac{\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 (ln(\beta)-1)^2}{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^2}}{4\frac{\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^{\frac{3}{2}}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^{\frac{3}{2}}}{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))^{2}} \frac{\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{2} (ln(\beta)-1)^{2}}{\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{(ln(\beta)-1)^{2}}{\sqrt{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{(ln(\beta)-1)^{2}}{\sqrt{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{2\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}$$

$$= \frac{(ln(\beta)-1)^{2}}{\sqrt{(\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta)))\left(\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}} -$$

$$\frac{\beta^{\alpha} ln(\beta)\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left(2\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)+1\right)}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} \tag{29}$$

$$\dot{S}_{\hat{\beta}_{in}}(\theta) = \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha}\alpha\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^{2}\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)}{2\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\beta^{\alpha+1}\alpha\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^{2}\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)}{2\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\left(\beta^{\alpha+1}\alpha\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)}{2\beta^2\left(\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \qquad (30)$$

$$\ddot{S}_{\hat{\beta}_{in}}(\theta) = -\frac{\left(\frac{\beta^{\alpha}\alpha\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^2\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^2}{4\left(\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right)^{\frac{3}{2}}} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}}}\left(\frac{\beta^{\alpha}\alpha^2\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^2\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} - \frac{\beta^{\alpha}\alpha\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^2\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \right.$$

$$\left.\frac{2\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^3\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))} + \frac{\beta^{\alpha}\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{-(\alpha+1)} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 e^{-\frac{1}{\beta}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{\beta^4\Gamma(\alpha)(1+\cos(\theta))}\right) \qquad (31)$$

7. المحاكاة :

تم إجراء دراسة محاكاة مونت- كارلو باستخدام برنامج MATLAB لاختبار قدرة طرق التقدير المعروضة في الفقرة (4) وهي طريقة مقدر المسافة العامة (GS) و طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD). تم عرض نتائج تجارب المحاكاة وتحليلها لتقدير معلمات توزيع HCTIG في الجدول (1), والتي سيتم تحليلها بحسب التسلسل، ولأحجام العينات المختلفة والحالات المختلفة للقيم الافتراضية الاوليــة كافة ,تم افتراض مجموعة متنوعة من المعلمات النظرية لـتوزيع (HCTIG) وهي α =1,2.5 و β =0.5,1,2,3 وأحجام عينات مفترضة هي (10,30,50,100,200) والتكرار (1000) ولكل تجربة محاكاة للحصول على تجانس النتائج. تمت مقارنة النتائج باستخدام متوسط مربعات الخطأ MSE ومعدل التحيز **Bias** ونسبة التغطية **CP** أظهرت دراسة المحاكاة تفضيل طريقة مقدر اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة على طريقة المسافة العامة. وفيما يأتي النتائج الموضحة في الجدول (1) التي سيتم تحليلها وكما يأتي:

Table (1) Results of simulation under all sample sizes and theoretical parameters

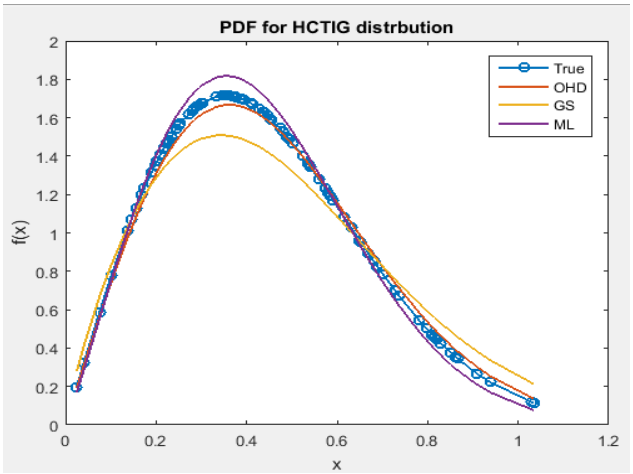
$\boldsymbol{\alpha = 1.5}$ $\boldsymbol{\beta} = 1.5, 3.5, 5.5, 8$

β	Method	Index	n										Best
			10		30		50		100		200		
			α	β	α	β	α	β	α	β	α	β	
1.5													OHD
	OHD	Mean	2.1	2.3	1.9	1.7	1.8	1.7	1.7	1.6	1.6	1.6	
		Bias	0.60	0.80	0.40	0.20	0.30	0.20	0.20	0.10	0.10	0.10	
		MSE	0.360	0.640	0.160	0.040	0.090	0.040	0.040	0.010	0.010	0.010	

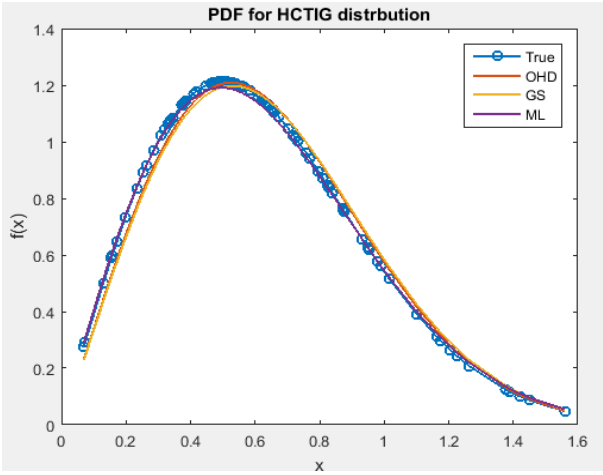
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.4	2.6	2.3	2.5	2.0	1.9	1.9	1.8	1.7	1.7	
		Bias	0.90	1.10	0.80	1.00	0.50	0.40	0.40	0.30	0.20	0.20	
		MSE	0.810	1.210	0.640	1.000	0.250	0.160	0.160	0.090	0.040	0.040	
		CP %	93	93	93	93	95	95	95	95	95	95	
3.5													GS
	OHD	Mean	2.5	4.0	2.1	3.9	1.9	3.8	1.8	3.8	1.7	3.6	
		Bias	1.00	0.50	0.60	0.40	0.40	0.30	0.30	0.30	0.20	0.10	
		MSE	1.000	0.250	0.360	0.160	0.160	0.090	0.090	0.090	0.040	0.010	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.4	3.9	1.9	3.8	1.8	3.7	1.7	3.6	1.6	3.5	
		Bias	0.90	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.20	0.10	0.10	0.00	
		MSE	0.810	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	0.040	0.010	0.010	0.000	
		CP	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
5.5													OHD
	OHD	Mean	1.9	5.9	1.8	5.8	1.7	5.8	1.6	5.7	1.6	5.5	
		Bias	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	0.30	0.10	0.20	0.10	0.00	
		MSE	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	0.090	0.010	0.040	0.010	0.000	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.3	6.3	2.4	6.0	2.1	5.9	1.9	5.8	1.8	5.7	
		Bias	0.80	0.80	0.90	0.50	0.60	0.40	0.40	0.30	0.30	0.20	
		MSE	0.640	0.640	0.810	0.250	0.360	0.160	0.160	0.090	0.090	0.040	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
8													OHD
	OHD	Mean	2.3	9.1	2.1	8.9	1.8	8.7	1.7	8.6	1.6	8.5	
		Bias	0.80	1.10	0.60	0.90	0.30	0.70	0.20	0.60	0.10	0.50	
		MSE	0.640	1.210	0.360	0.810	0.090	0.490	0.040	0.360	0.010	0.250	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	
	GS	Mean	2.7	9.8	2.5	9.4	2.4	9.3	1.9	9.0	1.8	8.8	

ISSN: 2618-0278 Vol. 5No. 16 December 2023

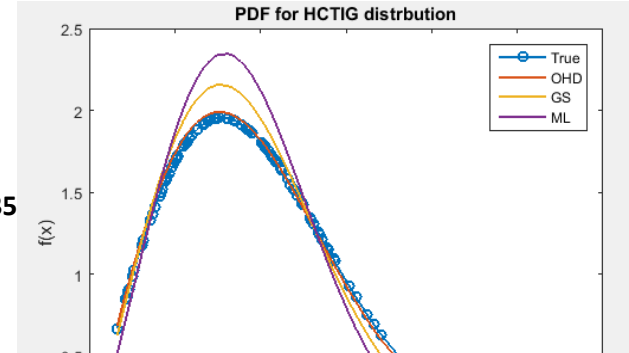
		Bias	1.20	1.80	1.00	1.40	0.90	1.30	0.40	1.00	0.30	0.80	
		MSE	1.440	3.240	1.000	1.960	0.810	1.690	0.160	1.000	0.090	0.640	
		CP %	94	94	94	94	95	95	95	95	95	95	

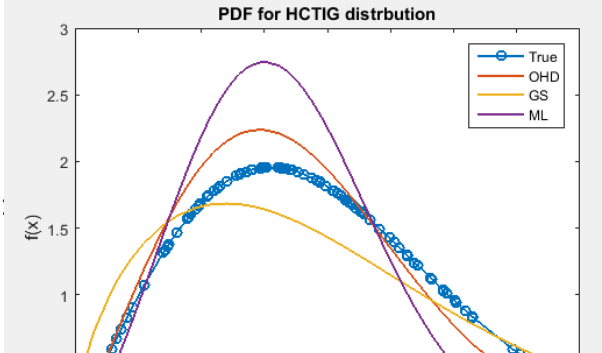


شكل (3) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية α =1.5 وβ=1.5 عند حجم عينة (n=100)



شكل (4) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية α =1.5 و β=3.5 عند حجم عينة (n=100)





شكل (6) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية α =1.5 وβ=8 عند حجم عينة (n=100)

شكل (5) منحنى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع HCTIG عند المعلمات الافتراضية α =1.5 وβ=5.5 عند حجم عينة (n=100)

من جدول (7-3) والاشكال (3) ,(4),(5),(6) وعند القيم الافتراضية **α =1.5 و β=1.5,3.5,5.5,8** يتضح ما يأتي:

1. القيم التقديرية متناسقة مع القيم الافتراضية وقريبة عليها وكلما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدرة من المعلمات الافتراضية ولكافة طرائق التقدير حيث نلاحظ من صف(Mean) متوسط تقديرات المعلمات ان القيم التقديرية للمعلمات α و β متناسقة مع القيم الافتراضية (α =1.5 و β=1.5,3.5,5.5,8) وتكون متقاربة او مساوية للقيم الافتراضية في بعض الأحيان عند احجام العينات الكبيرة (n=200)
2. تفوق طريقة اقل مسافة Hellinger ذو الخطوة الواحدة (OHD) على طريقة المسافة العامة اذا سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند القيم الافتراضية **α =1.5 و β=1.5,5.5,8.** وبمعدل ثلاث مراحل من اصل اربع مراحل من تجربة المحاكاة.
3. تفوق طريقة المسافة العامة (GS) على باقي طرائق التقدير اذا سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند القيم الافتراضية **α =1.5 و β=3.5** وبمعدل مرحلة واحدة من اصل اربع مراحل من تجربة المحاكاة.
4. نلاحظ وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاحجام العينات (n=50 ,100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10, 30).

8. الاستنتاجات :

من خلال ماتم التوصل اليه من نتائج في الجانبين التجريبي والتطبيقي تم التوصل الى الاستنتاجات الآتية:

1. القيم التقديرية متناسقة مع القيم الافتراضية وقريبة عليها ولكما زاد حجم العينة اقتربت المعلمات المقدرة من المعلمات الافتراضية ولكافة طرائق التقدير.
2. تفوق طريقة (OHD) على طريقة (GS) بنسبة 75% اذا سجلت هذه الطريقة اقل معدل تحيز (Bias) واقل متوسط مربعات خطأ (MSE) واكبر نسبة تغطية (CP) عند احجام العينات المفترضة تليها طريقة مقدر المسافة العامة بنسبة 25% .
3. وجود دالة متناقصة بين حجم العينة ومعدل التحيز ومتوسط مربعات الخطأ. وان نسبة التغطية مغلقة جداً عند (95%) لاحجام العينات (n=50 ,100, 200) مع تغيرات طفيفة عند احجام العينات (n=10, 30).
4.

References

1. Abid, Salah H. , Al-Hassany, Saja A., (2016), "On the Inverted Gamma Distribution", International Journal of Systems Science and Applied Mathematics 2016; 1(3): 16-22

2. ADZHAR RAMBLI, IBRAHIM MOHAMED, KUNIO SHIMIZU & NORLINA MOHD RAMLI, (2019), " A Half-Circular Distribution on a Circle" , Sains Malaysiana 48(4)(2019): 887–892

3. Dodge, Y. (2006). The Oxford Dictionary of Statistical Terms. OUP. ISBN 0-19-920613-9.

5. Haocheng Li , Jingjing Wu , Jian Yang, (2018), " MINIMUM PROFILE HELLINGER DISTANCE ESTIMATION FOR A TWO-SAMPLE LOCATION-SHIFTED MODEL ", Journal of Data Science, DOI: 10.6339/JDS.201807_16(3).

6. Gato, R. & Jammalamadaka, S.R. (2003) Inference for wrapped symmetric a-stable circular models. The Indian Journal of Statistics 65(2): 333-355.

7. Jammalamadaka, S.R. & SenGupta, A. (2001) Topics in Circular Statistics. Singapore: World Scientific.

8. Jones, M.C. & Pewsey, A. (2005) A family of symmetric distributions on the circle. Journal of the American Statistical Association 100: 1422-1428.

9. Lund, U. (1999) Least circular distance regression for directional data. Journal of Applied Statistics 26: 723-733.

10. McKay, J. (1987) On computing discriminants. The American Mathematical Monthly 94(6): 523-527.

11. Minh, D.L.P. & Farnum, N.R. (2003) Using bilinear transformations to induce probability distributions. Communications in Statistics-Theory and Methods 32: 1-9.

12. Phani, Y., Girija, S.V.S. & Rao, A.V.D. (2012) Circular model induced by inverse stereographic projection on extreme-value distribution. Engineering Science and Technology 2(5): 881-888.

13. Rohana J. Karunamuni; and Jingjing Wu, (2011), " One-step Minimum Hellinger Distance Estimation ", Computational Statistics & Data Analysis · December 2011 DOI: 10.1016/j.csda.2011.06.029 · Source: DBLP

14. Venables, W.N. & Ripley, B.D. (2002) Modern Applied Statistics with S. 4th ed. New York: Springer.

15. Yedlapalli, P. , Sastry, K. & Rao, A. (2019). On Stereographic Semicircular Quasi Lindley Distribution . Journal of New Results in Science , 8 (1) , 6-13 .