Warith Scientific Journal

تقدير دالة البقاء بالفترة لتوزيع فريجت لبيانات الضبابية لمرض سرطان الدماغ في محافظة كربلاء المقدسة

Estimating the Survival Function with the Interval of the Frechet distribution for fuzzy data on brain cancer in the Holy Karbala Governorate

م.م امتنان ستار عيسى
جامعة وارث الأنبياء/ كلية الإدارة والاقتصاد
Emtinan Satar Eisaa
University of Warith Al-Anbiyaa/ College of Administration and Economics
emtinan.satar@uowa.edu.iq

م.م عماد نعمه هاشم الموسوي
جامعة وارث الأنبياء/ كلية الإدارة والاقتصاد
Emad Neama Hashem Almosuoy
University of Warith Al-Anbiyaa/ College of Administration and Economics
emad.neama@uowa.edu.iq

م.م فواز فائق صليبي المسعودي
جامعة وارث الأنبياء/ كلية الإدارة والاقتصاد
Fawwaz Faiq Sleibi Almasoodi
University of Warith Al-Anbiyaa/ College of Administration and Economics
fawaz.fa@uowa.edu.iq

المستخلص:

في هذا البحث يتم تقدير دالة البقاء لتوزيع فريجت ذي معلمتين معلمة الشكل ومعلمة القياس بطريقة الإمكان الأعظم النسبية في حالة البيانات الضبابية بعد تحويل البيانات الحقيقية الى بيانات ضبابية باستخدام دالة الانتماء المثلثية عند معامل القطع ($\alpha = 0.2$) وتبينت ان تقدير دالة البقاء لبيانات الضبابية كانت أدق من تقدير دالة البقاء البيانات الحقيقية من خلال حدود الثقة بالفترة وتبينت ان الحد الأعلى والحد الأدنى للبيانات الضبابية تقع داخل تقدير المعلمات المقدرة اما البيانات الحقيقية فان الحد الأعلى والحد الأدنى تقع خارج تقدير المعلمات المقدرة وتم تقدير بالفترة للمعلمات واستخراج طول الفترة ومتوسط مربعات الخطأ (MSE).

الكلمات المفتاحية: توزيع فريجت، بيانات ضبابية، تقدير بالفترة، طريقة الإمكان الأعظم النسبية.

Abstract:

In this research, the survival function for a Frechet distribution with two parameters, the shape parameter and the scaling parameter, is estimated using the relative maximum potential method in the case of fuzzy data after converting the real data to fuzzy data using the trigonometric belonging function at the cutoff factor (α =0.2). It was found that the survival function estimate for the blurry data was It is more accurate than estimating the survival function. Real data through confidence limits with the interval. It was found that the upper and lower bounds for the fuzzy data lie within the estimate of the estimated parameters. As for the real data, the upper and lower bounds lie outside the estimate of the estimated parameters. The parameters were estimated with the interval and the length of the period and the mean square error (MSE) were extracted.

Keywords: Frechet distribution, Fuzzy Data, Interval Estimation, Raletive Maximum Likelihood Method.

1- المقدمة (Introduction):

في العالم الحقيقي يوجد العديد من المشاكل التي يواجها الانسان في الحياة قد تكون هناك مجموعات من الأشياء التي لا تحتوي على العضوية الدقيقة لعناصرها لذا فان هذه المجموعات لا تشكل مجموعات بالمعنى الرياضي المعتاد على هذه المصطلحات على سبيل المثال اذا كان لدينا مجموعة من الطلبة في جامعة معينة فيمكننا اخذ مصطلح يمثل " الطلبة " الذين لديهم رخصة قيادة من الطبيعي ان يكون لكل طالب في تلك المجموعة ترخيص ام لا اذا كان الطالب لديه رخصة قيادة وكانت القيمة صفراً فلا يمكن الحصول على رخصة القيادة ولكن اذا اخذنا مجموعة فرعية التي تمثل " الطلبة الذين يقودون بشكل جيد للغاية " فيستمتع كل طالب بدرجة معينة من رخصة القيادة ويتم تمييز الطلبة في المجموعة بوظيفة العضوية التي تعطي قيمة بين الصفر والواحد وهنا جزيئة الانتماء مسموح به من ناحية أخرى تعد الموثوقية واحدة من التقنيات وأكثرها فاعلية في الوقت الحالي لتقييم عمل أي وحدة انها الوظيفة التي تعطي احتمالية عمل أي وحدة لفترة زمنية معينة دون عطل وتفترض العديد من الطرق والنماذج في شكلها التقليدي ان جميع دالة الاحتمال مدى الحياة واضحة في تطبيقات العالم الحقيقي لذلك من الضروري تعميم طرق تقدير الاحصائي الكلاسيكي للأرقام الحقيقية الى ارقام ضبابية هذا بسبب معلمات توزيع الاحتمالات في بعض الأحيان لا يمكن تسجيلها بدقة بسبب أخطاء الخبرة او التقدير وذلك يؤدي الى المعلمات في توزيعات الحياة غير واضحة وقد يصبح الموثوقية صعبة للتعامل مع الموثوقية التقليدية وبالتالي يمكننا التعامل مع مصطلح اكثر شمولا من مصطلح الموثوقية التقليدي الى الموثوقية الضبابية ويتم تعريف على انها الاحتمال الضبابية لاستمرارية عمل أي وحدة بنجاح لفترة زمنية والى درجة انتماء التي يتم تحديدها وفقا لنظرية عضوية معينة وبدا المنطق الضبابي بالنضوج على يد العالم الاذربيجاني (Zadeh) في عام 1965.

عندما استخدم مصطلح " المتغيرات الضبابية " وهو اول من وضع أسس نظرية المجموعات الضبابية (Zadeh,1965,p:338-353)ويتم تعريف المجموعة الضبابية على انها مجموعة من الكائنات او العناصر التي لها درجات انتماء مستمرة تتميز بوظيفة لكل كائن في المجموعة غالبا ما تكون درجة الانتماء بين الصفر والواحد ,Zadeh,1968) (p:95و بصورة عامة التقدير في الاستدلال الاحصائي يقسم الى قسمين الأول التقدير بالنقطة والثاني التقدير بالفترة التقدير بالنقطة اي الحصول على قيمة واحدة للمعلمة المراد تقديرها والتقدير بالفترة أي الحصول على فترة للمعلمة المراد تقديرها (Hogg&Graig,1978,p:107-122)وقام Wu في عام 2004 بتقديرBayes الضبابية باستخدام نهج في البيئة الضبابية بافتراض معالجة ضبابية للمتغيرات الضبابية مع التوزيعات الضبابية (Wu,2004,p:1-27) وقام Pak واخرون في عام 2013 اذ استخدموا منهجية بيزي لتقدير بيزي للمعلمة للتوزيع رايلي على أساس بيانات أوقات الحياة الضبابية (Park,Ali&Saraj,2013,p1-8) وقام Pak في عام 2016 بتقدير الإمكان الأعظم وبيز والعزوم لمعلمة الشكل للتوزيع اللوغاريتم الطبيعي (Park,2016,p:90-98) وقام Mweleli واخرون في عام 2020 بتقدير بالفترة للتوزيع ويبل استناد على بيانات خاضعة للرقابة من النوع الثاني (Mweleli;Orawo;Tamba&Okenye,2020,p:1043-1045) .

2-المنهجية:

2-1- مشكلة البحث (Problem of the search):

على الرغم من ان التقدير لدالة البقاء بالفترة لمعلمات التوزيع يعتمد على دقة البيانات المستعملة في تقدير معالم التوزيع الاحتمالي ولكن توجد الكثير من الظواهر في العالم الحقيقي تعاني من عدم الدقة في قياساتها لذلك ستكون الضبابية (Fuzziness) هي الصفة الملائمة لها ويتم التعبير عنها بالأرقام ضبابية (Fuzzy Numbers) حيث ان ذلك يجعل الأساليب التقليدية في تقدير المعلمات للتوزيع الاحتمالي لتلك البيانات غير مناسبة فلا بد من البحث عن أساليب تستوعب هذه المشكلة وتقودنا الى تقديرات دقيقة ومضبوطة للظواهر قيد الدراسة.

2-2- هدف البحث (Aim of the search):

يهدف البحث الى:

تقدير دالة البقاء لتوزيع فريجت بالفترة للبيانات الضبابية بعد تحويل البيانات الحقيقية الى بيانات ضبابية ومن طرائق التقدير لدالة البقاء بالفترة في توزيع فريجت (طريقة الإمكان الأعظم النسبية) في حالة بيانات عبارة عن ارقام ضبابي

3-الجانب النظري:

3-1- توزيع فريجت: Frechet Distribution

يعد توزيع فريجت من التوزيعات الاحتمالية المستمرة لنماذج ازمنة الحياة Lifetime models و قد قدم هذا التوزيع من قبل عالم الرياضيات الفرنسي Maurice Frechet (1828-1973) والذي يمتاز باستخدامات متعددة (نماذج وتحليل الحوادث الطبيعية مثل الهزات الأرضية والزلازل والفيضانات وسقوط الامطار وسرعة الرياح واختبارات الحياة وتيارات البحار والدراسات البايلوجية والدراسات الطبية) وكذلك يستعمل في نمذجة وفيات الأطفال الرضع وهو من التوزيعات المناسبة الملائمة لعينات البقاء على قيد الحياة .(Abbas&Yincai , 2012,p:58)

واقترح الباحث (Drapella) عام (1993) اسم معكوس ويبل او مقلوب ويبل على توزيع فريجت

وعلى افتراض ان المتغير العشوائي t يتوزع وفقا لتوزيع ويبل (Weibull) فأن معكوس المتغير العشوائي $\left(\frac{1}{t}\right)$يتوزع وفقا لتوزيع فريجت ((Drapella,1993,p:383

وان دالة الكثافة الاحتمالية تكون بالشكل الاتي:

$$f(t,\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}t^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right) \qquad ، t > 0، \alpha,\beta > 0 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

α : تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter)

β : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

واما دالة الكثافة الاحتمالية في حالة بيانات الضبابية باستعمال صيغة التوزيع الاحتمال الضبابي تكون بالشكل الاتي.

$$\tilde{f}(\tilde{t},\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}t^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right)\mu_{\tilde{A}}(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (2)$$

إذا ان:

t : متغيراً عشوائياً

$\mu_{\tilde{A}}(t)$: هي دالة الانتماء التي تحدد درجة الانتماء لأي قيمة من قيم x وتصبح الدالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الضبابية بالشكل الاتي:

$$\tilde{f}(\tilde{t},\alpha,\beta) = \alpha\beta^{\alpha}\tilde{t}^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{\tilde{t}}\right)^{\alpha}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3)$$

وان دالة التوزيع التراكمي لمتغير يتبع توزيع فريجت تكون بالشكل الاتي:

$$F(t,\alpha,\beta) = p(T \le t) = \int_{0}^{t} f(u)du = \exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right) \quad ; t > 0 \ldots\ldots\ldots (4)$$

واما دالة التوزيع التراكمي في حالة البيانات الضبابية تكون بالشكل الاتي:

$$\tilde{F}(,\tilde{t}\alpha,\beta) = \exp\left(-\left(\frac{\beta}{\tilde{t}}\right)^{\alpha}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

3-2- دالة البقاء: (Survival Function)

دالة البقاء على قيد الحياة (Survival Function) وهي مكملة لدالة التوزيع التراكمية وتعرف الدالة على أنها احتمال بقاء الكائن الحي على بقاء الحياة حتى الزمن المحدد t ويرمز لها بالرمز $S(t)$ وصيغتها الرياضية هي

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

أي ان دالة البقاء هي دالة احتمالية محصورة بين الصفر والواحد او بمعنى أخر

$0 \leq S(t) \leq 1$ (Tiana & Purwadi , 2019 , p:5)

وتكون دالة البقاء لتوزيع فريجت بالشكل الاتي.

$$S(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

لكن إذا أردنا ان نقدر دالة البقاء لكائن حي للفترة (t_1, t_2) ، إذ ان t_1 الذي يمثل بداية مدة الحياة للكائن الحي الى t_2 الذي يمثل نهاية مدة الكائن الحي ولكن من المحتمل أن الكائن الحي سوف يحدث الوفاة له او الجهاز سوف يحدث الفشل له قبل ان يصل إلى الوقت t_2 وعليه تكون قيمة t_2 قيمة ضبابية اذ سوف تتحول الى مفهوم دالة البقاء الضبابية لأننا نتعامل مع بيانات ضبابية لذلك تكون دالة البقاء الضبابية بالشكل الاتي.

$$\tilde{S}(\tilde{t}) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta}{\tilde{t}}\right)^{\alpha}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

3-3- المجموعة الضبابية: (Fuzzy Sets)

تعرف المجموعة الضبابية بأنها المجموعة التي تمتلك عناصرها نسبة انتماء معينة تدعى بدرجة الانتماء او درجة العضوية أي انها تمتلك مدى بين الفترة [0,1]، لنفترض ان T يمثل مجموعة شاملة يحتوي على جميع العناصر وان$\tilde{A}$ مجموعة جزئية ضبابية من T فدالة الانتماء من $\tilde{A}$ هي دالة في T وتكتب دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(t)$ ويمكن تمثيلها بالشكل الاتي:

$$\tilde{A} = \left\{\left(t_i\,, \mu_{\tilde{A}}\,(t_i)\right), t_i \in T\,, i = 1,2,3 \ldots\ldots n\,, 0 \leq \mu_{\tilde{A}} \leq 1\right\} \quad \ldots\ldots (9)$$

فاذا افترضنا ان $\mu_{\tilde{A}}(t) = 1$ يكون العنصر t ينتمي تماما الى $\tilde{A}$ وإذا $\mu_{\tilde{A}}(t) = 0$ يكون العنصر tلا ينتمي تماما الى $\tilde{A}$ وإذا $\mu_{\tilde{A}}(t) = 0.9$ يكون العنصر t ينتمي بدرجة 0.9 $\tilde{A}$ وإذا كانت $\mu_{\tilde{A}}(t)$ مساوية الى واحد او صفر سنحصل على مجموعة جزئية غير ضبابية *(Chen&Tat,2000,p:37-42)*

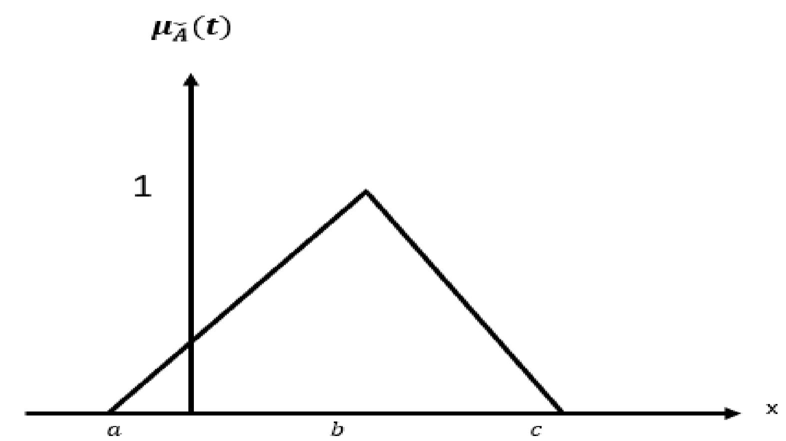
واما الأرقام الضبابية تعرف بانها الارقام التي تستعمل لوصف حالة عدم التأكد التي تصاحب بعض المشاهدات ويتميز بما تسمى دالة الانتماء وتأتي الأرقام الضبابية في اشكال عديدة ولكن الأكثر استخداما لوصف البيانات الضبابية هي الأرقام المثلثية الضبابية (Kwang,2004,p:130-139)

الرقم الضبابي المثلثي ويعد هذا الرقم أكثر شيوعا لسهولة استعماله حيث يتم تمثيله بثلاث نقاط $(a\,, b\,, c)$ أي ان $a < b < c$, وقاعدة المثلث الفترة $[a, c]$ وراسه عند t =b ويمكن ان يكتب بالصيغة الاتية

$$\widetilde{N} = (a/b\;/c)$$

وان دالة الانتماء المثلثية للرقم الضبابي المثلثي يمكن تمثيلها كالاتي:

$$\mu_{\tilde{A}}(t) = \begin{cases} \frac{t-a}{b-a} & a \le t \le b \\ \frac{c-t}{c-b} & b \le t \le c \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$



الشكل (1)يمثل الرقم الضبابي المثلثي

4-طرائق التقدير بالفترة (Interval Estimation Method:)

(Nájera & Bolívar,2021, p:3-6)

1-4- طريقة الإمكان الأعظم النسبية (RMLE Method) في حالة بيانات الحقيقة:

. ان دالة الإمكان الأعظم لتوزيع فريجت يمكن ان تكتب الصيغة الاتية

$$L^* = \log(L_0(\alpha,\beta,t))$$

$$= nlog(\alpha) + n\alpha\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^\alpha)dt \ldots\ldots..(12)$$

وإذا تم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الأعظم $\hat{\alpha}_{mle}$ و $\hat{\beta}_{mle}$ في معادلة (12) نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{L}^*\left(\hat{\alpha}_{mle}, \hat{\beta}_{mle}, t\right) = nlog\left(\hat{\alpha}_{mle}\right) + n\,\hat{\alpha}_{mle}\log\left(\hat{\beta}_{mle}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\hat{\alpha}_{mle}+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}_{mle}}{t}\right)^{\hat{\alpha}_{mle}})dt \quad \ldots\ldots\ldots.(13)$$

فان دالة الامكان النسبية (Relative Likelihood Function) نحصل عليها بقسمة معادلة (12) على معادلة (31) ونحصل على الآتي:

$$R(\alpha,\beta,t) = \frac{L^*(\alpha,\beta,t)}{L^*(\widehat{\alpha}_{mle},\widehat{\beta}_{mle},t)} =$$

$$\frac{nlog(\alpha)+n\alpha\log(\beta)+\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha})dt}{log(\widehat{\alpha}_{mle})+n\,\widehat{\alpha}_{mle}\log(\widehat{\beta}_{mle})+\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\widehat{\alpha}_{mle}+1)}\exp(-\left(\frac{\widehat{\beta}_{mle}}{t}\right)^{\widehat{\alpha}_{mle}})dt)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

إذا رمزنا الى مقدر الامكان الاعظم للمعلمة α بمعلومية المعلمة β بالرمز $\hat{\alpha}(\beta)$ فان مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة βيمكن الحصول عليها بتعظيم دالة الامكان للتوزيع وكالآتي:

$$L_p(\beta) = max_\alpha \boldsymbol{L}^*(\alpha,\beta,t) = \boldsymbol{L}^*(\hat{\alpha}(\beta),\beta,t)$$

$$= max_\alpha Log\left(\hat{\alpha}(\beta)\right) + n\hat{\alpha}(\beta)\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n}\log\left(\int_0^\infty t^{-(\hat{\alpha}(\beta)+1)}\exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\beta)}\right)dt\right. \quad \ldots\ldots(15)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\beta)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة β ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\beta) = \frac{\partial L_p(\beta)}{\partial\beta\beta} = \frac{n\hat{\alpha}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\hat{\alpha}(\beta)\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})-1}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})})}{\int_0^\infty t^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})})dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

لإيجاد مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة α يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$L_p(\alpha) = max_\alpha \boldsymbol{L}^*(\alpha,\beta,t) = \boldsymbol{L}^*\left(\alpha,\hat{\beta}(\alpha);t\right)$$

$$= max_\theta Log(\alpha) + n\alpha\log\left(\hat{\beta}(\alpha)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha})dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\alpha)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة α ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\alpha) = \frac{\partial L_p(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\hat{\alpha}} + n\log\left(\hat{\beta}(\alpha)\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha}\right)lOG\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)-(\alpha+2)t^{-(\alpha+2)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha})}{\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha})dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

فان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة β هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\beta)\geq\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

اذ ان $r_P(\beta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة β

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\beta) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(20)$$

$$r_P(\beta) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

والمعادلتين (20) و (21) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method) وان فترة الثقة %100ψ حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة α هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\alpha) \geq \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22)$$

اذ ان $r_P(\alpha)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة α

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\alpha) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(23)$$

$$r_P(\alpha) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots(24)$$

والمعادلتين (23) و (24) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method)

4-4- طريقة الإمكان الأعظم النسبية (RMLE Method) في حالة بيانات الضبابية:

ان دالة الإمكان الأعظم الضبابية فريجت يمكن ان تكتب الصيغة الاتية .

$$L^* = \log(L_0(\alpha, \beta, \tilde{t}))$$

$$= n\log(\alpha) + n\alpha \log(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt\right) \ldots\ldots..(25)$$

وإذا تم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة الامكان الأعظم الضبابية $\widehat{\alpha}_{fmle}$ و $\widehat{\beta}_{fmle}$ في معادلة (25) نحصل على الآتي:

$$\boldsymbol{L}^*\left(\widehat{\alpha}_{fmle}, \widehat{\beta}_{fmle}, \tilde{t}\right) = n\log\left(\widehat{\alpha}_{fmle}\right) + n\,\widehat{\alpha}_{fmle} \log\left(\widehat{\beta}_{fmle}\right) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^\infty t^{-(\widehat{\alpha}_{fmle}+1)} \exp\left(-\left(\frac{\widehat{\beta}_{fmle}}{t}\right)^{\widehat{\alpha}_{fmle}}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt\right) \quad \ldots\ldots\ldots.(26)$$

فان دالة الامكان النسبية (Relative Likelihood Function) نحصل عليها بقسمة معادلة (25) على معادلة (26) ونحصل على الآتي:

$$R(\alpha, \beta, \tilde{t}) = \frac{\boldsymbol{L}^*(\alpha, \beta, \tilde{t})}{\boldsymbol{L}^*(\widehat{\alpha}_{fmle}, \widehat{\beta}_{fmle}, \tilde{t})} =$$

$$\frac{\log(\alpha) + n\alpha \log(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)} \exp\left(-\left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt\right)}{\log\left(\widehat{\alpha}_{fmle}\right) + n\,\widehat{\alpha}_{fmle} \log\left(\widehat{\beta}_{fmle}\right) + \sum_{i=1}^{n} \log\left(\int_0^\infty t^{-(\widehat{\alpha}_{fmle}+1)} \exp\left(-\left(\frac{\widehat{\gamma}_{fmle}}{t}\right)^{\widehat{\alpha}_{fmle}}\right) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt\right)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots.(27)$$

إذا رمزنا الى مقدر الامكان الاعظم للمعلمة α بمعلومية المعلمة β بالرمز $\hat{\alpha}(\beta)$ فان مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة β يمكن الحصول عليها بتعظيم دالة الامكان للتوزيع وكالآتي:

$$L_p(\beta) = max_\theta \boldsymbol{L}^*(\alpha,\beta,\tilde{t}) = \boldsymbol{L}^*(\hat{\alpha}(\beta),\beta,\tilde{t})$$

$$= max_\theta Log\big(\hat{\alpha}(\beta)\big) + n\hat{\alpha}(\beta)\log(\beta) + \sum_{i=1}^{n} \log\Big(\int_0^\infty t^{-(\hat{\alpha}(\beta)+1)} \exp\Big(-\Big(\frac{\beta}{t}\Big)^{\hat{\alpha}(\beta)}\Big) \mu_{\tilde{t}_i}(t)dt \quad \ldots\ldots(28)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\beta)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة γ ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\beta) = \frac{\partial L_p(\beta)}{\partial\beta} = \frac{n\hat{\alpha}(\hat{\beta})}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\hat{\alpha}(\gamma)\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})-1}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\beta})})\mu_{\tilde{t}_i}(t)}{\int_0^\infty t^{-(\hat{\alpha}(\hat{\beta})+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}}{t}\right)^{\hat{\alpha}(\hat{\gamma})})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(29)$$

لإيجاد مقدر الامكان الاعظم النسبي للمعلمة α يمكن الحصول عليه كالآتي:

$$L_p(\alpha) = max_\theta \boldsymbol{L}^*(\alpha,\beta,\tilde{t}) = \boldsymbol{L}^*\big(\alpha,\hat{\beta}(\alpha),\tilde{t}\big)$$

$$= max_\theta Log(\alpha) + n\alpha\log\big(\hat{\beta}(\alpha)\big) + \sum_{i=1}^{n}\log(\int_0^\infty t^{-(\alpha+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(30)$$

ونقوم بتعظيم الدالة $L_p(\alpha)$ وذلك بالاشتقاق بالنسبة للمعلمة α ومساواة المشتقة بالصفر وكالآتي:

$$R_P(\alpha) = \frac{\partial L_p(\alpha)}{\partial\alpha} = \frac{1}{\hat{\alpha}} + n\log\big(\hat{\beta}(\alpha)\big) + \sum_{i=1}^{n}\frac{t^{-(\alpha+1)}\exp\left(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha}\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha}\right)lOG\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)\mu_{\tilde{t}_i}(t) - (\alpha+2)t^{-(\alpha+2)}\exp(-\left(\frac{\hat{\beta}(\alpha)}{t}\right)^{\alpha})\mu_{\tilde{t}_i}(t)}{\int_0^\infty t^{-(\theta+1)}\exp(-\left(\frac{\hat{\gamma}(\theta)}{t}\right)^{\theta})\mu_{\tilde{t}_i}(t)dt} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots..(31)$$

فان فترة الثقة %100ψ حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة β هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\beta) \geq \psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(32)$$

اذ ان $r_P(\beta)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة β
فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\gamma) - \mathrm{Log}(\psi) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(33)$$

$$r_P(\gamma) - \mathrm{Log}(0.147) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(34)$$

والمعادلتين (33) و (34) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method) وان فترة الثقة 100ψ% حسب مقدرات الامكان الاعظم النسبية للمعلمة α هي مجموعة كل القيم التي تحقق:

$$R_P(\theta)\geq\psi \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (35)$$

اذ ان $r_P(\alpha)$ هي اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان النسبية الجزئية للمعلمة α

فان فترة الثقة الإمكان الاعظم النسبية يمكن الحصول عليها بحل المعادلتين الآتيتين:

$$r_P(\alpha)-\mathrm{Log}(\psi)=0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots. (36)$$

$$r_P(\alpha)-\mathrm{Log}(0.147)=0 \quad \dots.\dots\dots\dots\dots\dots (37)$$

والمعادلتين (36) و (37) يمكن حلهما باستعمال طريقة القاطع (Bisection Method).

5-الجانب التطبيقي (the application aspect):

5-1-عينة البحث للبيانات غير المدبية(البيانات الحقيقية):

يتضمن هذا القسم تطبيقا عمليا لتوزيع فريجت على بيانات من الواقع الحقيقي التي تم الحصول عليها من مركز الامام الحسين (عليه السلام) لعلاج الأورام وامراض الدم في محافظة كربلاء المقدسة وان هذه البيانات تمثل أوقات البقاء على قيد الحياة لحين الوفاة للحالات المسجلة للمرضى المصابين بسرطان الدماغ إذا اخذت عينة عشوائية بحجم (100) مريض وتحديد فترة بقائهم على قيد الحياة لحين الوفاة (بالسنوات) ، وذلك بهدف تطبيقها على التوزيع ومن ثم تقدير بالفترة لتوزيع في حالة مقدرات المعلمات ومقدرات بالفترة باستعمال طريقة الإمكان الأعظم النسبية (RMLE) للبيانات الحقيقية والضبابية ولكن في بحثا هذا سوف نتعرض الى تقدير معلمات بالفترة الضبابية

جدول (1) مدة بقاء المريض بسرطان الدماغ على قيد الحياة من تاريخ تسجيل الحالة ولحين الوفاة (بالسنوات)

i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i	i	t_i
1	0.25	21	0.45	41	0.7	61	1.2	81	2
2	0.25	22	0.45	42	0.7	62	1.2	82	2
3	0.29	23	0.45	43	0.8	63	1.22	83	2.2
4	0.3	24	0.45	44	0.8	64	1.22	84	2.25
5	0.3	25	0.46	45	0.86	65	1.23	85	2.3
6	0.3	26	0.5	46	0.9	66	1.24	86	2.4
7	0.3	27	0.5	47	0.9	67	1.25	87	2.5
8	0.3	28	0.5	48	0.97	68	1.3	88	2.6
9	0.3	29	0.52	49	0.98	69	1.3	89	2.68
10	0.31	30	0.54	50	0.99	70	1.4	90	3
11	0.32	31	0.55	51	1	71	1.5	91	3.01
12	0.34	32	0.57	52	1	72	1.5	92	3.1
13	0.35	33	0.58	53	1.02	73	1.6	93	3.15
14	0.4	34	0.6	54	1.03	74	1.6	94	3.2

15	0.4	35	0.6	55	1.1	75	1.6	95	3.2
16	0.4	36	0.6	56	1.1	76	1.7	96	3.2
17	0.44	37	0.64	57	1.1	77	1.8	97	3.25
18	0.45	38	0.65	58	1.1	78	1.8	98	3.7
19	0.45	39	0.66	59	1.1	79	1.9	99	4
20	0.45	40	0.7	60	1.2	80	1.9	100	4

المصدر: من اعداد الباحثين

وان اهم المؤشرات الإحصائية للبيانات الحقيقية المذكورة آنفا مبينة في الجدول (2) ادناه.

الجدول (2) قيم المؤشرات الإحصائية للبيانات الحقيقية

Statistic	Value
Mean	1.2442
Std. Deviation	0.9597
Median	0.9950
Mode	0.4500
Variance	0.9210
Range	3.7500
Min	0.2500
Max	4

المصدر: من اعداد الباحثين

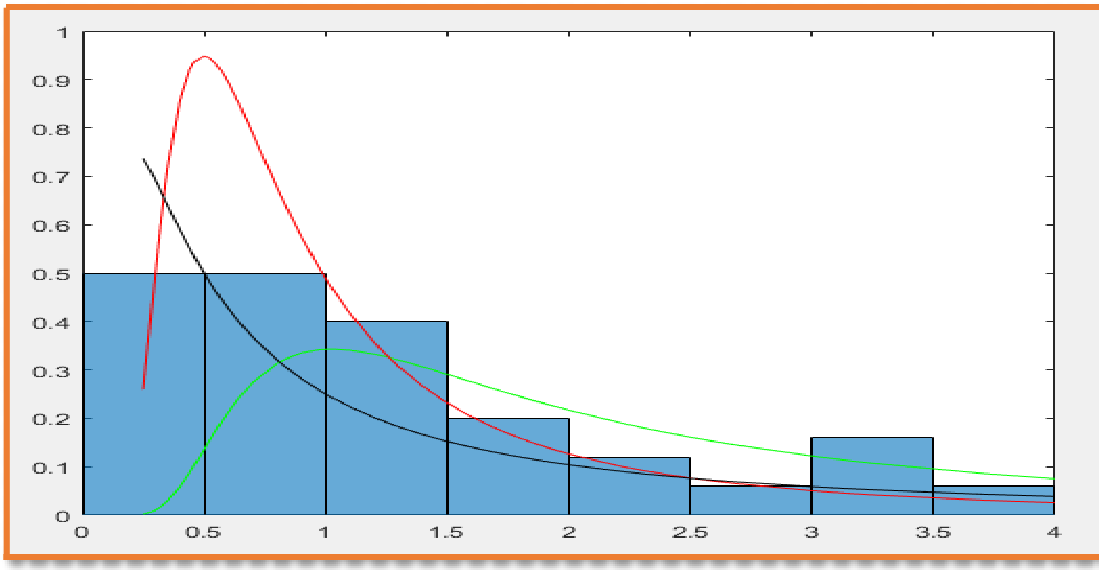
2-5-اختبار ملائمة البيانات (Data Fitting test):

لغرض معرفة توزيع البيانات الحقيقية الواردة في الجدول (1) تتبع توزيع فريحت ام لا وتم استعمال اختبار كولمكروف - سميرنوف (Kolmogorov-Smirnov) لتوزيع عند معلمات مختلفة عن طريق برنامج كتب بلغة ماتلاب حسب الفرضية الإحصائية الاتية.

H_0=the data are distribution

H_1 =the data are not distribution

وكانت نتيجة الاختبار البالغة هي) 0.2342) أكبر من مستوى المعنوية (0.05) لذلك لا نرفض فرضية العدم أي ان البيانات تتبع توزيع فريجت.



الشكل (2) منحني دالة الكثافة الاحتمالية للبيانات الحقيقية عند قيم مختلفة للمعلمات لتوزيع فريجت

5-3-تضبيب البيانات (Data Fuzziness):

يتم تحويل متجه البيانات الحقيقية التقليدية $\underline{t} = (t_1, t_2, t_3, \dots \dots \dots t_n)`$ الى الضبابية وذلك لأيجاد درجة الانتماء المقابلة لكل مشاهدة من مشاهدات متجه البيانات الحقيقية التقليدية باستعمال دالة الانتماء المثلثية حسب الصيغة (10) إذ أن a = 0.25 تمثل اقل قيمة من قيم مشاهدات البيانات الحقيقية و b = 4 تمثل اكبر قيمة من قيم مشاهدات البيانات الحقيقية والذي ينتج لدينا متجه بيانات ضبابية $\underline{\tilde{t}} = \tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \dots\dots, \tilde{t}_n$ يضمن كل مشاهدة ودرجة انتماءها المقابلة كالاتي.

جدول (3) البيانات الحقيقية ودرجة انتماء كل مشاهدة

i	t_i	Degree of Membership
1	0.25	0
2	0.25	0
3	0.29	0.0106
4	0.3	0.0133
5	0.3	0.0133
6	0.3	0.0133
7	0.3	0.0133
8	0.3	0.0133
9	0.3	0.0133
10	0.31	0.016

11	0.32	0.0186
12	0.34	0.024
13	0.35	0.0266
14	0.4	0.04
15	0.4	0.04
16	0.4	0.04
17	0.44	0.0506
18	0.45	0.0533
19	0.45	0.0533
20	0.45	0.0533
21	0.45	0.0533
22	0.45	0.0533
23	0.45	0.0533
24	0.45	0.0533
25	0.46	0.056
26	0.5	0.0666
27	0.5	0.0666
28	0.5	0.0666
29	0.52	0.072
30	0.54	0.0773
31	0.55	0.08
32	0.57	0.0853
33	0.58	0.088
34	0.6	0.0933
35	0.6	0.0933
36	0.6	0.0933
37	0.64	0.104
38	0.65	0.1066
39	0.66	0.1093
40	0.7	0.12
41	0.7	0.12
42	0.7	0.12
43	0.8	0.1466
44	0.8	0.1466

45	0.86	0.1626
46	0.9	0.1733
47	0.9	0.1733
48	0.97	0.192
49	0.98	0.1946
50	0.99	0.1973
51	1	0.2
52	1	0.2
53	1.02	0.2053
54	1.03	0.208
55	1.1	0.2266
56	1.1	0.2266
57	1.1	0.2266
58	1.1	0.2266
59	1.1	0.2266
60	1.2	0.2533
61	1.2	0.2533
62	1.2	0.2533
63	1.22	0.2586
64	1.22	0.2586
65	1.23	0.2613
66	1.24	0.264
67	1.25	0.2666
68	1.3	0.28
69	1.3	0.28
70	1.4	0.3066
71	1.5	0.3333
72	1.5	0.3333
73	1.6	0.36
74	1.6	0.36
75	1.6	0.36
76	1.7	0.3866
77	1.8	0.4133
78	1.8	0.4133

79	1.9	0.44
80	1.9	0.44
81	2	0.4666
82	2	0.4666
83	2.2	0.52
84	2.25	0.5333
85	2.3	0.5466
86	2.4	0.5733
87	2.5	0.6
88	2.6	0.6266
89	2.68	0.648
90	3	0.7333
91	3.01	0.736
92	3.1	0.76
93	3.15	0.7733
94	3.2	0.7866
95	3.2	0.7866
96	3.2	0.7866
97	3.25	0.8
98	3.7	0.92
99	4	1
100	4	1

المصدر: من اعداد الباحثين

بعد ذلك يتم الحصول على المجموعة الضبابية عند معاملات القطع $\gamma = 0.2$
$\breve{A}_{\gamma} = \{\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3, \ldots\ldots, \tilde{t}_n\}$ باختيار العناصر في المجموعة الضبابية التي لها درجة انتماء أكبر او تساوي القطع γ .

4-5- تحليل البيانات (Data analyzing):

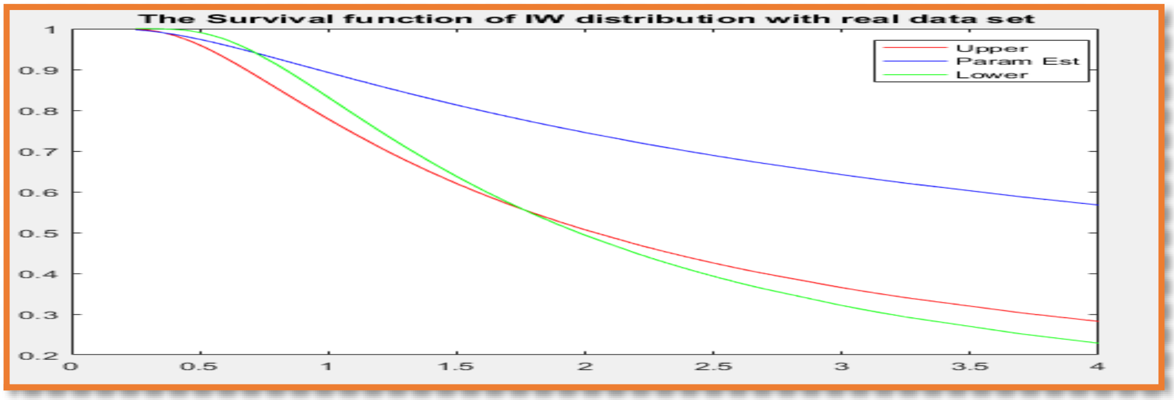
لتحليل عينة البيانات الضبابية في تقدير بالفترة طريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية (FRML) في تقدير بالفترة حيث أن $\hat{S}$ of Lower يمثل تقدير دالة البقاء لحد Lower لفترة و$\hat{S}$ of Est يمثل تقدير دالة البقاء لمعلمات و $\hat{S}$ of Upper يمثل دالة البقاء لحد Upper كما موضح في الجدول (4).

جدول (4) تقدير دالة البقاء بالفترة للبيانات الضبابية عند القطع (0.2)

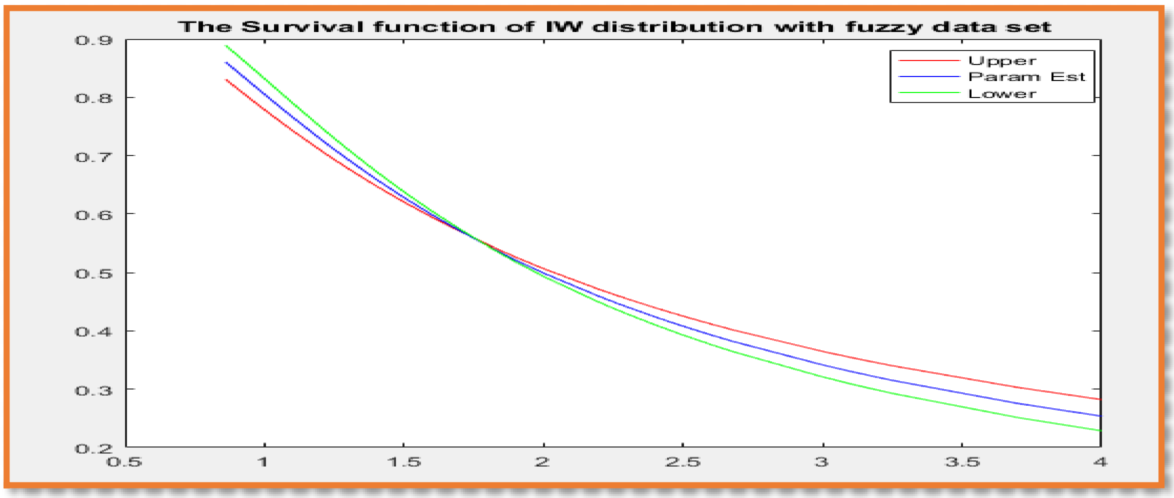
i	$\tilde{t}_{0.2}$	$\hat{S}$of Lower	$\hat{S}$of Est	$\hat{S}$of Upper
1	1	0.77604	0.80660	0.83676
2	1	0.77604	0.80660	0.83676
3	1.02	0.77043	0.80024	0.82984
4	1.03	0.76766	0.79707	0.82639
5	1.1	0.74867	0.77528	0.80238
6	1.1	0.74867	0.77528	0.80238
7	1.1	0.74867	0.77528	0.80238
8	1.1	0.74867	0.77528	0.80238
9	1.1	0.74867	0.77528	0.80238
10	1.2	0.72294	0.74535	0.76882
11	1.2	0.72294	0.74535	0.76882
12	1.2	0.7229	0.74535	0.76882
13	1.22	0.71798	0.73955	0.76225
14	1.22	0.71798	0.73955	0.76225
15	1.23	0.71553	0.73667	0.75898
16	1.24	0.71309	0.73380	0.75573
17	1.25	0.71067	0.73095	0.75249
18	1.3	0.69878	0.71695	0.73651
19	1.3	0.69878	0.71695	0.73651
20	1.4	0.67612	0.69010	0.70566
21	1.5	0.65486	0.66480	0.67640
22	1.5	0.65486	0.66480	0.67640
23	1.6	0.63490	0.64097	0.64875
24	1.6	0.63490	0.64097	0.64875
25	1.6	0.63490	0.64097	0.64875
26	1.7	0.61615	0.61856	0.62268
27	1.8	0.5985	0.59747	0.59814
28	1.8	0.5985	0.59747	0.59814

29	1.9	0.58187	0.57762	0.57506
30	1.9	0.58187	0.57762	0.57506
31	2	0.56618	0.55892	0.55336
32	2	0.56618	0.55892	0.55336
33	2.2	0.53735	0.52467	0.51374
34	2.25	0.53062	0.51671	0.50456
35	2.3	0.52407	0.50897	0.49565
36	2.4	0.51148	0.49412	0.47861
37	2.5	0.49952	0.48007	0.46254
38	2.6	0.48815	0.46675	0.44738
39	2.68	0.47944	0.45660	0.43585
40	3	0.44775	0.41988	0.39451
41	3.01	0.44683	0.41883	0.39332
42	3.1	0.43875	0.40955	0.38297
43	3.15	0.43440	0.40457	0.37743
44	3.2	0.43014	0.39970	0.37202
4 5	3.2	0.43014	0.39970	0.37202
46	3.2	0.43014	0.39970	0.37202
47	3.25	0.4259	0.39494	0.36675
48	3.7	0.39208	0.35662	0.32471
49	4	0.37256	0.33488	0.30121
50	4	0.37256	0.33488	0.30121

المصدر: من اعداد الباحثين



الشكل (3) دالة البقاء لتقدير بالفترة لتوزيع فريجت في حالة البيانات الحقيقية



الشكل (4) دالة البقاء لتقدير بالفترة لتوزيع فريجت في حالة البيانات الضبابية

جدول (5) القيم المقدرة للمعلمات بالفترة في توزيع فريجت للبيانات الضبابية

$\gamma - Cut$	Par	Est	Interval of Est	length	MSE
0.2	$\hat{\alpha}$	1.0052	(0.8413,1.1692)	0.3279	0.00898
	$\hat{\beta}$	1.6388	(1.6145,1.6631)	0.0486	0.000125

المصدر: من اعداد الباحثين

6- الاستنتاجات:

أظهرت نتائج الجانب التطبيقي في هذا البحث ما يلي

1- نلاحظ من الاشكال (3) و (4) ان دالة البقاء لتوزيع فريجت لتقدير بالفترة في حالة البيانات الضبابية أفضل من البيانات الحقيقية أي ان التقدير في حالة البيانات الضبابية تقع ضمن الحد الأدنى والحد الأعلى اما في حالة البيانات الحقيقية فان تقدير معلمات تقع خارج الحد الأدنى والحد الأعلى.

2- بزيادة القطع في المجموعة الضبابية تزداد الدقة التقديرات وفقا لطريقة الإمكان الأعظم النسبية الضبابية وتقل الدقة التقديرات بالطريقة الإمكان الأعظم الاعتيادية.

3- ولاحظنا ان البيانات الضبابية في الجانب التطبيقي تعطي نتائج ادق للتقديرات عكس البيانات الحقيقية .

7- التوصيات:

1-نوصي الباحثين باستخدام توزيعات أخرى وتطبيق على البيانات الضبابية واختيار دوال انتماء ضبابية أخرى.

2-نوصي الباحثين باستعمال طرائق تقدير بالفترة الحديثة والمقترحة لتقدير معلمات بالفترة للتوزيعات الاحتمالية المقترحة.

8- المصادر:

1- Abbas, Kamran & Yincai, Tang, (2012), " Comparison of Estimation Methods for Frechet Distribution with Known Shape" , Caspian Journal of Applied Sciences Research , 1(10) , pp:58-64 , LSSN: 2251-9114 , CJASR

2- Chen, Guanrong & Tat, Trung, (2000)," Introduction to Fuzzy sets, Fuzzy Logis and Fuzzy Control Systems", Boca Raton London New York Washington, D.C CRC Press

3- Drapella, A, (1993)," The complementary Weibull distribution: unknown or just forgotten", Quality and reliability engineering international, 9.4:383-385

4- Hogg, R. V; Mckean, J. W & Graig, A. T, (1978)," Introduction to Mathematical Statistics ", Eighth Edition, Macmillan Publishing Co.In, New

5- Kwang, H.Lee, (2004)," Frist Course on Fuzzy Theory and Applications ", ISSN 16-15-3871, ISBN 3-540-22988-4 Springer, Berlin Heidelberg New York, ppt:1-20

6- Mweleli, R.M; Orawo, L.A; Tamba, C.L & Okenye, J.O, (2020)," Interval Estimation in a Parameter Weibull Distribution Based on Type-2 Censored Data ", Open Journal of Statistics, 10(06), 1039-1056

7- Nájera, E & Bolívar-Cimé, A, (2021)," Comparison of same interval estimation methods for the parameters of the gamma distribution ", Communication in Statistics – Simulation and Computation, 1-17

8- Pak, Abbas, (2016),'' Inference for the Shape Parameter of Lognormal Distribution in Presence of Fuzzy Data ", Pak.j.stat.oper.res, Vol.XII, No.1, pp.89-99

9- Pak, Abbas; Ali, Gholam & Saraj, Mansour, (2013)," Reliability estimation in Rayleigh distribution based on fuzzy life time data ", Int J Syst Assur Eng Mang, springer, DOI 10.1007/s13198-013-0190-5

10- Remos, P. L; Nascimento, D & Louzada, F, (2017)," The Long Term Fréchet distribution: Estimation, Properties, and its application ", arXiv preprint arXiv: 1709.07593

11- Triana, Y & Purwadi, J, (2019), "Exponential Distribution Parameter Estimation with Bayesian SELF Method in Survival Analysis ", In Journal of Physics, Conference Series (Vol. 1373, No. 1, p. 012050), IOP Publishing.

12- Wu, Hsien-Chung, (2004)," Fuzzy reliability estimation using Bayesian approach ", Computers & Industrial Engineering, 46, pp 467-493.

13- Zadeh, L.A, (1968)," Fuzzy Algorithms ", Information and control, 12, 94, 102.

14- Zadeh, L.A, (1965)," Fuzzy Sets ", Information and Control, Department of Electrical Engineering and Electronics Research Laboratory, University of California, Berkeley, California, 8, 338-353.