Warith Scientific Journal

استخدام طريقة تصفية الجسيمات لنموذج ماركوف المخفي مع التطبيق
Using Particle Filtering for Hidden Markov models with application

م.د. انصاف جاسم مهدي
Ass.Lec. Ansaf J. Mahdi
ansaf.j@uokerbala.edu.iq
جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد
Kerbala University / College of Administration and Economics

أ.د. مهند فائز كاظم السعدون
Prof. Dr. Muhannad F Al-Saadony
Muhannad.alsaadony@qu.edu.iq
جامعة القادسية/ كلية الادارة والاقتصاد
Al-Qadisiyah University / College of Administration and Economics

المستخلص:
يتضمن هذا البحث دراسة نماذج ماركوف المخفية الذي شهد اهتماما واسعاً من قبل الباحثين والدارسين والتطبيقات الحديثة ، اذ تعتبر كمجموعة منتهية من الحالات ، التي تكون فيها الحالات مرتبطة بتوزيع احتمالي معين .يهدف هذا البحث الى تقدير معلمات انموذجي CIR وSABR باستعمال الطرائق البيزية في التقدير وفقا لأسلوب تصفية الجسيمات particle filtering. وقد استعرض في هذا البحث نماذج ماركوف المخفية وطرائق مقدرات بيز واحدى الطرائق الاساسية التي تستخدم في مقدرات بيز التي هي طريقة تصفية الجسيمات (particle filtering).اذ تناول الجانب العملي لهذا البحث جانبان وهما الجانب التجريبي والجانب التطبيقي ، ففي الجانب التجريبي تم استعمال طريقة تصفية الجسيمات في تجربة المحاكاة ولثلاث مستويات من العينات (صغيرة ومتوسطة وكبيرة) وبأحجام مختلفة ،وذلك عن طريق تحديد اقل قيمة لمشاهدة نموذج CIR وبأوقات زمنية مختلفة ، بالإضافة الى تحديد القيمة الاولية ، وتحديد او انشاء الخطأ العشوائي من توزيع معين ، وحساب تقديرات معالم نموذجي CIR وSABR بالاعتماد على طريقة الامكان الاعظم في تحديد معلمات النموذج (σ,β,α) وذلك لبناء او توليد عمليات عشوائية ذات متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي العادي ، ومن ثم رسم هذه المتغيرات المتولدة برسوم او اشكال بيانية للحصول على افضل النتائج، فضلا عن الجانب التجريبي تم تطبيق الجانب العملي التطبيقي على البيانات المالية لسوق العراق للأوراق المالية لسنوات مختلفة . اذ توصلت الدراسة الى ان عمليات التقلب في تصفية الجسيمات Partical filtering لتقدير عملية CIR وSABA بقيت دائما اكبر من الصفر الذي هو يعتبر الشرط الاساسي للتقدير.
الكلمات المفتاحية : تصفية الجسيمات ، نماذج ماركوف المخفية.

Abstract: This research includes the study of hidden Markov models, which has witnessed wide interest by researchers, scholars and modern applications, as it is considered as a finite set of cases, in which the cases are related to a certain probability distribution. This research aims to estimate the parameters of the CIR and SABR models using Bayesian particle filtering methods. In this research, he reviewed hidden Markov models and methods of Bayes estimators, and one of the basic methods used in Bayes estimators is the particle filtering method. The practical side of this research dealt with two aspects, namely the experimental side and the applied side. In the experimental side, the particle filtering method was used. In the simulation experiment and for three levels of samples (small, medium and large) and different sizes, by selecting the lowest value to watch the CIR model at different times, in addition to determining the initial value, determining or creating the random error from a specific distribution, and calculating the estimates of the parameters of the CIR and SABR models depending on On the method of the greatest possibility in determining the parameters of the model (σ, β, α) in order to build or generate random processes with random variables that follow the normal distribution, and then draw these generated variables with graphics or shapes to obtain the best results, as well as the experimental side was applied The practical aspect applied to the financial statements of the Iraq Stock Exchange for different years. The study concluded that the particle filtering fluctuations for CIR and SABA estimation were always greater than zero, which is considered the basic condition for estimation.

Keywords: particle filtering, hidden Markov models.

1.المقدمة:

ان نماذج ماركوف المخفية (HMMs) هي نماذج تصادفية ظهرت في اواخر الستينيات وبداية السبعينات من القرن العشرين ، قدمت في الاصل من قبل العالمين (Baum and Petrie) في عام 1966، ويعبر عن نماذج ماركوف المخفية بالصيغة (λ=(A,B,∏ ، إذ ان A هي مصفوفة احتمال انتقال الحالة ، B هي مصفوفة احتمالية الرابط بين الحالات المخفية والمشاهدات ، ∏ هي متجه توزيع الحالة الابتدائية ، وتتكون نماذج ماركوف المخفية من ثلاث مسائل اساسية هي(مسالة التقويم ، مسألة حل الشفرة ومسألة التدريب)

في بحثنا هذا سنقوم بتقدير معالم نموذجي CIR و SABR كنماذج ماركوف المخفية باستخدام طريقة تصفية الجسيمات (particle filtering) والتي تعتبر اهم الطرائق لتقدير المعالم .

2. منهجية البحث:

2.1 مشكلة البحث:

عدم وجود تقديرات لمعالم انموذج CIR وSABR يأخذ بنظر الاعتبار المعلومات السابقة عن هذه المعلمات .

2.2هدف البحث:

يهدف الى تقدير معلمات انموذجي CIR و SABR باستعمال الطرائق البيزيه في التقدير وفقاً لأسلوب تصفية الجسيمات (particle filtering) .

الجانب النظري:

سوف يتم التطرق الى بعض امثلة من نماذج ماركوف المخفية وطرائق التقدير وكما يلي :

3. نماذج ماركوف المخفية [1]

ان عملية ماركوف تطلق على العمليات التصادفية ، وفي هذا الانموذج يكون احتمال الانتقال الى حالة معينة في المستقبل يعتمد فقط على حالتها في الحاضر ولا يعتمد على حالتها في الفترات الزمنية السابقة ، ويطلق على عملية ماركوف بسلسلة ماركوف عندما يكون فضاء المعلمة (الزمن) متقطع .

حيث ان كلمة المخفي في أنموذج ماركوف المخفي تشير الى سلسلة ماركوف وليست الى معلمات الانموذج ، اذ يعبر عن نماذج ماركوف المخفية بالصيغة الاتية:

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

حيث ان A: تمثل مصفوفة احتمال انتقال الحالة .

B تمثل مصفوفة احتمالية رابطة بين الحالات المخفية والحالات المشاهدة.

π تمثل متجه توزيع الحالة الابتدائية ،حيث ان $\pi=[\pi_{ij}]$ وهو احتمال ان يبدأ i النظام من الحالة j

وهنالك ثلاث حالات رئيسة يجب التعامل معها لصياغة انموذجات ماركوف المخفية وهي(حالة التقييم ، حالة فك التشفير، وحالة التدريب). وان انموذج ماركوف المخفي يتكون من عمليتين عشوائيتين وهما:

العملية العشوائية الاولى:

هي سلسلة ماركوف التي تتميز بوجود الحالات والاحتمالات الانتقالية ، حيث ان هذه الحالات تكون غير مرئية او مشاهدة ولهذا السبب سميت مخفية .

العملية العشوائية الثانية:

وتعتمد على التوزيع الاحتمالي للحالات (كل حالة تقترن بتوزيع احتمالي) .

ولتقدير نماذج ماركوف المخفية نحتاج الى التعرف على طرائق مقدرات بيز

4. Cox-Ingersoll-Ross model[7][8]:

تم اقتراح نموذج Cox-Ingersoll-Ross (CIR) أو كما يسمى انموذج سعر الفائدة (interest rate model) من قبل العلماء (J.C Cox و J.E Ingersoll و S.A Ross) في عام (1985) لحل مشكلة تسعير السندات ذات القسيمة الصفرية بخصم مع آجال استحقاق مختلفة في ظل ظروف عدم الموازنة (no-arbitrage) ، وذلك من خلال افتراض أن تطور معدل سعر الفائدة الأساسي (short-term interest rate) على المدى القصير هو حل وحيد لعملية الانتشار(diffusion process) للمعادلة التفاضلية العشوائية (SDE) وكالاتي:[8]

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \qquad \dots\dots\dots (1)$$

مع العلم ان الحالة الأولية $r(0) = r_0 > 0$. وان $\{W_t = W(t)\}_{t\geq 0}$ هي تمثل عملية وينر (Wiener process) القياسية الأحادية البعد. وأن عملية معدل الفائدة (the interest rate process) $(r(t))_{t\geq 0}$ تسمى CIR أو عملية الجذر التربيعي (square root process).

وأن α و μ و σ هما معلمات ، اذ ان α تمثل سرعة الارتداد (the speed of adjustment) للمتوسط μ الذي هو متوسط طويل المدى ، ومعدل تقلب (volatility rate) لـ σ. اذ ان الحل الوحيد للمعادلة رقم (1) تُعرف أيضًا باسم عملية CIR :[7]

$$r_t = r_s + \int_s^t \alpha(\mu - r_u)du + \sigma\int_s^t \sqrt{r_u}dW_u \qquad s < t$$

وبالتالي فأن القيمة المتوقعة :

$$E[r_t/r_s] = r_s + \int_s^t \alpha(\mu - E[r_u/r_s]\, du \qquad s < t$$

حيث ان $m_t = E[r_t/r_s]$ ، وان:

$$\frac{d}{dt}m_t = \alpha(\mu - m_t) \qquad s < t$$

وعلية فأن القيمة المتوقعة لـ r_t عندما تكون r_s معلومة هي:

$$E[r_t/r_s] = m_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu\left(1 - e^{-\alpha(t-s)}\right) \qquad s < t$$

وبالمثل يمكن اثبات ان التباين يكون كالاتي:

$$Var[r_t/r_s] = \frac{r_s\sigma^2}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)} + \frac{\mu\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)^2}\right)$$

وبالتالي فأن انموذج ماركوف المخفي هو: :

$$X_{t+1} = X_t + (\theta_1 - \theta_2 X_t)\Delta\theta_t + \theta_3\sqrt{X_t}dw_t$$

$$Y_t = \emptyset X_t + \sigma u_t$$

حيث ان Δt تمثل الفرق بين الازمنة ، وان Θ_1 و Θ_2 وΘ_3 و Φ و σ تمثل معالم النموذج

وان $\Delta w_t \sim N(0, \Delta)$

وان $u_t \sim N(0, \Delta)$

5. The stochastic alpha beta rho model (SABR)[4][5]:

هو نموذج تقلب عشوائي للأسعار الآجلة (forward prices) المستعملة بشكل شائع في نمذجة مشتقات أسعار الفائدة (interest rate). وان ألفا وبيتا ورو(alpha, beta and rho) هي معلمات يجب قياسها. اذ يصف الفا Alpha حجم التقلب في سعر الأصل الأساسي(the price of the underlying asset) ؛ ويصف بيتا Beta حساسية تحركات الأسعار الآجلة للسعر الفوري (the sensitivity of forward price movements to the spot price)؛ وان رو rho يصف العلاقة بين التحركات في السعر الآجل(the forward price) والتحركات في تقلب سعر الأصل الأساسي(the price of the underlying asset).

ان نموذج SABR يحاول التقاط ديناميكيات سعر آجل واحد(single forward prices)، حيث ان هذا السعر الآجل يمكن أن يكون هو LIBOR الآجل ، وسعر المقايضة الآجلة (forward swap prices)، والعائد الآجل على السند (the forward yield on a bond). وان نموذج SABR يعد امتدادًا لـنموذج CEV كالاتي: [4]

$$dF(t) = \sigma F(t)^{\beta} dW(t) \qquad \dots\dots\dots (2)$$

اذ أن σ هو معلمة التقلب (the volatility parameter) و المسمى β-volatility

يتم الحصول على الديناميكيات الكاملة لنموذج SABR من خلال المعادلتين الاتيتين:[4][5]

$$dF(t) = \sigma(t) C\big(F(t)\big)^{\beta} dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)\, dZ(t) \qquad \dots\dots\dots (3)$$

حيث ان $F(t)$ و $\sigma(t)$ تمثل عملية السعر الآجل و التقلب (the forward rate process and volatility)) ، و $W(t)$ و $Z(t)$ تمثل عمليتا وينر(Wiener processes) او تمثل حركات براونية قياسية BM (Brownian motions) واللتان ترتبطان بشكل عام بـ r كما في المعادلة الاتية :[4][5]

$$E[dW(t)dZ(t)] = r dt \qquad \dots\dots\dots (4)$$

حيث ان r يمثل معامل ارتباط ثابت ، وتم افتراضه في بحثنا هذا مساوياً الى الصفر.

اذ ان هنالك حالة خاصة للمعادلة (3) التي لها دور مهم في التحليل ، والحالة هي عندما $C(F(t))=1$ و $r=0$ ، ففي هذه الحالة يكون للمعادلات الاساسية للحركة (motion) شكل بسيط وكالاتي:[5]

$$dF(t) = \sigma(t) dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha\sigma(t) dZ(t) \qquad \dots\dots\dots (5)$$

مع $E[dW(t)dZ(t)] = 0$

حيث يشار الى النموذج اعلاه في المعادلة (5) بأنموذج SABR العادي (the normal SABR model)

وأن معامل الانتشار C (F) يُفترض ان يكون من النوع ثابت مرونة التباين CEV (constant-elasticity-of-variance) :[4]

$$C(F) = F^{\beta} \qquad \text{… … … (6)}$$

حيث ان $0 \le \beta < 1$

فعلى افتراض أنه تم اختيار عدد مناسب من F (t) بحيث يكون التوقع الشرطي للقيمة التالية مساوٍ للقيمة الحالية بغض النظر عن جميع القيم السابقة مارتينجال (martingale) ، والعملية σ(t) هي المكون العشوائي لتقلب F(t) ، والثابت α المعروف باسم volvol ، هو التقلب اللوغاريتمي الطبيعي لـ σ (t). اذ ان الديناميكيات تكمل بالشرط الأولي (the initial condition) كالاتي:[4][5]

$$F(0) = F^0$$

$$\sigma(0) = \sigma^0 \qquad \text{… … … (7)}$$

اذ ان F^0 تمثل القيمة الحالية للأمام (the current value of the forward) ، وσ^0 تمثل القيمة الحالية (the current value) لتقلب β (β-volatility).

باستثناء الحالة الخاصة الموجودة في المعادلة (5) عندما $\beta = 0$ ، لا يوجد لها حل واضح معروف لهذا النموذج. اذ يمكن حل الحالة العامة تقريبيًا عن طريق توسيع مقارب في المعلمة الاتية:[4]

$$\varepsilon = \alpha\sqrt{T} \qquad \text{… … … (8)}$$

حيث ان T تمثل وقت استحقاق الاختيار(the time-to-maturity of the option). وأن SABR هو نموذج أمامي فردي ، وإن وقت انتهاء صلاحية الاختيار T يحدد مقياسًا زمنيًا طبيعيًا للمشكلة. اذ ان $t = Ts$ ، تعرف كالاتي:[4]

$$X(s) = F(Ts)$$

$$Y(s) = \frac{\sigma(Ts)}{\alpha} \qquad \text{… … … (9)}$$

وان صياغة ديناميكيات SABR تعاد كتابتها بالشكل الاتي:[4]

$$dX(t) = \varepsilon Y(t) C\big(X(t)\big) dW(t)$$

$$dY(t) = \varepsilon Y(t) dZ(t) \qquad \text{… … … (10)}$$

فعند استعمال قانون القياس المعروف جيدًا $W(Ts) = \sqrt{T}W(s)$ للحركة البراونية. فأن الشروط الأولية تأخذ النموذج الاتي:[4]

$$X(0) = F^0$$

$$Y(0) = \frac{\sigma^0}{\alpha} \qquad \text{… … … (11)}$$

ويمكن دراسته على شكل نموذج ماركوف المخفي ، ولقد تم دراسة النموذج بشكل مخفي كالاتي:

 ISSN: 2618-0278 Vol. 5No. 14 June 2023

$F_t = F_{t-1}^{\beta} + \sigma_t F_{t-1} \Delta w_{1,t}$

$\sigma_t = \sigma_{t-1} + \alpha \Delta w_{2,t}$

6. اسلوب بيز[3][6]: Style Bay's

تعتمد النظرية البيزية في اسلوبها وتحليلها واستنتاجاتها على المعلومات التي توفرها المشاهدات (العينات) فضلا عن المعلومات التي تأتي من الاعتقاد الشخصي والتي تدعى بالمعلومات الأولية (Prior Information) وان المدرسة البيزيه تتميز عن المدرسة التقليدية بأنها تعامل المعلمات في التوزيعات الاحتمالية كمتغيرات عشوائية لها توزيع احتمالي.

يركز اسلوب بيز في التقدير على المعلمة θ التي هي كمية غير معروفة ، حيث ان المعلمة لها قيمة فعلية ولكن غير معروفة المعالم وبالتالي فهي قيمة عشوائية ، وعلى التوزيع السابق P(θ) الذي ينص على عدم المعرفة الاولية بشان المعلمة ، حيث ان التوزيع السابق يتم انشاؤه بواسطة تحليل وقياس المعلومات التاريخية والمعرفة والمعتقدات المؤهلة ، للحصول على مزيد من المعلومات حول المعلمة ، وان جمع بيانات المعالم $D=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ للدالة المشتركة من ($x_1,x_2,\dots,x_n$) للدالة θ تدعى بدالة الاحتمال (likelihood function) ويرمز له بـ P(D/θ) .

اما لحساب التوزيع اللاحق (Posterior distribution) الذي ينص على تحديث عدم المعرفة الاولية لـ θ في ضوء المعلومات الجديدة ، وان التوزيع اللاحق نستطيع إيجاده بتطبيق نظرية بيز المعروفة (Bay's Theorem) وهي:

$$P(\theta/D) = \frac{P(\theta)P\,(D/\theta)}{P(D)} = \frac{P(\theta)P\,(D/\theta)}{\int P(\theta)P\,(D/\theta)\,d\theta} \propto P(\theta)P(D/\theta)$$

او

$$\text{Equivalently Posterior} = \frac{Prior \times liklehood}{constant} \propto Prior \times liklehood$$

ومن احدى الطرائق الاساسية التي تستخدم في مقدرات بيز هي طريقة تصفية الجسيمات (Particle Filtering).

7. ترشيح او تصفية الجسيمات[2] Particle Filter (PF)

تبدأ الخوارزمية بعينة مونت كارلو $B_0 = \{\theta_{0,i} \quad , i = 1,2,\dots,M\}$ من $h(\theta_0)$ ، ثم يتم تحديث B_{t-1} بشكل متكرر في عينة مونت كارلو $B'_t = \{\theta'_{i,j}\}$ من التوزيع السابق $h'_t = h(\theta_t/D_{t-1})$ وثم عينة مونت كارلو $B_t = \{\theta_{t,i}\}$ من الجزء اللاحق h_t في الوقت t. بمعنى آخر ، يتم دفع عناصر B_0 ("الجسيمات") من خلال سلسلة من خطوات التحديث لتوليد عينات مونت كارلو المرغوبة من f_t و h_t . ان المفتاح الرئيسي هي تمثيل h'_t كتلافي (as a convolution) h_{t-1} . ونموذج الانتقال كـ

$$h'_t = h(\theta_t/D_{t-1}) = \int p(\theta_t/\theta_{t-1})\; dh_{t-1}(\theta_{t-1}) \qquad \dots\dots\dots (12)$$

حيث ان $\acute{h}_t \equiv h(\theta_t/D_{t-1})$ يمثل التوزيع السابق عند الوقت t.

والتحديث اللاحق

$$h_t(\theta_t) = h(\theta_t/D_t) \propto h'_t(\theta_t) f(y_t/\theta_t) \qquad \dots\dots\dots (13)$$

حيث ان $h_t \equiv h(\theta_t/D_t)$ تمثل اللاحق عند الوقت t.

بدلاً من إنشاء عينات مونت كارلو من التوزيعات المستهدفة ، تقوم الخوارزمية بإنشاء عينات مونت كارلو من كثافات أخذ العينات المهمة مع الأوزان المقابلة $W_t = \{w_{ti} \quad , i = 1,2, \dots, M\}$ لـ B_t و $W'_t = \{w'_{ti} \ , \ i = 1,2, \dots, M\}$ لـ B'_t . ولتكن $\hat{h}_t \approx h_t$ و $\hat{h}'_t \approx h'_t$ ترمز او تدل على أهمية كثافة العينات. ثم $w_{ti} = h_t(\theta_{t,i}) / \hat{h_t}\,(\theta_{t,i})$ و $w'_{ti} = h'_t(\theta_{t,i}) / \widehat{h'}_t\,(\theta_{t,i})$ والتكاملات اللاحقة فيما يتعلق بالتوزيعات المستهدفة يمكن أن تكون تقريبا كالاتي:

$$\int g(\theta_t) h(\theta_t/D_t) d\theta_t \approx \frac{1}{\sum w_{ti}} \sum_{i=1}^{M} w_{ti} g(\theta_{t,i})$$

مع متوسط مونت كارلو الذي يمثل جميع الجسيمات $(\theta_{t,i}) \in B_t$ ، وهذا يسمح لنا بتقريب h'_t باستخدام التمثيل من المعادلة (12) كالاتي:

$$h'_t(\theta_t) \approx \hat{h}'_t(\theta_t) = \frac{1}{\sum w_{ti}} \sum w_{t-1,i}\, p(\theta_t/\theta_{t-1,i}) \qquad \dots\dots\dots (14)$$

يمكن بعد ذلك أن يستمر مرشح الجسيمات الأساسي على النحو التالي. على افترض أن B_{t-1} و W_{t-1} متاحان. فأولاً ، يتم توليد B'_t عن طريق اخذ عينات من $\hat{h}'_t(\theta_t)$ ، وذلك كالاتي:

(1) أخذ العينات $\Theta_{t-1,i}$ من B_{t-1} مع احتمالات تتناسب مع $W_{t-1,i}$

(2) القيام بإنشاء $\theta'_{t,i} \sim p(\theta'_t/\theta_{t-1,i})$ والقيام بتسجيل الأوزان $w'_{ti} = 1/M$

(3) واخيرا تحديد B_t عن طريق ضبط $\theta_{t,i} \equiv \theta'_{t,i}$ و $w_{ti} \propto f\left(y_t/\theta_{t,i}\right)$ بما يتناسب مع عامل الامكان الاعظم لـ y_t .

هذه هي فكرة مرشح الجسيمات للمتغير الإضافي ، باستثناء أنه من خلال الجمع بين الخطوتين (1) و (3) ، تجعل الخوارزمية أخذ العينات أكثر كفاءة. على حسب المعادلة (14) ، نحدد:

$$h_t \approx \hat{h}_t \propto \sum_i w_{t-1,i} f(y_t/\theta_t) p\left(\theta_t/\theta_{t-1,i}\right) \qquad \dots\dots\dots (15)$$

كتقريب لمونت كارلو لـ h_t ، بالاعتماد على B_{t-1} و W_{t-1}. وذلك بـ:

(1) زيادة $\hat{h}_t\,(\theta_t)$ إلى نموذج مشترك $\hat{h}(\theta_{t,i})$

(2) تقريب $\hat{h}\left(\theta_{t,i}\right) \approx g(\theta_t, i)$ باستبدال θ_t في $f(y_t/\theta_t)$ بواسطة $\mu_{t,i} = E(\theta'_{t,i}/\theta_{t-1,i})$

(3) القيام بإنشاء $g \sim (\theta_t, i)$ واستخدم أوزان $w_{t,i} = f\left(y_t/\theta_{t,i}\right)/f\left(y_t/\mu_{t,i}\right)$

ان الميزة الرئيسية للخوارزمية هي كالاتي:

1. زيادة $\hat{h}_t(\theta_t)$ في المعادلة (15) إلى

$$\hat{h}(\theta_t, i) \propto w_{t-1,i} f(y_t/\theta_t) p(\theta_t/\theta_{t-1,i})$$

2. استبدل التقريب $f\left(y_t/\mu_{t,i}\right) \approx f(y_t/\theta_t)$ ، باستخدام $\mu_{ti} = E(\theta_t/\theta_{t-1,i})$ ، للحصول على

$$g(\theta_t, i) \propto w_{t-1,i} f\left(y_t/\mu_{t,i}\right) p\left(\theta_t/\theta_{t-1,i}\right) \qquad \dots\dots\dots (16)$$

ليكن $g(i) \propto w_{t-1,i} f\left(y_t/\mu_{t,i}\right)$ ترمز الى تطبيق الحدية (marginal) من i الى $g(\theta_t, i)$ للحصول على $i \sim g(i)$ و $\theta_{t,i}/i \sim p\left(\theta_t/\theta_{t-1,i}\right)$

3. تسجيل الوزن

$$w_{ti}=\frac{\hat{h}(\theta_{t,i},i)}{g(\theta_{t,i},i)}=\frac{f(y_t/\theta_{t,i})}{f(y_t/\mu_{t,i})}$$

الجانب التجريبي والتطبيقي:

8 .الجانب التجريبي

8.1 المقدمة عن مفهوم المحاكاة : Introduction Simulation Concept:

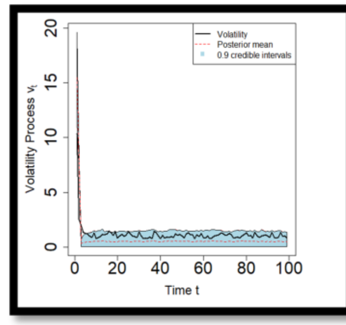
ان المنهـج التجريبي (Empirical Approach) يعـد من المناهج العلمية التي لها جذور واسـاس في التاريخ الانساني القديم ، ونظـرا للسرعـة الفائقـة التي توفرهـا البرامـج الالكترونيـة بمختلـف انواعهـا من حـزم جـاهزة ، دفـع اغلب البـاحثين بمختلـف تخصصـاتهـم الى اعتمـاد اسـلوب المحاكـاة (Simulation) لغرض تطبيق الطرائق الخاصة بالنموذج المدروس والمتمثل بنماذج ماركوف المخفية ،اذ تعرف المحـاكـاة بأنها طـريقة تـحليلية عـددية عـلمية تحاول استـعمال مناهج وأساليـب رياضيـة منهجيـة ، وذلك لغرض أيجـاد صورة طبق الاصـل من أي نمـوذج من دون الرجـوع الى اخذ ذلك النمـوذج ، كما وان اسـلوب المحـاكـاة يستخدم عادة لـوصف سلوك نظام حركـي معين عن طريق تطبيق تجارب تكون مماثلة وملائمة ومقاربـة للنموذج الحقيقي والواقعي الموجود اصلا.

ففي هذا الجانـب سيتـم توليـد متغيرات الاخطاء العشوائية والخاضعة للتوزيعـات التي من خلالها يتم ايجاد متغير السلسلة لنماذج ماركوف المخفي ومن ثم اتباع مقدر بيز لتقدير معالم نماذج ماركوف المخفي ، وكما تم ذكره في الجانب النظري.

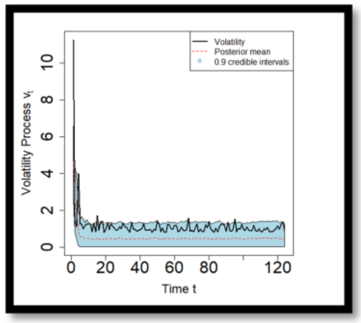
8.2 مخطط بناء تجربة المحاكاة

لغرض تشغيل النموذج باستخدام اسلوب المحاكاة استخدمنا المعلومات الاتية باستخدام البرمجة بلغة(R 4.2.0) ، اذ لابد من تحديد اهم العوامل الخاصة لمراحل بناء تجارب المحاكاة ، وذلك لغرض تحليل البيانات تم تحديد حجوم العينات بأربعة حجوم للعينات (صغيـرة ، متوسطـة، كـبيرة) وهي(N=100, 125,150) على التوالي ،ولغرض تشغيل نموذج Partical filtering لنموذج CIR تم تحديد اقل قيمة لمشاهدة نموذج CIR والتي تبدأ من (Ft=1) ولأوقات زمنية تصل الى (t=20) بقيمة اولية (Initial Value) تساوي (y=0.02) لحجم عينة (N=50)، وتحديد معلمات النموذج بـ (α=1.25 و β=0.25 و σ=1.5). اذ ان التغير بالزمن ($dw=\frac{T}{N}$) ، ثم اجرينا عملية التوليد وذلك باضافة حد المتغير العشوائي الذي يولد من توزيع طبيعي موجب بمتوسط يساوي (صفر) وتباين يساوي (5)، اي ان $y\sim r\ norm(0{,}5)$.

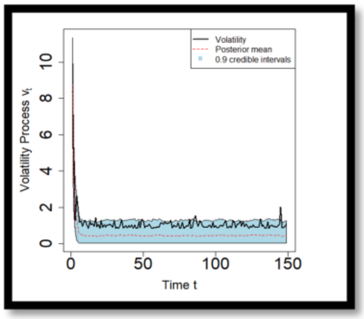
اذ قدرنا معلمات النموذج اعلاه باستخدام دالة الامكان الاعظم(Maximum likelihood function) ،ومن بعد ذلك تم توظيف هذه المقدرات باستخدام MCMC حيث كان عدد الدورات (10000) دوره وتم استخدام قيم ابتدائية وهي عندما (T=20)، اذ كانت النتائج كالاتي:



الشكل 1
تقديرات Partical filtering لنموذج CIR المخفي



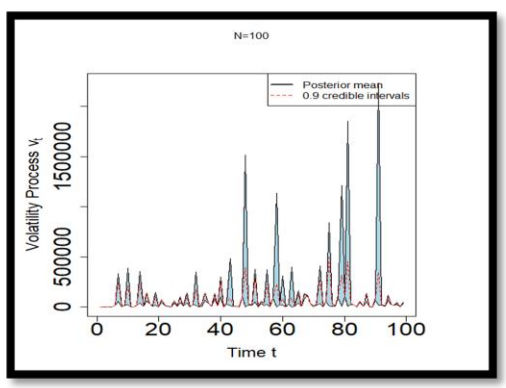
الشكل2
تقديرات Partical filtering لنموذج CIR المخفي



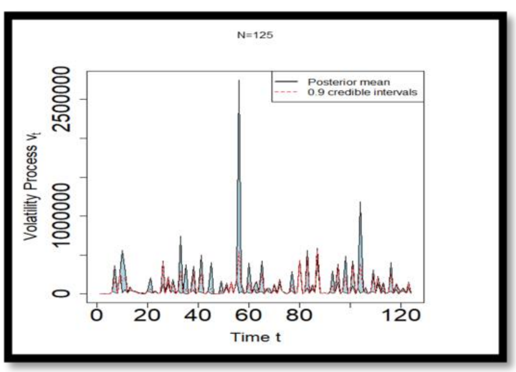
الشكل
تقديرات Partical filtering لنموذج CIR المخفي

في الشكل(1) والشكل (2) والشكل (3) لأحجام العينة المختلفة وهي عندما (N=100 و N=150 و N=200) على التوالي، يتكون من عمليات التقلب (volitility Process) مع الزمن (Time)، اذ يلاحظ بأن عمليات التقلب بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

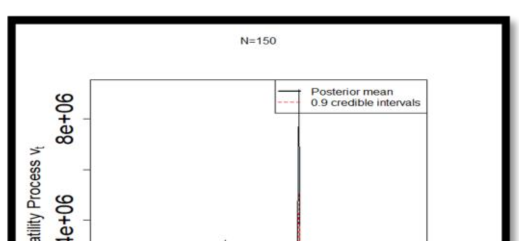
ولغرض تشغيل نموذج Partical filtering لنموذج SABR استخدمنا المعلومات الاتية :
اذ اعطينا للمعالم σ=0.75 و α=0.2 ، والزمن الاول (T_1=10) والزمن الثاني (T_2=5) وحجم العينة (N=100)، اذ ان التغير بالزمن الاول $(dw_1 = \frac{T_1}{N})$ والتغير بالزمن الثاني $(dw_2 = \frac{T_2}{N})$ ، ثم اجرينا عملية التوليد وذلك باضافة حد المتغير العشوائي الذي يولد من توزيع طبيعي موجب بمتوسط يساوي (واحد) وتباين يساوي (3)، وبالنسبة لـ σ تولد ايضا من التوزيع الطبيعي الموجب بمتوسط يساوي(2) وتباين يساوي (5) ، ومن بعد عملية التوليد قمنا بالاجراءات الاتية:
اذ قدرنا معلمات النموذج اعلاه باستخدام دالة الامكان الاعظم(Maximum likelihood function)، علماً ان المتوسط للنموذج الاول (حد المتغير العشوائي) يساوي (صفر) ومتوسط النموذج الثاني(σ)يساوي (صفر) ايضا . ومن بعد ذلك تم توظيف هذه المقدرات باستخدام MCMC حيث كان عدد الدورات (10000) دوره وتم استخدام قيم ابتدائية وهي عندما (T_1=10، T_2=5)، اذ كانت النتائج كالاتي:



الشكل 4:تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي



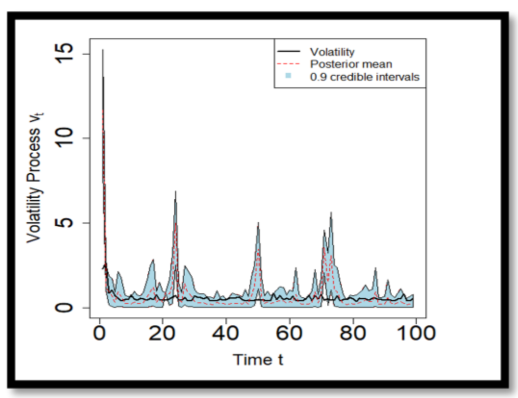
الشكل 5: تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي



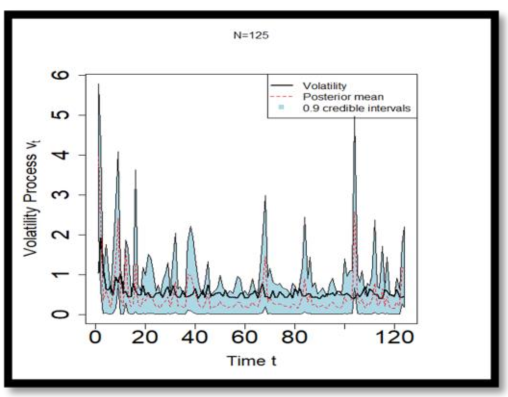
في الشكل(4) والشكل (5) والشكل (6) لأحجام العينة المختلفة وهي عندما (N=100 و N=150 و N=200) على التوالي، يتكون من عمليات التقلب (volitility Process) مع الزمن (Time)، اذ يلاحظ بأن عمليات التقلب بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

9. الجانب التطبيقي

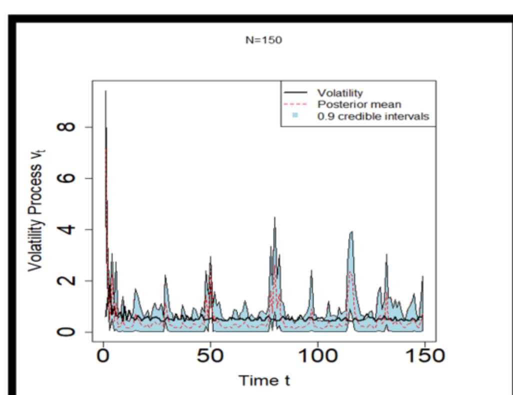
للوصول الى حقيقة التقدير ودقته ، تم اعتماد احد البيانات المالية كجانب تطبيقي .اذ تم الحصول على البيانات المالية من سوق الاوراق المالية ISX 86، وتم سحب عينة حجمها (714) عينة للفترة الزمنية **(2017-2019)** ، ولقد تم اولاً اختيار 100 عينة من اصل 714 ، من ثم اختيار 125 ، 150 ، وبعد ذلك تم اخذ جميع البيانات كاملةً ، وكانت النتائج كالاتي:

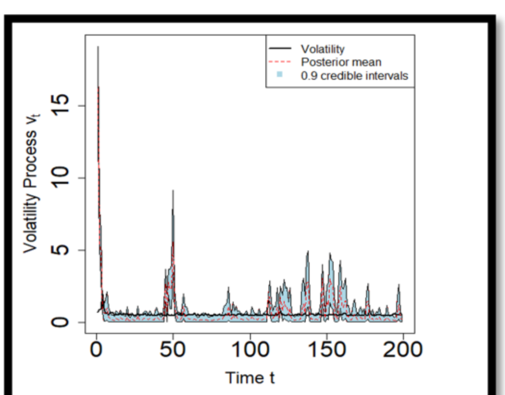


الشكل 7: تقديرات Partical filtering لنموذج CIR المخفي للبيانات الحقيقية



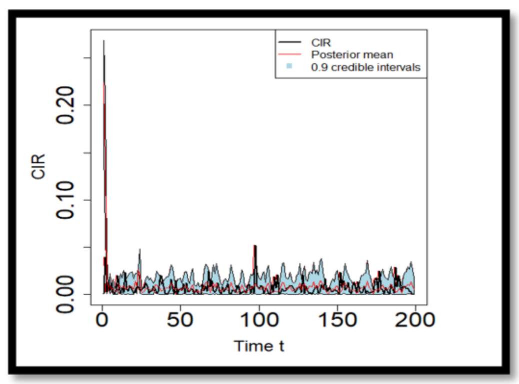
الشكل 8: تقديرات Partical filtering لنموذج CIR المخفي للبيانات الحقيقية



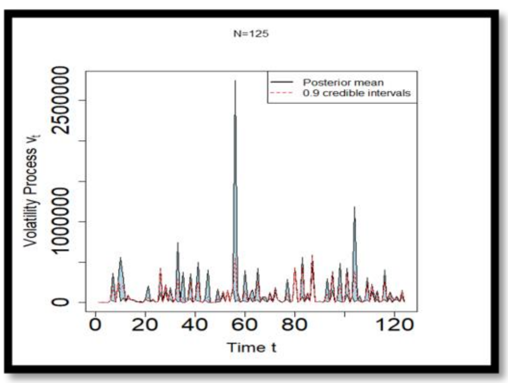


في الشكل(7) والشكل (8) والشكل(9) والشكل(10) للاحجام الاخرى المختلفة ولحجم العينة (714)على التوالي ، يتكون من عمليات التقلب (volitility Process) مع الزمن (Time)، اذ يلاحظ بأن عمليات التقلب بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

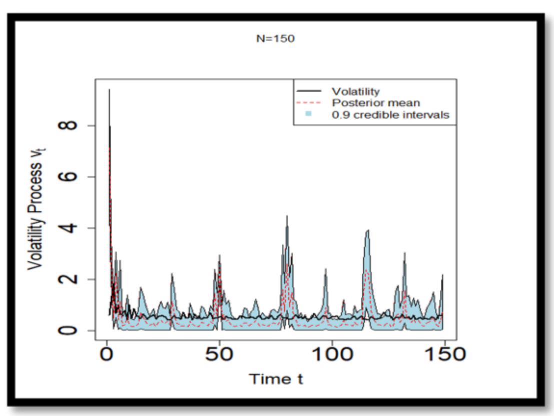
ولغرض تشغيل نموذج SABR ، تم الحصول على النتائج الاتية :



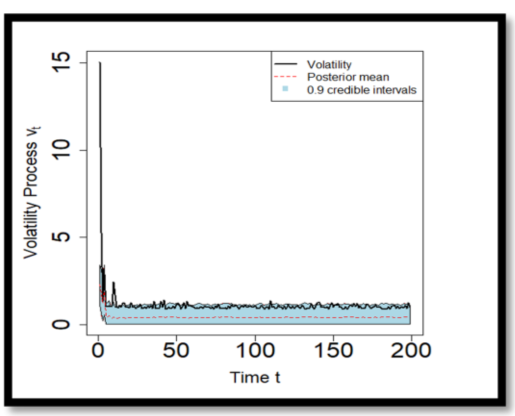
الشكل 11: تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي للبيانات الحقيقية



الشكل 12: تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي للبيانات الحقيقية



الشكل 13: تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي للبيانات الحقيقية



الشكل 14: تقديرات Partical filtering لنموذج SABR المخفي للبيانات الحقيقية

في الشكل(11) والشكل (12) والشكل(13) والشكل(14) للاحجام الاخرى المختلفة ولحجم العينة (714) على التوالي، يتكون من عمليات التقلب (volitility Process) مع الزمن (Time)، اذ يلاحظ بأن عمليات التقلب بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

10. الاستنتاجات والتوصيات

10.1 الاستنتاجات

1) نستنتج من خلال المقارنة بين نموذجي CIR وSABA باستخدام طرائق التقدير ، بأن نموذج SABA هوالافضل في التقدير لان من خلاله تم الحصول على اقل قيم لتقدير المعلمات .
2) في تصفية الجسيمات Partical filtering تم تقديرعملية CIR وSABA ، حيث وجد ان عمليات التقلب فيهما بقيت دائما اكبر من الصفر الذي هو يعتبرالشرط الاساسي للتقدير ، وهما الافضل في التقدير .

10.2 التوصيات

1) استعمال نماذج اخرى غير نموذجي CIR و SABA عند تطبيق البيانات لتقدير المعالم.
2) استعمال طريقتي MLE و MCMC لنماذج ماركوف المخفية ذات الاكثر تعقيد ، وتطبيقها في جوانب تطبيقية اخرى كالجوانب الاجتماعية او الاقتصادية او الطبية.

المصادر

1) Dymarski, Przemyslaw, ed.,(2011) "Hidden Markov models: Theory and applications", BoD–Books on Demand.
2) GERMAIN, Sarah Elizabeth,(2010) " **Bayesian spatio-temporal modelling of rainfall through non-homogenous hidden Markov models**", PhD Thesis, Newcastle University.
3) Ghosh,Jayantak,Delampady,Mohan,Samanta,Tapas,(2006)"An Introduction to Bayesian Analysis Theory and Method", Springer.
4) Hagan, Patrick, and Andrew Lesniewski,(2008) "LIBOR market model with SABR style stochastic volatility" , JP Morgan Chase and Ellington Management Group 32 :57.
5) Hagan, Patrick, Andrew Lesniewski, and Diana Woodward,(2015) "Probability distribution in the SABR model of stochastic volatility", Springer Proceedings in Mathematics & Statistics , Cham, 1-35.
6) Ida kjersem, (2009) " Bayesian Forecasting and dynamic models applied to strain data from the Gotariver bridge", Faculty of mathematics and natural sciences , university of Oslo .
7) Miao,zan, (2018) "CIR Modeling of Interest Rates", Linnaeus University, Department of Mathematics,.

8) Orlando, Giuseppe, and Michele Bufalo,(2021) "Interest rates forecasting: Between Hull and White and the CIR#—How to make a single-factor model work", Journal of Forecasting 40.8 ,1566-1580.