Warith Scientific Journal

مقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة المربعات الصغرى الموزونة لتقدير معوليه توزيع دالة القوى الموسع

A comparison between the maximum likelihood method and the weighted least squares method to estimate the reliability of the expanded power function distribution

م.م.فلاح حسن جبار
Falah Hassan Jabbar
جامعة القادسية
Al-Qadisiyah University
flaah.h@s.uokerbala.edu.iq

م.د.علي محمد جواد
Dr Ali Muhammad Jawad
جامعة القادسية
Al-Qadisiyah University
Ali.jawad@s.uokerbala.iq

أ.م. د. سيف حسام رحيم
D. Saif Hossam Rahim
جامعة القادسية
Al-Qadisiyah University
saif.hosam@qu.edu.iq

المستخلص:
تم تقديم انموذج جديد يدعى دالة القوى الموسع الجديد الذي يعد احد أعضاء العائلة الاسية الجديدة ، يمتاز الانموذج الجديد بمرونة اكثر وادق في تمثيل البيانات ، تم تقدير دالة المعولية للانموذج الاحتمالي الجديد بطريقتين هما (طريقة الإمكان الأعظم ،طريقة المربعات الصغرى الموزونة) ،استخدم أسلوب مونت-كارلو لأجراء تجربة محاكاة على أربعة نماذج بافتراض قيم محددة مسبقا لمعلمات توزيع دالة القوى الموسع الجديد ولأحجام عينات مختلفة ، أظهرت نتائج تجربة المحاكاة بان الطريقتين متساويتين في التقدير لدالة المعولية للأنموذج الاحتمالي الجديد .
الكلمات المفتاحية :دالة القوى الموسع، طريقة الإمكان الأعظم ،طريقة المربعات الصغرى الموزونة

Abstract:
A new model was presented called the new expanded power function, which is one of the members of the new exponential family. The new model is characterized by more flexibility and accuracy in representing data. The reliabilityThe Monte Carlo method was used to conduct a simulation experiment on four models assuming pre-determined values for the parameters of the new expanded power function distribution and for different sample sizes. The results of the simulation experiment showed that the two methods are equal in estimating the reliability function of the new probabilistic model.
Keywords: expanded power function, maximum potential method, weighted least squares method

المقدمة وهدف البحث:

يعد توزيع دالة القوى [10]من التوزيعات المهمة والواسعة الاستعمال في وصف البيانات المتعلقة لأوقات الفشل والبقاء للأجهزة وكذلك في نمذجة بيانات الحياة او الموت التابعة للكائنات الحية، ويوفر معلومات أكثر ملائمة حول معولية الاجهزة ومعدلات المخاطر،حيث أجريت عليه الكثير من البحوث منها، في عام (2013) قدر الباحث (SHAZIA ZARRIN) وآخرون[15] معالم توزيع دالة القوى بطريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وذلك لتقدير دالة المعولية ، حيث استخدم توزيع دالة القوى لتقييم معوليه النظام لكونه يمتاز بمعدل خطر غير ثابت ، عام (2014) قدر الباحثان (Azam Zaka , Ahmad Saeed Akhter)[14] معالم توزيع دالة القوى بطرق متعددة وهي (طريقة الإمكان الأعظم وتعديلاتها الثلاثة ، طريقة المقدر المئوي وتعديلاتها الثلاثة ، طريقة العزوم وتعديلاتها الأربعة) ، (2015) قدر الباحث (Saman Hanif) وآخرون [8] معالم توزيع دالة القوى بالتقدير البايزي باستعمال توزيع ويبل وتوزيع كاما المعمم، وتم اجراء المقارنة باستخدام محاكاة مونت- كالو باستعمال (MSE) كمعيار للمقارنة، (2016) اقترح الباحث (M. H. Tahir) وآخرون[12] انموذج جديد يدعى توزيع ويبل – دالة القوى (WPF) باستعمال الفئة المولدة للتوزيعات (Weibull-G)، (2017) اقترح الباحثان (Nurbanu Bursa, Gamze Ozel)[4] توزيع دالة القوى الموسع الجيد (ExpKw-PF) باستعمال امتداد توزيع كومارسوامي الاسي (The ExpKw-G)، (2018) قدر الباحث (Al Mutairi Alya)[2] معالم الشكل لتوزيع دالة القوى المعمم (GPFD) بالتقدير البايزي عند دالة الخسارة الاسية الخطية (LINEX) ، (2019) قدم الباحث (Saiful Islam ANSARI) وآخرون[3] انموذج جديد يسمى توزيع دالة القوى المحول التكعيبي (CTPFD) والذي يعتبر كتعميم لتوزيع دالة القوى المحول، وفي هذا البحث تم اجراء التوسعة على توزيع دالة القوى وذلك من خلال استعمال احد العائلات المشتقة حديثا تدعى العائلة الاسية الجديدة [9] ليتم الحصول على توزيع دالة القوى الموسع الجديد.

ويهدف البحث الى تقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد بطريقتين تقدير وهما طريقة الإمكان الأعظم (MLE) وطريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS) والمقارنة بينهما وبيان ايهما أفضل في التقدير.

الجانب النظري:

1- توزيع دالة القوى الموسع الجديد:

ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى ذي المعلمتين تكون بالصيغة الاتية:

$$f(x)=\frac{\beta\, x^{\beta-1}}{\alpha^{\beta}} \qquad 0<x<\alpha \ \ ,\alpha,\beta>0 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

وان معلمة القياس تمثل (α)، في حين (β) تمثل معلمة الشكل.

اما الدالة التراكمية (CDF) فتكون على النحو الاتي:

$$F(x)=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

حيث ان دالة المعولية لهذا التوزيع تكون حسب الصيغة الاتية:

$$R(t)=1-F(t)=1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

وان دالة المخاطرة

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\beta\, t^{\beta-1}}{(\alpha^{\beta}-t^{\beta})} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

تعتمد فكرة توسعة التوزيع باستعمال العائلة الاسية الجديد[S] على النحو الاتي:

$$f_{NEX}(x;\lambda,\xi)=\frac{f(x;\xi)}{e^{\lambda F(x;\xi)}}.\left[1+\lambda\left(1-F(x;\xi)\right)\right] \quad ,x\in R \qquad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

$f_{NEX}(x;\lambda,\xi)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) للعائلة الاسية.

$f(x;\xi)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى.

$F(x;\xi)$: تمثل الدالة التجميعية (C.D.F) لتوزيع دالة القوى.

ξ : يمثل متجه المعالم للتوزيع (β,α).

وان الدالة التراكمية (CDF)للعائلة الاسية الجديدة تكون بالشكل الاتي:

$$F_{NEX}(x;\lambda,\xi)=1-\frac{1-F(x;\xi)}{e^{\lambda F(x;\xi)}} \qquad ,\lambda>0\ ,x\in R \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

وبذلك تكون دالة الكثافة الاحتمالية (p.d.f) لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد على النحو الاتي:

$$f_{\text{nexpf}}(x;\alpha,\beta,\lambda)=\frac{\beta\, x^{\beta-1}\left[1+\lambda\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]}{\alpha^{\beta}e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} \quad ,\ 0<x<\alpha \ \ ,\alpha,\beta,\lambda>0 \qquad \dots..(7)$$

ولغرض التحقق من الدالة في المعادلة (7) هي دالة كثافة احتمالية نتبع الاتي:

$$\int_0^{\alpha} f_{\text{nexpf}}(x,\alpha,\beta,\lambda)\,dx=\int_0^{\alpha}\frac{\beta\, x^{\beta-1}\left\{1+\lambda\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right\}}{\alpha^{\beta}e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}dx$$

$$\int_0^{\alpha} f_{\text{nexpf}}(x,\alpha,\beta,\lambda)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\alpha} \frac{\beta\, x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx + \int_0^{\alpha} \frac{\beta\,\lambda\, x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx \\ \displaystyle - \int_0^{\alpha} \frac{\beta\lambda\, x^{\beta-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx \end{array} \right\}$$

$$1 - \int_0^{\alpha} \frac{\beta\, x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda}$$

$$2 - \int_0^{\alpha} \frac{\beta\,\lambda\, x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx = \left[-e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}\right]_0^{\alpha} = 1 - e^{-\lambda}$$

$$3 - \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx$$

let: $u = x^{\beta}$ $\qquad dv = \dfrac{\beta\,\lambda\, x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}}$

$du = \beta\, x^{\beta-1}dx \qquad v = \dfrac{-e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}$

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$ وباستخدام قاعدة تكامل التجزئة

$$= \left[\frac{-x^{\beta} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{\beta-1}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}dx = -e^{-\lambda} + \left[-\frac{e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\lambda}\right]_0^{\alpha} = -e^{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} f_{\text{nexpf}}(x,\alpha,\beta,\lambda)\,dx = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} + 1 - e^{-\lambda} + e^{-\lambda} + \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\therefore \int_0^{\alpha} f_{\text{nexpf}}(x,\alpha,\beta,\lambda)\,dx = 1$$

أي ان الدالة في المعادلة (7) هي دالة كثافة احتمالية (*p.d.f*)

وان الدالة التراكمية (*CDF*) لتوزيع دالة القوى الموسع تكون بالشكل الاتي:

$$F_{\text{nexpf}}(x;\alpha,\beta,\lambda) = 1 - \frac{\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

2- دالة المعولية (Reliability function): [7] [11]

ان مفهوم المعولية له معانٍ عديدة ولعل المعنى الواسع لها هي مقياس للأداء، أو بمعنى اخر هي احتمال أداء الجهاز لغرضة بشكل مناسب لفترة زمنية محددة في ظل ظروف التشغيل الاعتيادية، يتطلب أي عنصر

وضيفي معايير او متطلبات أداء دقيقة عند اكمال المهمة المتوقعة منه او الاستمرار في تنفيذها، أي ان هذا العنصر يعول علية (يعتمد علية) في أداء المهمة خلال فترة زمنية محدد، ويرمز لها بالرمز R(t)، ويمكن التعبير عنها بالمعادلتين:

$$R(t) = pr(T > t) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

$$R(t) = 1 - G(t) = \overline{G}\,(t) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

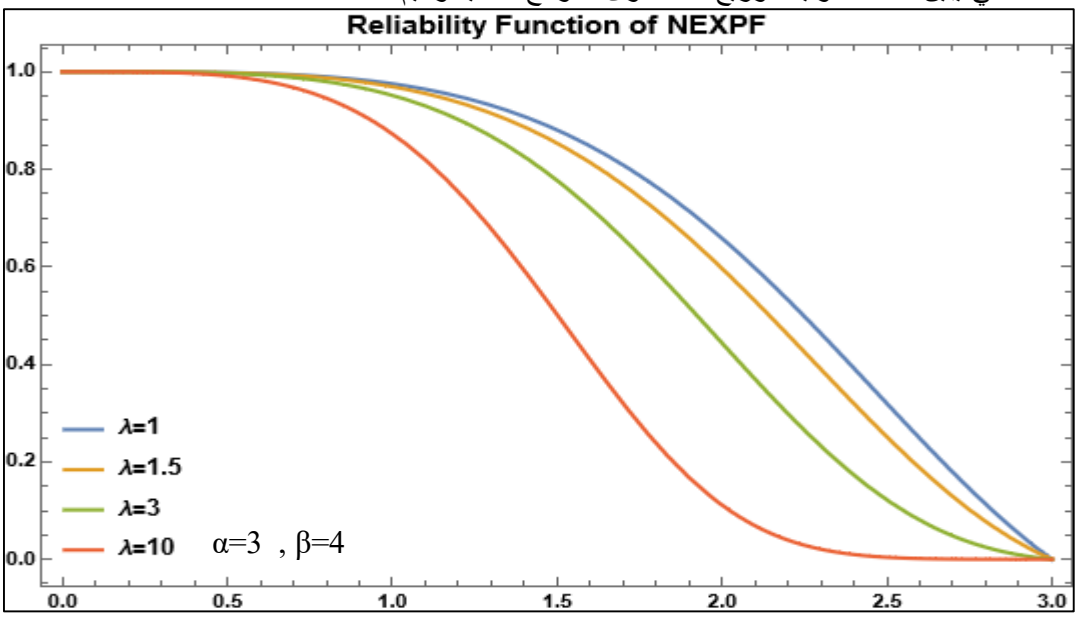
T : متغير عشوائي موجب يمثل الزمن المتراكم لإداء الجهاز خلال المدة الزمنية (0 , t).

$G(t)$: تمثل دالة التوزيع التجميعية (Cumulative Distribution Function) وتدعى أيضا بدالة اللامعولية .

ودالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد تكون حسب الصيغة الاتية:

$$R(t) = e^{-\lambda\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}\left(1-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}\right) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

والشكل الاتي يبين دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد ولقيم مختلفة للمعلمات.



الشكل (1) دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد ولقيم مختلفة للمعلمات

تم اشتقاق العزم اللامركزي الرائي لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد وكما مبين على النحو الاتي:

$$\mu'_r = E(x^r) = \int_0^{\alpha} x^r f_{nexpf}(x;\alpha,\beta,\lambda)\ dx \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (12)$$

عند التعويض عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد بما يقابلها في المعادلة (7) ينتج:

$$\mu'_r = E(x^r) = \int_0^{\alpha} \frac{\beta\, x^{r+\beta-1}\left[1+\lambda\left(1-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]}{\alpha^{\beta}\, e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}\, dx$$

$$\mu'_r = E(x^r) = \left\{ \int_0^{\alpha} \frac{\beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\, dx + \int_0^{\alpha} \frac{\lambda\beta x^{r+\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\, dx - \int_0^{\alpha} \frac{\lambda\beta x^{r+2\beta-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}}\, dx \right\}$$

الحد الاول :

$$1-\int_0^{\alpha}\frac{\beta\, x^{r+\beta-1}e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\,dx=$$

$$\text{Let}\quad y=\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\Longrightarrow x^{\beta}=\frac{\alpha^{\beta}y}{\lambda}\Longrightarrow x=\frac{\alpha\, y^{\frac{1}{\beta}}}{\lambda^{\frac{1}{\beta}}}\Longrightarrow dx=\frac{\alpha\, y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta\,\lambda^{\frac{1}{\beta}}}dy$$

وان :

$$\because\ x=\alpha\quad\Rightarrow y=\lambda$$
$$\because\ x=0\quad\Rightarrow y=0$$

وبذلك تكون حدود (y) بالشكل الاتي: $0<y<\lambda$

$$\int_0^{\lambda}\frac{\beta\,\alpha^{r+\beta-1}\left(y^{\frac{1}{\beta}}\right)^{r+\beta-1}e^{-y}}{\alpha^{\beta}\,\lambda^{\frac{r+\beta-1}{\beta}}}\frac{\alpha\ y^{\frac{1}{\beta}-1}}{\beta\,\lambda^{\frac{1}{\beta}}}\,dy=\left\{\frac{\alpha^{r}}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}}\int_0^{\lambda}y^{\frac{r}{\beta}}e^{-y}\,dy\right\}$$

وحسب دالة كاما الغير تمامة والتي تكون بالأشكال الاتية:

$$1-\Gamma(a)=\int_0^{\infty}m^{a-1}e^{-m}\,dm$$ دالة كاما التامة ... ... (13)

$$2-\Gamma(a,t)=\int_t^{\infty}m^{a-1}e^{-m}\,dm$$ دالة كاما الغير تامة العليا ... ... (14)

$$3-\gamma(a,t)=\int_0^{t}m^{a-1}e^{-m}\,dm$$ دالة كاما الغير تامة الدنيا ... ... (15)

وبالتالي فان نتيجة تكامل الحد الأول تكون بالشكل الاتي:

$$a-1=\frac{r}{\beta}\ \Rightarrow a=\frac{r+\beta}{\beta}\quad ،\ t=\lambda$$

$$\therefore\frac{\alpha^{r}}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}}\int_0^{\lambda}y^{\frac{r}{\beta}}e^{-y}\,dy=\frac{\alpha^{r}\ \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{r+\beta}{\beta},\boldsymbol{\lambda}\right)}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}}$$

الحد الثاني :

$$2-\int_0^{\alpha}\frac{\lambda\,\beta\, x^{r+\beta-1}e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\,dx$$

وبأجراء التكامل بنفس طريقة الحد الأول لذا تكون نتيجة الحد الثاني بالشكل الاتي:

$$\therefore\int_0^{\alpha}\frac{\lambda\,\beta\, x^{r+\beta-1}e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{\beta}}\,dx=\frac{\alpha^{r}\ \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{r+\beta}{\beta},\boldsymbol{\lambda}\right)}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}}$$

الحد الثالث :

$$3-\int_0^{\alpha}\frac{\lambda\,\beta\, x^{r+2\beta-1}\,e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}}\,dx$$

وبأجراء التكامل بنفس طريقة الحد الأول لذا تكون نتيجة الحد الثالث بالشكل الاتي:

$$\therefore\int_0^{\alpha}\frac{\lambda\,\beta\, x^{r+2\beta-1}\,e^{-\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}}{\alpha^{2\beta}}\,dx=\frac{\alpha^{r}\ \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{r+2\beta}{\beta},\boldsymbol{\lambda}\right)}{\lambda^{\frac{r+\beta}{\beta}}}$$

وبذلك نحصل على العزم اللامركزي الرائي لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد

$$\therefore \mu'_r = E(x^r) = \frac{\alpha^r}{\lambda^{\frac{r}{\beta}}} \left(\frac{\gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta},\lambda\right) - \gamma\left(\frac{r+2\beta}{\beta},\lambda\right)}{\lambda} + \gamma\left(\frac{r+\beta}{\beta},\lambda\right) \right) \dots (16)$$

3- طرائق التقدير :

3-1- طريقة الإمكان الأعظم (MLE):[13][5]

في عام (1920) اقترح Fisher هذه الطريقة وتعد من اهم طرائق التقدير والشائعة الاستخدام لما لها من مميزات وخصائص عديدة اهما خاصية الاتساق والكفاية، وتتميز بالدقة في التقدير مقارنتا بالطرائق الأخرى وخصوصا عندما يزداد حجم العينة، ويرمز لها بالرمز (L)، وان أساس عمل طريقة الإمكان الأعظم هو التكرار للعمليات الحسابية حتى يتم الوصول الى أفضل تقديرات للمعالم، ولكون هذه الطريقة تتطلب عمليات حسابية معقدة لذا لم تستعمل بشكل واسع الا بعد ظهور البرامج الاحصائية.

إذا كان (x_i) متغير عشوائي يتبع توزيع دالة القوى الموسع الجديد فان دالة الإمكان الأعظم تمثل الدالة المشتركة للمتغيرات العشوائية المستقلة (x_1 , x_2 , x_3 ,....., x_n) وكالاتي:

$$L(x_1 \dots . x_n \ ; \alpha, \beta, \lambda) = f(x_1; \alpha, \beta, \lambda) . f(x_2; \alpha, \beta, \lambda) \dots . f(x_n; \alpha, \beta, \lambda)$$

$$\therefore L(x_i \ ; \alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i \ ; \alpha, \beta, \lambda)$$

وبتعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد في الصيغة أعلاه:

$$L(x_i \ ; \alpha, \beta, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\beta x^{\beta-1} \left[1 + \lambda\left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]}{\alpha^{\beta} e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} \right]$$

$$L(x_i \ ; \alpha, \beta, \lambda) = \frac{\beta^n}{\alpha^{n\,\beta}} e^{-\frac{\lambda}{\alpha^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\beta}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1} \left[1 + \lambda\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right]$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي (ln) للطرفين

$$\ln L = n \ln(\beta) - n\,\beta \ln(\alpha) - \frac{\lambda}{\alpha^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\beta} + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1 + \lambda\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (17)$$

ولحساب النهايات العظمى لدالة الإمكان الأعظم اعلاه نأخذ المشتقة الجزئية للمعادلة (17) بالنسبة للمعلمات (α، β، λ)

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\alpha}} = \left\{ -\frac{n\,\beta}{\hat{\alpha}} + \frac{\lambda\,\beta \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\beta}}{\hat{\alpha}^{\beta+1}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda\,\beta\, x_i^{\beta}}{\left(1 + \lambda\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)\right) \hat{\alpha}^{\beta+1}} \right\} \dots (18)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\beta}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n}{\hat{\beta}} - n \ln \alpha + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + \lambda \alpha^{-\hat{\beta}} \ln \alpha \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\hat{\beta}} \\ -\lambda\, \alpha^{-\hat{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ . (x_i)^{\hat{\beta}} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \ln\left(\frac{x_i}{\alpha}\right) . \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\hat{\beta}}}{\left(1 + \lambda\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\hat{\beta}}\right)\right)} \end{array} \right\} \dots \dots (19)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \hat{\lambda}} = \left\{ -\frac{1}{\alpha^{\beta}} \sum_{i=1}^{n} (x_i)^{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{\left(1 + \hat{\lambda}\left(1 - \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\hat{\beta}}\right)\right)} \right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (20)$$

وبعد مساواة المعادلات الثلاثة (18) (19) (20) بالصفر، ولكونها معادلات غير خطية لذلك لا يمكن حلها بالطرق التحليلية الاعتيادية، وانما تحل بإحدى الطرق الرياضية العددية، وقد استخدمت طريقة (نيوتن- رافسون) لحل المعادلات والحصول على مقدر المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\beta}_{MLE}, \hat{\lambda}_{MLE})$ ، وبعد ذلك تعوض هذه المقدرات في المعادلة (11) للحصول على مقدر الإمكان الأعظم لدالة المعولية .

$$\hat{R}_{MLE}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{MLE}\left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MLE}}\right)^{\hat{\beta}_{MLE}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{MLE}}\right)^{\hat{\beta}_{MLE}}\right) \quad \dots\dots\dots\dots (21)$$

3-2- طريقة المربعات الصغرى الموزونة (WLS):[1][6]

تعتبر طريقة المربعات الصغرى الموزونة احد اهم الطرائق المستخدمة في التقدير، وتتميز عن طريقة المربعات الصغرى بوجود عامل الوزن(W_i) الذي يجعلها اكثر دقة في التقدير، وتهدف هذه الطريقة الى تقليل مجموع الانحرافات وجعله اقل ما يمكن .

اذ ان مجموع مربعات الخطأ يمكن صياغته وفق المعادلة الاتية:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} w_i \left[F_{nexpf}(x_i; \alpha, \beta, \lambda) - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad \dots\dots\dots (22)$$

حيث ان:

$$w_i = \frac{(n+1)^2(n+2)}{i\,(n-i+1)}$$

وبعد التعويض عن الدالة التراكمية لتوزيع دالة القوى الموسع في المعادلة (22) ينتج :

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n+1)^2(n+2)}{i\,(n-i+1)} \left[1 - \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}\right)}{e^{\lambda\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}} - \frac{i}{n+1} \right]^2 \quad \dots\dots (23)$$

وباشتقاق المعادلة (23) بالنسبة للمعلمات (α، β، λ) نحصل على المعادلات الطبيعية الثلاثة ، وبعد إيجاد المشتقات الثلاثة $\left(\frac{\partial Q}{\partial \hat{\alpha}}, \frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}}, \frac{\partial Q}{\partial \hat{\lambda}}\right)$ ومساواتها بالصفر وبما انها معادلات لا خطية فقد تم استخدام طريقة (نيوتن- رافسون) لحلها والحصول على مقدر المعلمات بطريقة المربعات الصغرى الموزونة $(\hat{\alpha}_{wLS}, \hat{\beta}_{wLS}, \hat{\lambda}_{wLS})$ ، وبعد ذلك تعوض هذه المقدرات في المعادلة (11) للحصول على مقدر المربعات الصغرى الموزونة لدالة المعولية .

$$\hat{R}_{wLS}(t) = e^{-\hat{\lambda}_{wLS}\left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{wLS}}\right)^{\hat{\beta}_{wLS}}} \left(1 - \left(\frac{t}{\hat{\alpha}_{wLS}}\right)^{\hat{\beta}_{wLS}}\right) \quad \dots\dots\dots\dots (21)$$

الجانب التجريبي:

في هذا القسم، سيتم مناقشة نتائج أسلوب المحاكاة، الذي سيقارن بين طرائق التقدير المستعملة لتقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد، وأجريت الدراسة على احجام عينات مختلفة (صغيرة، متوسطة، كبيرة)، وقيم افتراضية محددة مسبقا مختلفة لمعلمات الانموذج الموسع الجديد، واستعمل المعيار الاحصائي (IMSE) كأساس للمقارنة وذلك لتحديد افضلية طرائق التقدير.

1- مفهوم المحاكاة :

تعرف المحاكاة بانها طريقة رياضية لحل المشاكل المعقدة، أي انها أسلوب رياضي يمتاز بالمرونة والقدرة على التجريب والاختبار لمرات عديدة واختصار الوقت والكلفة، ويستخدم أسلوب المحاكاة لتحديد التغيرات التي طرأت

على المشكلة عند تنفيذها ،أي تمثيل او تقليد للواقع الحقيقي حيث تعطي معلومات وصورة واضحة تكون مفيدة للواقع الذي تمثله، وجرى توليد بيانات عشوائية تلائم توزيع دالة القوى الموسع الجديد بطريقة التحويل المعكوس وحسب الخطوات الاتية:

A. يتم توليد ارقام عشوائية q_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة {0,1}

$$q_i \sim UniformDistribution(0,1) \quad ، i = 1,2, \dots \dots \dots ., n$$

وان q_i متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم .

B. تحويل البيانات المولدة في الخطوة (A) الى بيانات تتبع التوزيع الموسع الجديد باستخدام طريقة التحويل المعكوس وحسب المعادلة (22) ادناه:

$$x_i = e^{\frac{\ln\left(-\frac{\text{Lambert W}\left(\frac{\lambda\,(q_i-1)}{e^{\lambda}}\right)+\lambda}{\lambda}\right)+\beta\,\ln(\alpha)}{\beta}} \quad \dots \dots \dots \dots (22)$$

جرى تنفيذ تجارب المحاكاة لتوليد عدد من العينات ذات الحجوم المختلفة (25،50،75،100) وبتكرار (1000) مرة لغرض الحصول على أفضل نتائج متجانسة.

1-1- المقارنة بين طريقتي التقدير:

بعد ان جرى تقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد تأتي مرحلة المقارنة بين هذه التقديرات، تم استعمال المعيار الإحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين مقدرات دالة المعولية لتوزيع القوى الموسع الجديد وفق الصيغة الاتية:

$$IMSE\left(\hat{R}(t_j)\right) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\left(\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{R}_i(t_j) - R_i(t_j)\right)^2\right) \quad \dots \dots \dots \dots (23)$$

أي ان:

$$IMSE\left(\hat{R}(t_j)\right) = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}\left(MSE\left(\hat{R}(t_j)\right)\right) \quad \dots \dots \dots \dots (24)$$

$R_i(t_j)$: تمثل قيم دالة المعولية الحقيقية.

$\hat{R}_i(t_j)$: تمثل قيم دالة المعولية المقدرة حسب طريقة التقدير المستعملة.

R: يمثل عدد تكرار التجربة (1000) مرة.

K: يمثل عدد مشاهدات التجربة.

تم اختيار قيم افتراضية لمعالم توزيع دالة القوى الموسع الجديد وحسب ما مبين في الجدول (1):

جدول (1)

القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة

Models	α	β	λ
(1)	2	3	0.05
(2)	4	1	0.5
(3)	3	0.5	1
(4)	2.5	2	2

2-1- تحليل نتائج تجارب المحاكاة :

من اجل الوصول الى أفضل تقدير لدالة المعولية فقد تمت المقارنة بين طرائق التقدير المدروسة ، وقد استعمل أسلوب الرتب (Ranks) كأساس للمفاضلة بين طريقتي التقدير، وقد استعمل معيار متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) للمقارنة بين مقدرات دالة المعولية للأنموذج الموسع الجديد وقد بوبت النتائج بالجداول الاتية:

الجدول (2)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقتي التقدير(MLE , WLS) للأنموذج الأول وحسب حجوم العينات.

n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
25	0.899997	0.904744	0.911262	0.002592	0.904485	0.001523
	0.990806	0.873092	0.879894	0.00364	0.872739	0.002268
	1.19632	0.777617	0.780898	0.006242	0.774844	0.004303
	1.327	0.697642	0.69443	0.007564	0.691056	0.005381
	1.587	0.488034	0.46117	0.008104	0.470184	0.005078
	1.71068	0.3627	0.321791	0.007285	0.341522	0.003511
	1.77385	0.291944	0.244266	0.006671	0.271003	0.002535
	1.8434	0.208652	0.154596	0.00595	0.190254	0.001549
	1.85694	0.191777	0.137069	0.005662	0.174201	0.001391
	1.8696	0.17579	0.120769	0.005327	0.159091	0.001258
IMSE				0.005904		0.00288
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
50	0.899997	0.904744	0.906492	0.001406	0.904396	0.001549
	0.990806	0.873092	0.87443	0.001952	0.872799	0.002155
	1.19632	0.777617	0.77554	0.00315	0.775894	0.003912
	1.327	0.697642	0.691137	0.003564	0.693391	0.005129
	1.587	0.488034	0.468795	0.003074	0.476589	0.006109
	1.71068	0.3627	0.338218	0.002387	0.350072	0.004914
	1.77385	0.291944	0.266064	0.001958	0.280546	0.003819
	1.8434	0.208652	0.182932	0.001428	0.200796	0.002409
	1.85694	0.191777	0.16635	0.001319	0.184931	0.002136
	1.8696	0.17579	0.150726	0.001217	0.169995	0.001888
IMSE				0.002145		0.003402
Rank				1		2
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
75	0.899997	0.904744	0.904174	0.000554	0.909411	0.000341
	0.990806	0.873092	0.871468	0.000767	0.877879	0.000495
	1.19632	0.777617	0.771748	0.001331	0.780668	0.000997
	1.327	0.697642	0.687761	0.001699	0.697896	0.001396
	1.587	0.488034	0.469119	0.002111	0.480282	0.00186
	1.71068	0.3627	0.340855	0.001885	0.352001	0.001564
	1.77385	0.291944	0.269546	0.001606	0.280668	0.001241
	1.8434	0.208652	0.186729	0.001185	0.197887	0.000797
	1.85694	0.191777	0.170105	0.001095	0.181282	0.000708
	1.8696	0.17579	0.154404	0.001009	0.165605	0.000626
IMSE				0.001324		0.001003
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
100	0.899997	0.904744	0.904551	0.000471	0.903505	0.000668
	0.990806	0.873092	0.871939	0.000638	0.871205	0.000889
	1.19632	0.777617	0.772504	0.001008	0.77306	0.001391
	1.327	0.697642	0.688747	0.001182	0.690582	0.001674
	1.587	0.488034	0.470779	0.001288	0.476383	0.002024
	1.71068	0.3627	0.343117	0.00115	0.351147	0.001798
	1.77385	0.291944	0.272272	0.000994	0.281694	0.00148
	1.8434	0.208652	0.190151	0.000745	0.201208	0.000979
	1.85694	0.191777	0.17369	0.000688	0.185076	0.00087
	1.8696	0.17579	0.158152	0.000634	0.169848	0.000768
IMSE				0.00088		0.001254

Rank			1		2

الجدول (3)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقتي التقدير(MLE , WLS) للأنموذج الثاني وحسب حجوم العينات.

n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
25	0.301146	0.890551	0.906569	0.002164	0.900072	0.002175
	0.462063	0.834846	0.855616	0.003279	0.847189	0.003022
	0.856587	0.706058	0.729414	0.004795	0.717804	0.003902
	1.45918	0.529297	0.542973	0.004843	0.532015	0.004247
	1.70194	0.464418	0.472284	0.004519	0.463738	0.004338
	1.88873	0.416822	0.420053	0.004211	0.41418	0.004332
	1.96178	0.398742	0.400168	0.00408	0.395522	0.004302
	2.48435	0.27776	0.267218	0.003081	0.273917	0.003574
	2.63359	0.245782	0.232297	0.002804	0.242912	0.003224
	2.71462	0.228877	0.213904	0.002662	0.22674	0.003019
IMSE				0.003644		0.003613
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
50	0.301146	0.890551	0.886848	0.001241	0.878037	0.001645
	0.462063	0.834846	0.831545	0.001791	0.822449	0.002164
	0.856587	0.706058	0.703031	0.002508	0.695957	0.002649
	1.45918	0.529297	0.524083	0.002523	0.523078	0.002447
	1.70194	0.464418	0.457659	0.00235	0.459457	0.002247
	1.88873	0.416822	0.408696	0.002183	0.412678	0.002069
	1.96178	0.398742	0.390047	0.002113	0.394881	0.001995
	2.48435	0.27776	0.264571	0.001612	0.275286	0.001453
	2.63359	0.245782	0.231207	0.001493	0.243488	0.001316
	2.71462	0.228877	0.213533	0.001438	0.226637	0.001251
IMSE				0.001925		0.001924
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
75	0.301146	0.890551	0.902265	0.000695	0.900401	0.000645
	0.462063	0.834846	0.849301	0.001063	0.846675	0.000983
	0.856587	0.706058	0.722131	0.001616	0.718361	0.001546
	1.45918	0.529297	0.540886	0.001849	0.537547	0.002005
	1.70194	0.464418	0.473225	0.001832	0.470773	0.00208
	1.88873	0.416822	0.423371	0.001784	0.421849	0.002081
	1.96178	0.398742	0.4044	0.001757	0.403296	0.002067
	2.48435	0.27776	0.277269	0.001426	0.279912	0.00171
	2.63359	0.245782	0.243682	0.001292	0.247599	0.001535
	2.71462	0.228877	0.22594	0.001213	0.230577	0.00143
IMSE				0.001453		0.001608
Rank				1		2
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
100	0.301146	0.890551	0.897375	0.000552	0.896755	0.000638
	0.462063	0.834846	0.844132	0.000832	0.843575	0.000966
	0.856587	0.706058	0.718263	0.001375	0.717944	0.00153
	1.45918	0.529297	0.540881	0.001712	0.541339	0.001955
	1.70194	0.464418	0.474779	0.001706	0.475756	0.00198
	1.88873	0.416822	0.426012	0.001618	0.427477	0.002013

	1.96178	0.398742	0.40743	0.001607	0.409108	0.002009
	2.48435	0.27776	0.282351	0.001379	0.285884	0.0017
	2.63359	0.245782	0.249082	0.001115	0.253246	0.001328
	2.71462	0.228877	0.231459	0.001117	0.235981	0.001323
IMSE				0.001301		0.001544
Rank				1		2

الجدول (4)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقتي التقدير(MLE , WLS) للأنموذج الثالث وحسب حجوم العينات.

n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
25	0.009784	0.890551	0.899075	0.001688	0.891138	0.001834
	0.023331	0.834846	0.847643	0.002536	0.837217	0.002506
	0.082911	0.706058	0.72429	0.003884	0.70977	0.003368
	0.254989	0.529297	0.545711	0.004252	0.530699	0.003694
	0.356133	0.464418	0.477819	0.004034	0.464639	0.003681
	0.448165	0.416822	0.427306	0.003785	0.416313	0.00362
	0.487771	0.398742	0.407971	0.003674	0.398012	0.003583
	0.838608	0.27776	0.276661	0.002794	0.276858	0.003047
	0.963738	0.245782	0.241427	0.002557	0.245349	0.002808
	1.03707	0.228877	0.222714	0.002439	0.228799	0.002665
IMSE				0.003164		0.003081
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
50	0.009784	0.890551	0.888156	0.000891	0.884248	0.001159
	0.023331	0.834846	0.834386	0.0013	0.829536	0.001618
	0.082911	0.706058	0.710123	0.002005	0.70408	0.002266
	0.254989	0.529297	0.53693	0.002624	0.531474	0.002692
	0.356133	0.464418	0.472172	0.002758	0.467697	0.002775
	0.448165	0.416822	0.424159	0.002808	0.420712	0.0028
	0.487771	0.398742	0.405796	0.002814	0.402814	0.0028
	0.838608	0.27776	0.280812	0.00262	0.282145	0.00259
	0.963738	0.245782	0.247038	0.002497	0.249906	0.002465
	1.03707	0.228877	0.22903	0.002421	0.232785	0.002388
IMSE				0.002274		0.002355
Rank				1		2
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
75	0.009784	0.890551	0.899364	0.000584	0.896723	0.000554
	0.023331	0.834846	0.8463	0.000936	0.842266	0.000868
	0.082911	0.706058	0.720395	0.001619	0.713606	0.001507
	0.254989	0.529297	0.542285	0.002189	0.533878	0.002234
	0.356133	0.464418	0.47577	0.002276	0.467692	0.002417
	0.448165	0.416822	0.426666	0.002287	0.419219	0.002491
	0.487771	0.398742	0.407951	0.002277	0.400839	0.002502
	0.838608	0.27776	0.281977	0.001976	0.2786	0.002248
	0.963738	0.245782	0.24849	0.001818	0.246578	0.00207
	1.03707	0.228877	0.230757	0.00172	0.229708	0.001956
IMSE				0.001768		0.001885
Rank				1		2
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
100	0.009784	0.890551	0.891859	0.000705	0.890823	0.000957
	0.023331	0.834846	0.838118	0.000995	0.836869	0.001356

	0.082911	0.706058	0.712935	0.00144	0.711279	0.001922
	0.254989	0.529297	0.538232	0.001775	0.536466	0.002154
	0.356133	0.464418	0.473203	0.001837	0.471645	0.002133
	0.448165	0.416822	0.425173	0.00185	0.423892	0.002081
	0.487771	0.398742	0.406853	0.001846	0.405711	0.002053
	0.838608	0.27776	0.283106	0.001629	0.283488	0.001713
	0.963738	0.245782	0.250018	0.001503	0.251021	0.001571
	1.03707	0.228877	0.23245	0.001424	0.233828	0.001486
IMSE				0.0015		0.001743
Rank				1		2

الجدول (5)

يبين القيم الحقيقية لدالة المعولية ومقدراتها ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) والرتب الجزئية لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لطريقتي التقدير(MLE , WLS) للأنموذج الرابع وحسب حجوم العينات.

n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
25	0.489809	0.890551	0.893249	0.001788	0.889246	0.001928
	0.610091	0.834846	0.842885	0.002597	0.836203	0.002601
	0.842937	0.706058	0.725591	0.003977	0.712195	0.003401
	1.1292	0.529297	0.55877	0.004588	0.53772	0.003885
	1.23434	0.464418	0.495143	0.004436	0.472669	0.004149
	1.31348	0.416822	0.447468	0.004211	0.424737	0.004372
	1.34421	0.398742	0.429115	0.004103	0.4065	0.004455
	1.56493	0.27776	0.302313	0.003157	0.284426	0.00471
	1.62976	0.245782	0.267435	0.002876	0.252247	0.004599
	1.66563	0.228877	0.248721	0.002731	0.235264	0.004495
IMSE				0.003446		0.003859
Rank				1		2
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
50	0.489809	0.890551	0.879741	0.001209	0.873756	0.001589
	0.610091	0.834846	0.824901	0.001669	0.817713	0.002081
	0.842937	0.706058	0.701122	0.002306	0.692595	0.002557
	1.1292	0.529297	0.532266	0.002586	0.524404	0.002461
	1.23434	0.464418	0.469611	0.00256	0.46269	0.002334
	1.31348	0.416822	0.423188	0.002494	0.417214	0.002219
	1.34421	0.398742	0.405426	0.002456	0.399871	0.002171
	1.56493	0.27776	0.284081	0.002021	0.282282	0.001776
	1.62976	0.245782	0.251035	0.00186	0.250542	0.001657
	1.66563	0.228877	0.233344	0.001772	0.233601	0.001596
IMSE				0.002093		0.002044
Rank				2		1
n	t_i	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
75	0.489809	0.890551	0.897892	0.000593	0.896965	0.000537
	0.610091	0.834846	0.845548	0.00093	0.843248	0.000861
	0.842937	0.706058	0.722649	0.001609	0.716951	0.001448
	1.1292	0.529297	0.549454	0.002045	0.540142	0.0018
	1.23434	0.464418	0.484485	0.002251	0.474504	0.001808
	1.31348	0.416822	0.436309	0.002303	0.426159	0.001774
	1.34421	0.398742	0.417889	0.002573	0.407757	0.001753
	1.56493	0.27776	0.29278	0.002405	0.284224	0.001481
	1.62976	0.245782	0.259114	0.002258	0.251492	0.001368
	1.66563	0.228877	0.241202	0.002373	0.234182	0.0013
IMSE				0.001934		0.001413

Rank				2		1
n	t_j	R_real	R_MLE	MSE	R_WLS	MSE
100	0.489809	0.890551	0.8941	0.000585	0.89424	0.00064
	0.610091	0.834846	0.841443	0.000868	0.840962	0.000962
	0.842937	0.706058	0.71889	0.001415	0.716583	0.001524
	1.1292	0.529297	0.547577	0.002017	0.542847	0.00198
	1.23434	0.464418	0.483579	0.002187	0.478208	0.002081
	1.31348	0.416822	0.436187	0.00228	0.430496	0.00213
	1.34421	0.398742	0.418078	0.002305	0.412307	0.002142
	1.56493	0.27776	0.295172	0.002263	0.289653	0.002074
	1.62976	0.245782	0.262093	0.002166	0.256942	0.001995
	1.66563	0.228877	0.244484	0.002096	0.239595	0.001938
IMSE				0.001818		0.001747
Rank				2		1

جدول (6)

يمثل الرتب لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) لمقدر دالة المعولية لطريقتي التقدير(MLE , WLS) واحجام العينات للنماذج كافة.

Models	n	MLE	WLS	Models	n	MLE	WLS
(1)	25	2	1	(3)	25	2	1
	50	1	2		50	1	2
	75	2	1		75	1	2
	100	1	2		100	1	2
(2)	25	2	1	(4)	25	1	2
	50	2	1		50	2	1
	75	1	2		75	2	1
	100	1	2		100	2	1
$\sum Ranks$						24	24
Rank of methods						1.5	1.5

الاستنتاجات:

عن طريق النتائج التي تم التوصل اليها من اجراء تجربة المحاكاة على أربع نماذج نلاحظ في الجدول (6) تساوي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى الموزونة من حيث الأفضلية في تقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد، كما نلاحظ في الجداول (2)(3)(4)(5) ان قيمة متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) تقل كلما ازداد حجم العينة للنماذج جميعها وهذا ينسجم مع النظرية الإحصائية.

التوصيات:

1- تطبيق توزيع دالة القوى الموسع الجديد في دراسات تتعلق في تقدير دالة البقاء ودالة المخاطرة، لكون هذا التوزيع يعد أكثر مرونة ودقة في وصف البيانات من التوزيعات الشائعة.
2- استعمال العائلة الاسية الجديدة (NEX- Family) في توليد توزيعات أخرى.
3- اجراء الدراسات والبحوث المستقبلية الهادفة الى تقدير دالة المعولية لتوزيع دالة القوى الموسع الجديد في حالة وجود بيانات خاضعة للرقابة.

المصادر

[1] أموري هادي كاظم الحسناوي وباسم شلبية مسلم ، (2002) ،"القياس الاقتصادي المتقدم النظرية والتطبيق". قسم الإحصاء – كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة بغداد – المكتبة الوطنية، دار الكتب والوثائق ببغداد.

[2] Al Mutairi, A. O. (2018). Bayesian Estimation Using (Linex) for Generalized Power Function Distribution. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, *39*(3), 297-303.

[3] ANSARI, S. İ., SAMUH, M., & BAZYARI, A. (2019). Cubic Transmuted Power Function Distribution. *Gazi University Journal of Science*, *32*(4), 1322-1337.

[4] Bursa, N., & Gamze, O. Z. E. L. (2017). The exponentiated Kumaraswamy-power function distribution. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *46*(2), 277-292.

[5] Chen, D. G., & Lio, Y. (2009). A Note on the Maximum Likelihood Estimation for the Generalized Gamma Distribution Parameters under Progressive Type-Ⅱ Censoring. *International Journal of Intelligent Technologies and Applied Statistics*, *2*(2), 145-152.
[6] Cheng, S. W., & Fu, J. C. (1982). Estimation of mixed Weibull parameters in life testing. *IEEE Transactions on Reliability*, *31*(4), 377-381.
[7] Ebeling, C. E. (2004). *An introduction to reliability and maintainability engineering*. Tata McGraw-Hill Education.
[8] Hanif, S., Al-Ghamdi, S. D., Khan, K., & Shahbaz, M. Q. (2015). Bayesian estimation for parameters of power function distribution under various priors. *Mathematical Theory and Modeling*, *5*(13).
[9] Huo, X., Khosa, S. K., Ahmad, Z., Almaspoor, Z., Ilyas, M., & Aamir, M. (2020). A new lifetime exponential-X family of distributions with applications to reliability data. *Mathematical Problems in Engineering*, *2020*.
[10] Meniconi, M., & Barry, D. M. (1996). The power function distribution: A useful and simple distribution to assess electrical component reliability. *Microelectronics Reliability*, *36*(9), 1207-1212.
[11] Rausand, M., & Hoyland, A. (2003). *System reliability theory: models, statistical methods, and applications* (Vol. 396). John Wiley & Sons.
[12] Tahir, M. H., Alizadeh, M., Mansoor, M., Cordeiro, G. M., & Zubair, M. (2016). The Weibull-power function distribution with applications. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, *45*(1), 245-265.
[13] Yadav, A. S., Maiti, S. S., & Saha, M. (2021). The inverse xgamma distribution: statistical properties and different methods of estimation. *Annals of Data Science*, *8*(2), 275-293.
[14] Zaka, A., & Akhter, A. S. (2014). Modified moment, maximum likelihood and percentile estimators for the parameters of the power function distribution. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 369-388.
[15] Zarrin, S. H. A. Z. I. A., Saxena, S. H. A. S. H. I., Kamal, M. U. S. T. A. F. A., & Islam, A. U. (2013). Reliability computation and Bayesian Analysis of system reliability of Power function distribution. *International Journal of Advance in Engineering, Science and Technology*, *2*(4), 76-86.
[16] Mohammed, B., Raheem, S., & Dikheel, T. (2020). Sliced Inverse Regression (SIR) via group lasso. Journal of Al-Rafidain University College For Sciences (Print ISSN: 1681-6870, Online ISSN: 2790-2293), (1), 505-512.
[17] Raheem, S. H. (2017). Use Box-Jenkins models for predicting traffic accidents in AL-Qadisiya province. Muthanna Journal of Administrative and Economic Sciences, 7(2).