

## مقارنة بعض طرائق التقدير لدالة المعولية الضبابية والمعلمات لأنموذج كابا المحول مع تطبيق عملي

### Comparison of some estimation methods for fuzzy reliability function and parameters of the transformed kappa model with practical application

أ.م.د. صدى فياض محمد  
جامعة كربلاء- كلية الإدارة  
والاقتصاد

Prof. Sada Fayyad  
Muhammad  
Statistics, College of  
Administration and  
Economics, Iraq  
sada.f@uokerbala.edu.  
iq

أ.د. شروق عبد الرضا سعيد  
جامعة كربلاء- كلية الإدارة  
والاقتصاد

a. Dr.. Shorouk Abdel  
Reda Saeed  
Statistics, College of  
Administration and  
Economics, Iraq  
Shorouq.a@uokerbala.  
edu.iq

الباحثة مريم صادق كاظم النقاش  
جامعة كربلاء- كلية الإدارة  
والاقتصاد

Researcher Maryyam Sadiq  
Kazem Al-Naqash  
Statistics, College of  
Administration and  
Economics, Iraq  
maryyam.sadiq@s.uokerbala.  
edu.iq

#### المستخلص:

في هذا البحث سنقوم بعمل تحليل احصائي تجريبي باستعمال المحاكاة وتطبيقي حقيقي على بيانات الحياة الغير اعتيادية، أي البيانات التي تتصف بالضبابية، وهو ان هناك أوقات تتوقف فيها الأبراج التابعة لشركة زين العراق للاتصالات المراد دراستها عن العمل ويتم إصلاحها في حينها لا يتم تسجيلها، استطعنا التعامل مع هذه البيانات الضبابية وتحليلها في توزيع مقترح يطلق عليه توزيع (Alpha Power kappa)، والذي تم بناءه باستعمال صيغة تحويل تدعى (Alpha Power Transformed) واشتقاق خواص التوزيع الأساسية واجراء عملية التقدير للمعلمات ولدالة المعولية باستعمال طرائق التقدير وهي (طريقة الإمكان الأعظم وطريقة كريمر فون مايسز وطريقة المقدرات التجزئية) ومن خلال النتائج التي تم الحصول عليها من تجربة المحاكاة وباستعمال المعايير الإحصائية (MSE) و (IMSE) و بتطبيق أسلوب الرتب تمت المقارنة بين هذه الطرائق المستعملة في عملية التقدير، اذ تم التوصل الى ان افضل طريقة من هذه الطرائق هي طريقة (الإمكان الأعظم)، وبالاعتماد على المعايير الإحصائية ((AIC) و (AICc) و (BIC)). تم التوصل الى ان التوزيع المقترح (Alpha Power kappa) هو أفضل من توزيع (kappa) الأصلي في عملية تمثيل البيانات الحقيقية.

**الكلمات المفتاحية:** توزيع كابا، تحويل بور الفاء، توزيع بور الفا كابا المحول، المحاكاة، طريقة تقدير الامكان الاعظم، طريقة تقدير كرامر- فون مايسز

#### Abstract:

In this research, we conduct an experimental statistical analysis using simulation and real-life application on unusual life data characterized by fuzziness. Specifically, we study the downtime of towers belonging to Zain Iraq Telecommunications Company, which are sometimes not recorded when they are repaired. We successfully handle and analyze this fuzzy data by proposing a distribution called "Alpha Power kappa" distribution. Which was built using a transformation formula called (Alpha Power Transformed). and derive the fundamental properties of the distribution, We estimate the parameters and reliability function using estimation methods such as maximum likelihood, Kremer-von Mises method, and method of moments. By comparing, the results obtained from the simulation experiment, using statistical criteria such as mean squared error (MSE), and integrated mean squared error (IMSE). We compare the performance of these estimation methods. We find that the maximum likelihood method is the best among these methods for estimation. Furthermore, by relying on statistical criteria such as Akaike information criterion (AIC), corrected Akaike information criterion (AICc), and Bayesian information criterion (BIC). We conclude that

the proposed Alpha Power kappa distribution outperforms the original kappa distribution in representing real data.

**Keywords:** kappa distribution, Alpha Power Transformed , Alpha Power Transformed kappa, simulation Maximum likelihood estimation (MLE), Method of Cramer-Von Mises Minimu.

## 1- المقدمة (Introduction):

أظهرت دراسة المجموعات الضبابية اهتمام العديد من العلماء والباحثين في العالم الحقيقي التي تعاني من مشاكل عدم الدقة في قياساتها للظواهر ونحن نعلم ان التفكير البشري يشمل في الكثير من الأحيان على معلومات غامضة او ضبابية نشأت بطبيعتها في مفاهيم بشرية دقيقة نظراً لان انظمتنا غير قادرة على الإجابة عن العديد من الأسئلة ، ومن ثم تمكنت المجموعات الضبابية من تقديم حلول للعديد من مشاكل العالم الحقيقي الذي لا يمكننا الحصول على قياسات دقيقة للظواهر المختلفة وهناك امثلة كثيرة في حياتنا لا يمكننا التعامل معها بشكل قطعي حسب المنطق التقليدي فعلى سبيل المثال لا يمكننا التمييز بين ضغط الدم المرتفع او المنخفض. ولمراعاة عدم الدقة القياسات او الملاحظات الفردية قدم العالم زاده عام (1965) فكرة المجموعات الضبابية وكان مسؤولاً بمفرده عن التطور المبكر في هذا المجال.

وان اهم ما يشغل الباحث في حقول المعرفة كافة هو طبيعية البيانات ومن النادر جدا ان تكون البيانات مهيأة مباشرة لاستعمال الأساليب الإحصائية التي تعطي تقديرات مناسبة ودقيقة وفي حالة حصول خرق لأحدى الشروط المطلوبة للتقدير او عدم الدقة في البيانات فانه يجب البحث عن أساليب مختلفة لمعالجة تلك الحالات، لذ سوف ندرس البيانات الضبابية من اجل تقدير دالة المعولية لتوزيع (الفا بور كابا) وفقا للطرائق التقدير التي سوف تستعمل في الجانب النظري وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة كريمر فون مايسز وطريقة المقدرات التجزئية في حالة بيانات عبارة عن ارقام ضبابية أي بيانات ضبابية.

## 2- المنهجية:

### 2.1 هدف البحث ( Aim of the search ):

يهدف البحث الى :

- 1- اقتراح توزيع احتمالي جديد يمتاز بمرونة عالية في تمثيل البيانات والبيانات الضبابية.
- 2- تقدير دالة معولية ضبابية للتوزيع المقترح (alpha power kappa) .
- 3- تقدير معالم للتوزيع المقترح (alpha power kappa) .

### 2-2 مشكلة البحث (Problem of the search):

نظراً للتطور التكنولوجي الهائل الذي حدث في الأونة والاخيرة وانتشار شبكات الانترنت والتطور الملحوظ في الحاسب الآلي أدى الى حدوث تنوع كبير في البيانات صاحبها ظهور مشاكل لدى الباحثين في نمذجة ودراسة اغلب الظواهر وتمثيل بياناتها بتوزيعات إحصائية كلاسيكية، لذا دعت الحاجة بان يقوم الباحث للقيام بعملية بناء توزيع يؤمل ان يكون أفضل من التوزيعات المنفردة في تمثيل البيانات.

وتأخذ مشكلة البحث منحىً آخر وذلك بوجود بيانات تتصف بالغموض وعدم الوضوح أي انها بيانات ضبابية مما جعل الباحث من الانتقال الى استعمال التقديرات الضبابية للمعاملات ودالة المعولية بدل من التقديرات الاعتيادية كونها تعد أكثر شمولاً وتعميماً منها.

## 3- الجانب النظري:

### 3.1 توزيع كابا (Kappa Distribution):

يعد توزيع كابا من التوزيعات الاحتمالية المستمرة يدرس السلوك العشوائي للظواهر المهمة علميا وحياتيا. وقد مر بتطورات مهمة على يد (Hosking 1994) وآخرين. وقد قاموا الباحثين كل من (Hutson 1998) و (Ani shabri& Abdul aziz) و (Samir2011) (Dhwyia Hassan,Inam Abdulrahman,Layla Nassir) على تطوير طرائق التقدير لمعلماته حيث استنتج الباحثين الطريقة الأفضل لدراسة الظاهرة التي تناولوها أي طريقة تكون هي الأفضل في تقدير معالم التوزيع. بعض الباحثين قاموا بتطوير صيغة التوزيع من معلمتين الى ثلاث معالم وصولا الى أربع معالم الصيغة الأصعب في الشكل المختصة بدراسة الفضاء الخارجي. حيث ان كثيرا ما تم استخدام هذا التوزيع في ظواهر الفضاء الخارجي والغلاف الجوي مثلا سرعة الجزيئات وخصائصها وبلالزما الفضاء ودرجة الحرارة للبلالزما، والظواهر الحياتية والطبيعية للرياح العاصفة

والامطار والفيضانات، وفي هذه الدراسة يكون صيغة التوزيع ناتج عن خلط توزيعين هما توزيع كاما (Gamma distribution) والتوزيع اللوغاريتم الطبيعي (Log-normal distribution). (Fahad, 2018, Majli, 2019, Livadiotis, (2015).p:). (Ahmad Ajil, 2019 . 880-903) وكما يلي:

وان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كبا يمكن كتابتها بالشكل الاتية :-

$$f(x,\sigma,\theta,\beta)=\left\{\begin{array}{ll} \frac{\sigma\theta}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1}\left[\sigma+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}\right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)}, & \text{(if } x>0; \sigma,\theta,\beta>0 \text{ )} \\ 0, & \text{otherwise} \end{array}\right\} \dots (1)$$

اذ ان:  $(\sigma,\theta)$ : هما معلمتا الشكل لتوزيع كبا.  $(\beta)$ : معلمة القياس لتوزيع كبا.

وبذلك تكون دالة الكثافة التجميعية لتوزيع كبا بالشكل التالي:

$$F(x,\sigma,\theta,\beta)=\left\{\begin{array}{ll} \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}, & \text{(if } x>0; \sigma,\theta,\beta>0 \text{ )} \\ 0, & \text{otherwise} \end{array}\right\} \dots (2)$$

$$F(t) \Rightarrow S(x,\sigma,\theta,\beta) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}, \text{ (if } x>0; \sigma,\theta,\beta>0 \text{ )} \dots (3)$$

### 3.2 صيغة تحويل Alpha Power Transformed

اذا كان للتوزيع الأساس دالة توزيع cdf فإن المتغير العشوائي (x) يمكن الحصول على التوزيع المحول بواسطة (APT) حيث يمكن الحصول على دالة الكثافة التجميعي ودالة الكثافة الاحتمالية - (Hassan.al.et.2018,p:62) (APT k distribution) (Nasiru,2019,p: 129-141. - 67 من خلال الصيغ التالية :-)

$$F(x)_{APT} = \left\{\begin{array}{ll} \frac{\alpha^{F(x)} - 1}{\alpha - 1} & \text{if } \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \in \mathbb{R} \\ F(x) & \text{if } \alpha > 0, \alpha = 1, x \in \mathbb{R} \end{array}\right. \dots (4)$$

حيث ان:  $\alpha$ : تمثل معلمة التحويل.

$$f(x)_{APT} = \left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) f(y) \alpha^{F(y)} & \text{if } \alpha > 0, \alpha \neq 0, y \in \mathbb{R} \\ f(y) & \text{if } \alpha > 0, \alpha = 0, y \in \mathbb{R} \end{array}\right. \dots (5)$$

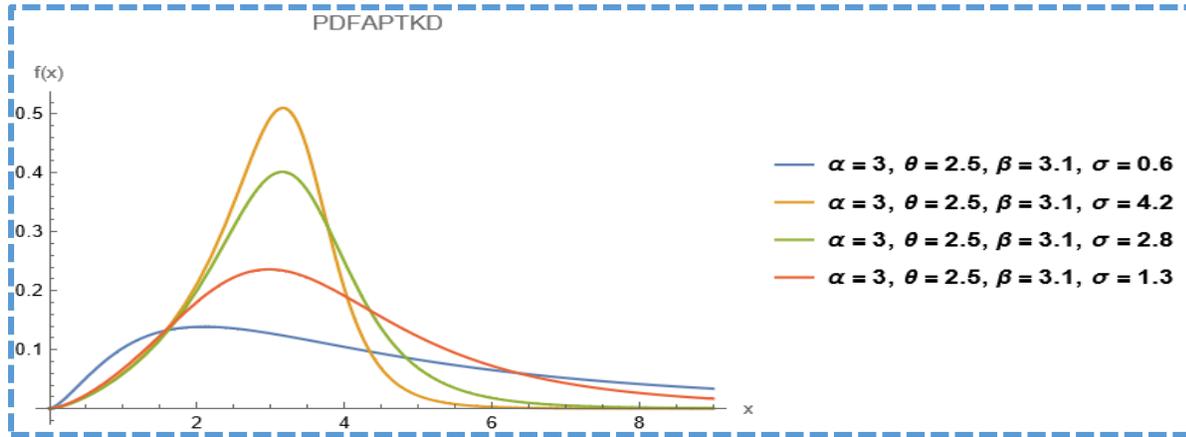
### 3.3 دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع : (Alpha Power Transformed kappa)

يتم الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع APTk وحسب الصيغة التالية :

$$f(x,\sigma,\theta,\beta,\alpha)_{APTKP} = \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \frac{\sigma\theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left[\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}\right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha^{\left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)}} \dots (6)$$

أذان:  $B, \alpha$ : معلمتان الشكل (Shape parameters)،  $\sigma, \theta$ : معلمات القياس (Scale parameter).

والمخطط التوضيحي في الشكل (1) يبين بالرسم سلوك دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع APTk :-

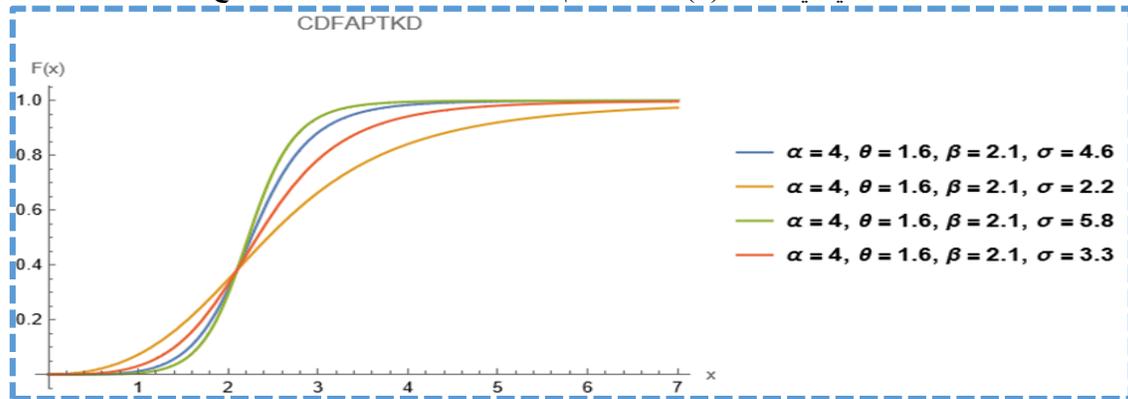


الشكل (1) سلوك دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع Alpha Power Transformed kappa

**3.4 الدالة التراكمية التجميعية لتوزيع Alpha Power Transformed kappa:** يتم الحصول على دالة الكثافة التجميعية لتوزيع APTk وذلك بحسب الصيغة التالية:

$$F(x, \sigma, \theta\beta, \alpha)_{APTK} = \frac{\alpha \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma}} - 1}{\alpha - 1} \quad \text{if } \alpha > 0, \alpha \neq 1, x \in \mathbb{R} \quad \dots (7)$$

والمخطط التوضيحي في الشكل (2) يبين بالرسم سلوك دالة الكثافة التجميعية لتوزيع APTk



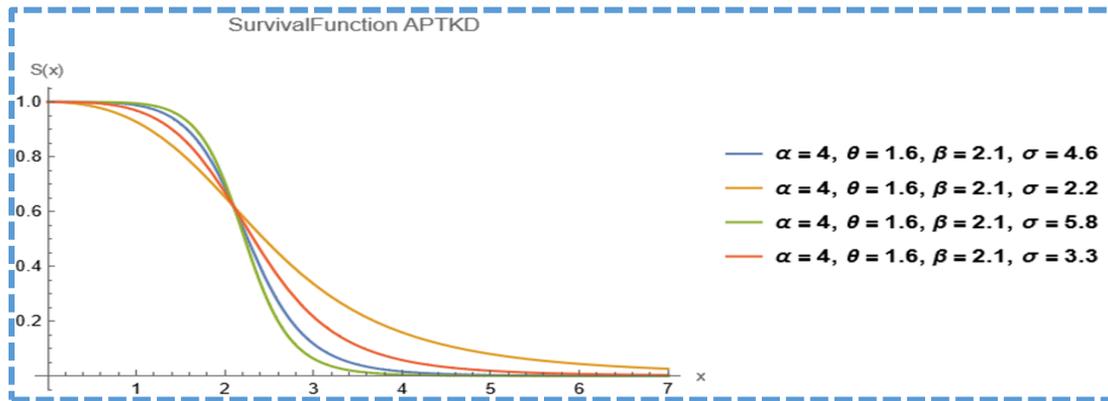
الشكل (2) سلوك دالة الكثافة التجميعية لتوزيع Alpha Power Transformed kappa

**3.5 دالة المعولية لتوزيع Alpha Power Transformed kappa:**

أن دالة البقاء لتوزيع (APTK) يمكن صياغتها بالشكل الآتي:

$$R(x, \sigma, \theta\beta, \alpha)_{APTK} = 1 - F(x, \sigma, \theta\beta, \alpha)_{APTK} = 1 - \frac{\alpha \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma}} - 1}{\alpha - 1} \quad \dots (8)$$

والمخطط التوضيحي في الشكل (3) يبين بالرسم سلوك دالة البقاء لتوزيع APTk:

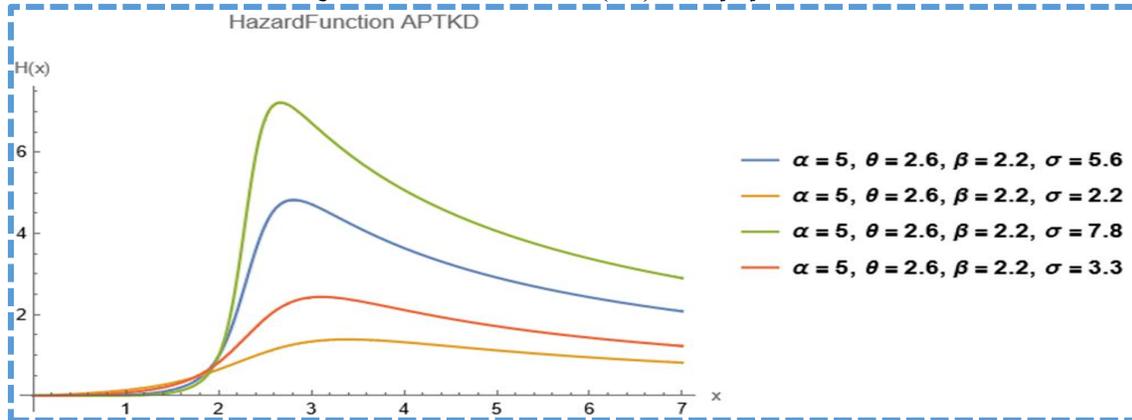


الشكل يوضح الشكل (3) سلوك دالة البقاء لتوزيع Alpha Power Transformed kappa

3.6 دالة المخاطرة لتوزيع: Alpha Power Transformed kappa:

$$h(x, \sigma, \theta, \beta, \alpha)_{APTK} = \frac{\left[ \frac{\sigma \theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left[ \sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta} \right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}} \right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \right]}{\left[ 1 - \frac{\alpha \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}} \right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} - 1}{\alpha - 1} \right]} \quad \dots (9)$$

والمخطط التوضيحي في الشكل (8-2) يبين سلوك دالة المخاطرة لتوزيع APTk



الشكل (6) سلوك دالة المخاطرة h(t) لتوزيع Alpha Power Transformed kappa

4. الخصائص الاحصائية: Alpha Power Transformed kappa:

4.1 اشتقاق العزم الرائي غير المركزي للتوزيع:

$$E(x^r) = \int_0^{\infty} x^r f(x, \sigma, \theta, \beta, \alpha)_{APTKP} \cdot dx \quad \dots (10)$$

$$E(x^r) = \int_0^{\infty} x^r \left( \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} \right) \frac{\sigma \theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left[ \sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta} \right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[ \frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta \sigma}} \right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \cdot dx$$

Let  $u = \frac{x}{\beta}$ ,  $x = u\beta$ ,  $dx = \beta du$

$$E(x^r) = \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \sigma \theta \beta^r \int_0^\infty u^r (u)^{\theta-1} [\sigma + (u)^{\theta\sigma}]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[\frac{(u)^{\theta\sigma}}{\sigma + (u)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} . du$$

Let  $z = (u)^{\theta\sigma} u = \frac{1}{z^{\frac{1}{\theta\sigma}}}$        $du = \frac{1}{\theta\sigma} z^{\frac{1}{\theta\sigma}-1} dz$

عليه فان

$$E(x^r) = \mu'_r = \sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+r}{\sigma}} + 1 \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \beta^r \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^\infty \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{\theta - \theta\sigma + r + i + \sigma}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \theta + \theta\sigma - r}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{i + \sigma + 1}{\sigma}\right)} \right] \dots (11)$$

$r=1,2,3,\dots$

**4.2 اشتقاق العزم حول الوسط الحسابي للتوزيع:**

$$E(x - \mu)^r = \int_0^\infty (x - \mu)^r f(x, \sigma, \theta\beta, \alpha)_{\text{APTKP}} . dx \dots (12)$$

$$= \int_0^\infty (x - \mu)^r \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \frac{\sigma\theta}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left[\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}\right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} . dx$$

$$(a + b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^x b^{n-x} \dots (13)$$

$$= \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \frac{\sigma\theta}{\beta} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j} \int_0^\infty x^j \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta-1} \left[\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}\right]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[\frac{\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}{\sigma + \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} . dx$$

Let  $u = \frac{x}{\beta}$ ,  $x = u\beta$ ,  $dx = \beta du$

$$= \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \sigma \theta \beta^j \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j} \int_0^\infty u^j (u)^{\theta-1} [\sigma + (u)^{\theta\sigma}]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left[\frac{(u)^{\theta\sigma}}{\sigma + (u)^{\theta\sigma}}\right]^{\left(\frac{1}{\sigma}\right)} . du$$

Let  $z = (u)^{\theta\sigma} u = \frac{1}{z^{\frac{1}{\theta\sigma}}}$ ,       $du = \frac{1}{\theta\sigma} z^{\frac{1}{\theta\sigma}-1} dz$

$$= \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \sigma \theta \beta^j \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{j}{\theta\sigma} - \frac{\theta-1}{\theta\sigma}}}{z^{\frac{j}{\theta\sigma} - \frac{\theta-1}{\theta\sigma}}} [\sigma + z]^{-\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \alpha \left(\frac{z}{\sigma+z}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{\theta\sigma} z^{\frac{1}{\theta\sigma}-1} dz$$

$$E(x - \mu)^r = \sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha - 1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^\infty \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-\mu)^{r-j} \frac{\Gamma\left(\frac{\theta - \theta\sigma + j + i + \sigma}{\sigma}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \theta + \theta\sigma - j}{\sigma}\right)}{\Gamma\left(\frac{1 + i + \sigma}{\sigma}\right)}, r, 1 \dots 2 \dots n \dots (14)$$

**4.3 معامل الاختلاف المركزي: (Coefficients of Variation)**

هو مقياس لمدى تشتت البيانات، يستعمل للمقارنة بين التوزيعات لبيان ايها يحتوي على تباين اكثر تجانس ويمثل نسبة الانحراف المعياري الى الوسط الحسابي، (Chauveau, 1995, p:221) وفق الصيغة الاتية:

$$C. V = \frac{\sigma}{\mu_1} \times 100\%$$

$$C.V = \frac{\sqrt{\sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-\mu)^{2-j} \frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+j+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{1-\theta+\theta\sigma-j}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{1+i+\sigma}{\sigma}\right]}}{\sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+1}{\sigma}} + 1 \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^1 \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \left[\frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+1+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{-\theta+\theta\sigma}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{i+\sigma+1}{\sigma}\right]}\right]} \dots (15)$$

**4.4 معامل الالتواء :Coefficient of Skewness**

هو درجة عدم التماثل والانحراف عن التماثل، فإذا كان منحني توزيع الشكل العام للبيانات له طرف على يمين مركز التوزيع أطول من الطرف الايسر، فان التوزيع يسمى ملتوي لليمين وأن له التواءً موجباً، وإذا حدث العكس يقال إن التوزيع ملتوي لليساار وأنه سالب الالتواء.(Tadjiri,2019. Chauveau ,1995,201.) ويكون وفق الصيغة الآتية.

$$S.K = \frac{\mu_3}{(\mu_2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$S.K = \frac{\sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^3 \binom{3}{j} (-\mu)^{3-j} \frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+j+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{1-\theta+\theta\sigma-j}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{1+i+\sigma}{\sigma}\right]}}{\left(\sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-\mu)^{2-j} \frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+j+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{1-\theta+\theta\sigma-j}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{1+i+\sigma}{\sigma}\right]}\right)^{\frac{3}{2}}} \dots (16)$$

**4.5 معامل التفرطح (Coefficient of Kurtosis)**

التفرطح ويسمى أيضا معامل التسطیح أو درجة التقوس، وهو مؤشر لقياس درجة تحذب أو تقوس دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي حقيقي، وهو إلى جانب التجانس، من أهم معالم أشكال توزيع المتغيرات العشوائية، ويمكن من وصف شكل توزيع الاحتمالات في جوار القيمة المتوقعة

$$C.K = \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^4$$

$$C.K = \frac{\sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-\mu)^{4-j} \frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+j+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{1-\theta+\theta\sigma-j}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{1+i+\sigma}{\sigma}\right]}}{\left(\sigma \sigma^{\frac{\theta-\theta\sigma+j}{\sigma}} \left(\frac{\log \alpha}{\alpha-1}\right) \beta^j \sigma^{\left(\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\log \alpha)^i}{i!} \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} (-\mu)^{2-j} \frac{\left[\Gamma \frac{\theta-\theta\sigma+j+i+\sigma}{\sigma}\right] \left[\Gamma \frac{1-\theta+\theta\sigma-j}{\sigma}\right]}{\left[\Gamma \frac{1+i+\sigma}{\sigma}\right]}\right)^2} \dots (17)$$

**5.1 طرق التقدير (Estimation Method)**

**5.1 طريقة الإمكان الأعظم (MLE Method)**

تعد طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimation) من الطرائق الأكثر شيوعا في عملية التقدير لأنها تشمل على عدة خصائص جيدة. منها الكفاءة والاتساق وكذلك تملك اقل تباين ممكن والثبات (Invariant) وتكون أكثر دقة من طرائق التقدير الأخرى خصوصا عندما تزداد حجم العينة، (Myung, 2003.p:90-100, Khan,al.et,2021.p:35,

1415-1431)

ويمكن تعريف دالة الامكان رياضيا.

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \dots f(x_n, \theta) \dots (18)$$

$$L = \prod_{i=1}^n \left[ \left( \frac{\log \alpha}{\alpha - 1} \right) \frac{\sigma \theta}{\beta} \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta - 1} \left[ \sigma \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} \right]^{-\left( \frac{\sigma + 1}{\sigma} \right)} \alpha \left[ \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\sigma + \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}} \right]^{\left( \frac{1}{\sigma} \right)} \right] \quad \dots (19)$$

وبأخذ ln للطرفين نحصل على المعادلة الآتية

$$\ln(L) = \left( \begin{aligned} & n \ln(\log \alpha) - n \ln(\alpha - 1) + n \ln(\sigma) + n \ln(\theta) - n \ln(\beta) \\ & + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln \left( \frac{x_i}{\beta} \right) - \left( \frac{\sigma + 1}{\sigma} \right) \sum_{i=1}^n \ln \left[ \sigma + \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} \right] + \ln(\alpha) \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\sigma + \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}} \right]^{\left( \frac{1}{\sigma} \right)} \end{aligned} \right) \dots (20)$$

وبأخذ المشتقة بالنسبة الى المعلمات,  $(\beta, \theta, \sigma, \alpha)$  ومساواتها بالصفر نحصل على المعادلة الآتية :

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\alpha \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} + \frac{n}{\alpha \text{Log}[\alpha]} - \frac{n}{\alpha - 1} \quad \dots (21)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \theta} = \left( \begin{aligned} & \frac{n}{\theta} + n \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} \right] + n \sigma \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} + \sigma \right] \\ & \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} \left( -1 + \frac{1}{\sigma} \text{Log}[\alpha] \left( - \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{2\theta \sigma} \sigma \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} \right]}{\left( \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma \right)^2} + \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} \sigma \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} \right]}{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} \right) \right) \end{aligned} \right) \dots (22)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma} = \left( \begin{aligned} & -\frac{1}{\sigma} + \frac{n}{\sigma} + \frac{1 + \sigma}{\sigma^2} + n \theta \left( \frac{\beta \sigma}{x_i + \beta \sigma} + \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} + \sigma \right] \right) \\ & \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{-\theta \sigma} \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} \left( 1 + \frac{1}{\sigma} \text{Log}[\alpha] \left( -\sigma + \theta \sigma^2 \text{Log} \left[ \frac{x_i}{\beta} \right] - \left( \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma \right) \text{Log} \left[ \frac{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} \right] \right) \right) \end{aligned} \right) \dots (23)$$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} = \left( \begin{aligned} & -\frac{n}{\beta} - \frac{n(-1 + \theta)}{\beta} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \theta \sigma}{\beta^2 \left( \frac{x_i}{\beta} + \sigma \right)} \\ & \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma}}{\left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma} \left( \frac{x_i \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{-1 + 2\theta \sigma} \theta \sigma}{\beta^2 \left( \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma \right)^2} - \frac{x_i \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{-1 + \theta \sigma} \theta \sigma}{\beta^2 \left( \left( \frac{x_i}{\beta} \right)^{\theta \sigma} + \sigma \right)} \right) \text{Log}[\alpha] \end{aligned} \right) \dots (24)$$

حيث نلاحظ ان المعادلات (21) و(22) و(23) و(24) هي معادلات غير خطية لذلك يصعب ايجادها لذلك سوف نستخدم احدى الطرق العددية لحلها مثل طريقة نيوتن رافسن لتقدير معلمات التوزيع المحول يمكننا الحصول على القيم التقديرية  $(\hat{\sigma}, \hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$  للمعلمات المجهولة  $\sigma, \theta, \beta, \alpha$  ، ثم بعد ذلك يتم تعويض المقدرات  $(\hat{\sigma}, \hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$  في دالة المعولية (8) نحصل على مقدر المعولية الضبابية لطريقة الامكان الاعظم :

**5.2 طريقة كرامر فون مايسز (Method of Cramer-Von Mises Minimu) :**

تعتمد طريقة كرامر فون مايسز على تقدير المسافة الدنيا، إذ يمكننا الحصول على تقديرات المسافة الدنيا لكرامر فون-مايسز إذ يتم الاشتقاق الجزئي  $(\sigma, \beta, \theta, \alpha)$  بالنسبة للمعلمات المجهولة  $C(\sigma, \beta, \theta, \alpha)$  بتصغير الدالة (Cramer Von-Mises) (Evans, al. et. 2017, p ;165-190

(. وكما يأتي:

$$C(\sigma, \beta, \theta, \alpha) = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[ F(x_i, \sigma, \beta, \theta, \alpha) - \frac{2i - 1}{2n} \right]^2 \quad \dots (25)$$

ولتصغير المسافة الدنيا لـ (Cramer Von-Mises) يتم اشتقاق جزئي للصيغة آنفاً ومساواتها للصفر وحسب ما يأتي:

- الاشتقاق بالنسبة إلى  $\alpha$  للحصول على المقدر  $\hat{\alpha}_{cvm}$  وكالاتي:

$$\frac{\partial C(\sigma, \beta, \theta, \alpha)}{\partial \alpha} = 2 \sum_{i=1}^n \left( \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma} \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma + \sigma}}}{\left(-\frac{i}{n} + \frac{-1 + \alpha}{-1 + \alpha}\right) \left(1 - \alpha \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma} \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma + \sigma}}\right) + (-1 + \alpha) \alpha^{-1 + \left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma + \sigma}} \frac{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma} \frac{1}{\left(\frac{x_i}{\beta}\right)^{\theta\sigma + \sigma}}}\right) = 0 \dots (26)$$

وهكذا بالنسبة لباقي المعلمات

حيث نلاحظ ان المعادلات هي معادلات غير خطية لذلك يصعب ايجادها لذلك سوف نستخدم احدي الطرق العددية لحلها مثل طريقة نيوتن رافسن لتقدير معلمات التوزيع المحول يمكننا الحصول على القيم التقديرية  $(\hat{\sigma}, \hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$  للمعلمات المجهولة  $\sigma, \theta, \beta, \alpha$  ، ثم بعد ذلك يتم تعويض المقدرات  $(\hat{\sigma}, \hat{\theta}, \hat{\beta}, \hat{\alpha})$  في دالة المعولية (8) نحصل على مقدر المعولية الضبابية لطريقة كرامر فون مايسز :

**6. الجانب التجريبي (Experimental side):**

**6.1 مفهوم المحاكاة (The Simulation Concept):**

تعرف المحاكاة بانها أسلوب رياضي تجريبي من الواقع الخيالي يستعمل لحل المشاكل المعقدة في الواقع الحقيقي، وتمتاز بالمرونة العالية نتيجة القدرة على إعادة التجربة والاختبار لمرات عديدة للوصول للنتائج الدقيقة لاختزال الوقت وتقليل التكلفة (Ahmad,al.et.2019, 87-110)

**6.2 مراحل تجربة المحاكاة (Stages of a simulation experience):**

**المرحلة الأولى:**

تعد من المراحل المهمة وهي مرحلة تمهيدية للمراحل اللاحقة وتتلخص في الخطوات الاتية:

1- مرحلة اختيار القيم الافتراضية لمعالم الانموذج المقترح (A P k) وحسب ما موضح في الجدول (1-3) أدناه:

جدول (1)

القيم الافتراضية الأولية للمعلمات والنماذج المقترحة

MODEL	$\alpha$	$\sigma$	$\theta$	$\beta$
Model 1	1.2	1.8	2.9	1.2
Model 2	1.2	2	1.5	2.9

2- اختيار حجوم العينة الافتراضية حيث تم اختيار اربعة احجام صغيرة ومتوسطة وكبيرة وهي (25,50,100,150) من اجل تحديد مدى تأثير حجم العينة على نتائج التقدير.

**المرحلة الثانية:**

يتم في هذه المرحلة توليد بيانات عشوائية ثلاثم الأنموذج المقترح (APK) بطريقة التحويل المعكوس وكما يلي:

1- في البداية يتم توليد ارقام عشوائية  $q_i$  تتبع في توزيعها التوزيع المنتظم ضمن الفترة  $\{0,1\}$

$q_i \sim UniformDistribution(0,1)$  ،  $i = 1, 2, \dots, n$

وان  $q_i$  يمثل متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم

2- ثم نقوم بتحويل البيانات المولدة في الخطوة الأولى الى بيانات تتبع التوزيع المقترح (Alpha Power kappa) بواسطة طريقة التحويل المعكوس وكما يلي:

$$x = \beta \left( - \frac{\sigma \left( \frac{\text{Log}[-u + \frac{1}{1-\alpha}](1-\alpha)]}{\text{Log}[\alpha]} \right)^\sigma}{-1 + \left( \frac{\text{Log}[-u + \frac{1}{1-\alpha}](1-\alpha)]}{\text{Log}[\alpha]} \right)^\sigma} \right)^{\frac{1}{\theta\sigma}}$$

**المرحلة الثالثة:**

يتم في هذه المرحلة من المحاكاة تقدير معالم ودالة المعولية الضبابية لتوزيع (Alpha Power kappa) المقترح في هذه المرحلة ولكافة الطرائق التي تم شرحها بشكل مفصل في الجانب النظري .

**6.3 نتائج المحاكاة (Simulation results):**

بعد اجراء عملية المحاكاة بالاستعانة ببرنامج في الحاسب الآلي، تم الحصول على نتائج لمقدرات المعالم ودالة المعولية الضبابية للأنموذج المقترح (APk) بطرائق التقدير المستعملة في عملية التقدير، اذ تم تبويب هذه النتائج للتقديرات بالجدول التالية:

جدول رقم (2)

N	Est. par.	MLE	Cvm
25	$\alpha$	2.9904529	1.60811653
	MSE	0.0031824	0.46396116
	Rank	1	3
	$\sigma$	1.8599455	2.06614097
	MSE	0.033303	0.1478561
	Rank	1	3
	$\theta$	2.9946507	2.73377239
	MSE	0.0326382	0.05731987
	Rank	1	2
	$\beta$	0.2578375	1.01071417
	MSE	0.7851354	0.15773819
	Rank	3	2
	$\sum$ Rank	6	10
50	$\alpha$	3.0098428	2.41579281
	MSE	0.0032809	0.19473573
	Rank	1	3
	$\sigma$	1.8146239	1.76516581
	MSE	0.0081244	0.01935233
	Rank	1	2
	$\theta$	3.9979219	2.51075285
	MSE	0.3785937	0.13422316
	Rank	3	2
	$\beta$	0.0848749	1.04180534
	MSE	0.9292709	0.13182888
	Rank	3	2
	$\sum$ Rank	8	9
100	$\alpha$	2.9997375	1.22830948
	MSE	8.75E-05	0.59056351

	Rank	3	1
	$\sigma$	1.8022253	2.32103175
	MSE	0.0012363	0.28946208
	Rank	1	2
	$\theta$	2.9030961	2.35604502
	MSE	0.0010676	0.18757068
	Rank	1	2
	$\beta$	1.2014422	1.16186649
	MSE	0.0012018	0.03177792
	Rank	1	2
	$\sum$ Rank	6	7
<b>150</b>	$\alpha$	2.9969046	1.04317727
	MSE	0.0010318	0.65227424
	Rank	1	3
	$\sigma$	1.8248434	2.69493745
	MSE	0.0138019	0.49718747
	Rank	1	3
	$\theta$	2.9356233	2.30157138
	MSE	0.0122839	0.2063547
	Rank	1	3
	$\beta$	1.2163689	1.26919583
	MSE	0.0136407	0.05766319
	Rank	1	2
	$\sum$ Rank	4	11
	$\sum \sum$ Rank	24	37

نلاحظ من الجدول رقم (2) أعلاه ان طريقة التقدير (mle) حصلت على اقل مجموع للرتب (24) اي انها حصل على اقل مجموع مربعات خطأ (mse) وبالتالي تعد أفضل طريقة تقدير لمعاملات التوزيع بالنسبة للأنموذج الأول وتأتي بعدها طريقة (Cvm)

جدول رقم (3)

n	$t_i$	R-real	R-MLE	MSE	R-cvm	MSE
25	0.72781	0.9514	0.92661	0.00061	0.95214	<b>5.6E-07</b>
	1.22686	0.84118	0.83093	0.00011	0.86219	<b>0.00044</b>
	1.26464	0.83076	0.82274	6.4E-05	0.85367	<b>0.00053</b>
	1.36513	0.80209	0.80047	2.6E-06	0.83	<b>0.00078</b>
	1.46445	0.77266	0.7778	2.6E-05	0.80528	<b>0.00106</b>
	1.56564	0.7419	0.75413	0.00015	0.77889	<b>0.00137</b>
	1.56678	0.74155	0.75386	0.00015	0.77859	<b>0.00137</b>
	1.5993	0.73156	0.74615	0.00021	0.76988	<b>0.00147</b>
	1.88263	0.64417	0.67717	0.00109	0.69049	<b>0.00214</b>
	2.30996	0.52009	0.57018	0.00251	0.56636	<b>0.00214</b>
	$\sum$ MSE			0.00049		<b>0.00113</b>
	Rank			1		<b>2</b>

n		R-real	R-MLE	MSE	R-cvm	MSE	
50		0.88157	0.92376	0.87776	0.00212	0.89818	<b>0.00065</b>
		0.88257	0.92356	0.87753	0.00212	0.89797	<b>0.00066</b>
		0.88496	0.92308	0.87698	0.00213	0.89747	<b>0.00066</b>
		0.9981	0.89878	0.84996	0.00238	0.87254	<b>0.00069</b>
		1.09049	0.87676	0.82671	0.00251	0.85047	<b>0.00069</b>
		1.12554	0.86795	0.81764	0.00253	0.84171	<b>0.00069</b>
		1.13605	0.86525	0.8149	0.00254	0.83904	<b>0.00069</b>
		1.20783	0.84634	0.79293	0.00255	0.82033	<b>0.00068</b>
		1.21875	0.84338	0.76734	0.00255	0.81741	<b>0.00067</b>
		1.31244	0.81729	0.76674	0.00249	0.7916	<b>0.00066</b>
$\sum$ Rank				<b>0.00239</b>		0.00067	
				<b>3</b>		1.5	
n		R-real	R-MLE	MSE	R-cvm	MSE	
100		0.75291	0.94732	0.94563	2.8E-06	0.94421	<b>9.7E-06</b>
		0.79339	0.94038	0.93882	2.4E-06	0.93865	<b>3E-06</b>
		0.7982	0.93953	0.93798	2.4E-06	0.93798	<b>2.4E-06</b>
		0.85722	0.92856	0.92723	1.7E-06	0.92941	<b>7.3E-07</b>
		0.91694	0.91653	0.91547	1.1E-06	0.92023	<b>1.4E-05</b>
		0.97825	0.90327	0.90251	5.8E-07	0.91028	<b>4.9E-05</b>
		1.01979	0.89378	0.89323	3E-07	0.90324	<b>8.9E-05</b>
		1.02643	0.89223	0.89172	2.7E-07	0.90209	<b>9.7E-05</b>
		1.07987	0.87939	0.87914	6.2E-08	0.89263	<b>0.00018</b>
		1.1096	0.87199	0.87188	1.1E-08	0.88719	<b>0.00023</b>
$\sum$ MSE				<b>1.2E-06</b>		6.7E-05	
				<b>1</b>		3	
n		R-real	R-MLE	MSE	R-PER	MSE	
150		0.58907	0.97078	0.97187	1.2E-06	0.97875	<b>6.4E-05</b>
		0.5999	0.96946	0.97065	1.4E-06	0.97771	<b>6.8E-05</b>
		0.65482	0.96226	0.96398	2.9E-06	0.97191	<b>9.3E-05</b>
		0.69156	0.95698	0.95909	4.5E-06	0.96758	<b>0.00011</b>
		0.73439	0.95034	0.95298	6.9E-06	0.96206	<b>0.00014</b>
		0.7943	0.94022	0.94366	1.2E-05	0.95349	<b>0.00018</b>
		0.90564	0.91887	0.92404	2.7E-05	0.93488	<b>0.00026</b>
		0.92669	0.91448	0.91999	3E-05	0.93097	<b>0.00027</b>
		0.97702	0.90355	0.90992	4.1E-05	0.92113	<b>0.00031</b>
		0.98708	0.90129	0.90784	4.3E-05	0.91908	<b>0.00032</b>
$\sum$ MSE				1.7E-05		<b>0.00018</b>	
$\sum$ Rank				1		<b>3</b>	
$\sum$ Rank				6		<b>9.5</b>	

نلاحظ من الجدول رقم (3) أعلاه ان طريقة التقدير (mle) حصلت على اقل مجموع للرتب (6) اي انها حصل على اقل مجموع مربعات خطأ (mse) وبالتالي تعد أفضل طريقة تقدير لدالة معولية التوزيع المقترح بالنسبة للأنموذج الأول وتأتي بعدها طريقة (Cvm) في الأفضلية .

**7. الجانب التطبيقي (The application aspect):**

**7.1 عينة البحث للبيانات غير المضطربة:**

تم جمع بيانات تمثل أزمان الاشتغال لحين التوقف او العطب لعينة عشوائية مكونة من (100) برج من ابراج شركة اتصالات زين العراق في محافظة كربلاء المقدسة، لعام (2021) من شهر كانون الثاني لغاية شهر آب وكما هو مسجل في الجدول التالي:

جدول رقم(4)

1	2	2.7	3.3	4	4.5	5.4	5.9	6.7	7.5
1	2.3	2.7	3.3	4	4.7	5.4	6	6.7	7.5
1	2.3	2.8	3.5	4	4.7	5.4	6	6.7	7.5
1.5	2.5	2.8	3.5	4	4.7	5.4	6	6.9	7.5
1.5	2.5	2.8	3.5	4.1	5	5.5	6.4	6.9	7.7
1.8	2.5	3	3.6	4.1	5	5.5	6.4	6.9	7.7
1.8	2.5	3	3.6	4.4	5	5.7	6.4	6.9	7.7
1.8	2.6	3	3.6	4.4	5.2	5.7	6.4	7	7.8
2	2.6	3	3.7	4.5	5.2	5.7	6.5	7	8
2	2.7	3.3	3.7	4.5	5.2	5.9	6.5	7	8

n= 100

وعند تطبيق البيانات الحقيقية في التوزيع المقترح (APk) حصلنا على قيم مقدره للمعلمات وكما في الجدول (4) التالي:

جدول رقم (5) يوضح القيم المقدره لمعلمات التوزيع المقترح عند تطبيق البيانات الحقيقية

Distribution	$\sigma$	$\theta$	$\beta$	$\alpha$
APTK	3.3932 (0.3932)	2.2444 (0.0444)	6.1931 (0.1931)	0.2752 (0.0252)
Kappa	0.0011 (1.0903e-04)	18.1722 (0.0016)	0.000391 (10.172)	-----

**7.2 معايير اختبار حسن المطابقة (Goodness of fit):**

في هذا البحث تم استعمال اختبار (Kolmogorov-Smirnov)، واختبار (Chi Square) لمعرفة فيما إذا كانت البيانات الحقيقية التي جمعتها الباحثة تتبع في توزعها التوزيع المقترح وكما في الجدول رقم (6) التالي:

جدول رقم (6) يبين نتائج اختبارات حسن المطابقة

Distribution	Kolmogorov-Smirnov		Chi Square test	
	Statistic	P-Value	Statistic	P-Value
APTK	0.0683	0.7132	8.5997	<b>0.29324</b>
Kappa	0.1846	0.0019	—	

يتبين لنا من الجدول (6) أعلاه ان قيمة P-Value لاختبار (Kolmogorov-Smirnov) لتوزيع (APTK) قد بلغت (0.7132) وهي اكبر من قيمة P-Value للاختبار نفسه بالنسبة لتوزيع (kappa) والتي بلغت (0.0019) وان قيمة P-Value بالنسبة لاختبار Chi Square test لتوزيع (APTK) قد بلغت (0.29324) وفي كلا الاختبارين هي اكبر من (0.05) مستوى المعنوية، عليه يكون القرار الاحصائي هو عدم رفض فرضية العدم Ho أي ان البيانات الحقيقية تتبع في توزيعها توزيعنا المقترح (APTK) .

**7.3 معايير اختيار أفضل توزيع:**

تم اعتماد المعايير الإحصائية (AIC) و(AICc) و(BIC) لمعرفة فيما إذا كان التوزيع الذي تم اقتراحه (APTK) أفضل في تمثيل البيانات الحقيقية من توزيع كبا الأصلي (kappa).  
 أن الصيغة العامة لأحصاء معيار أكاكي (AIC) كما يلي:

$$AIC = -2L(\theta \setminus X) + 2P \dots(25)$$

أن الصيغة العامة لأحصاء معيار (BIC) تكون كما يلي:  
 ... (26)

$$BIC = -2L(\theta \setminus x) + P \text{ Log}(n)$$

وقد تم الحصول على النتائج وادراجها في الجدول (7) التالي:

جدول رقم (7) يبين قيم اختبارات اختيار أفضل توزيع

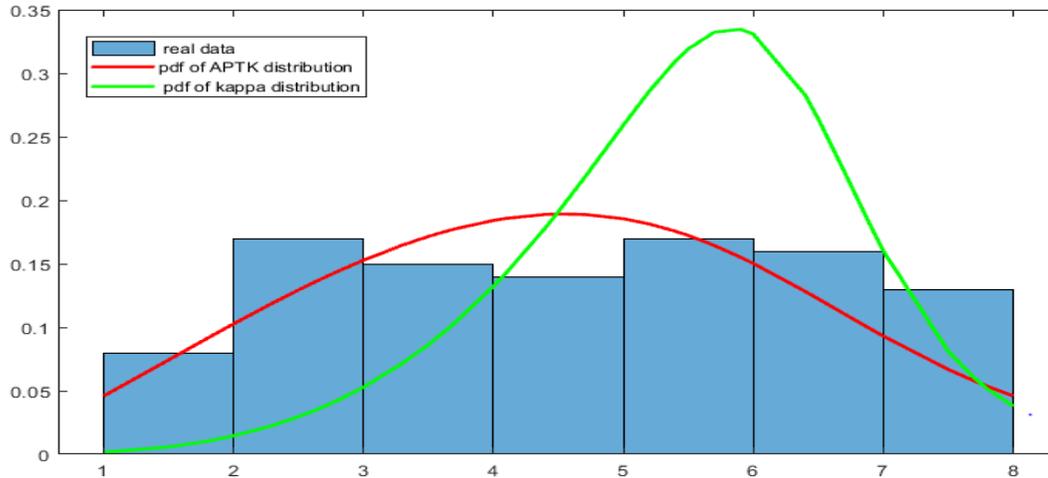
Distribution	LL	AIC	AICc	BIC	MSE
APTK	-207.8140	423.6280	424.0403	434.0487	1.3182e-04
kappa	-427.5973	861.1946	861.4395	869.0101	2.463e-02

تلحظ من الجدول (7) أعلاه بان التوزيع المقترح (APTK) قد حصل علي اقل قيمة بالنسبة للمعايير الإحصائية الثلاثة (AIC) و(AICc) و(BIC) من توزيع (kappa) عليه يكون توزيع (APTK) أفضل في تمثيل البيانات الحقيقية المستعملة في الجانب التطبيقي من البحث.

والجدول رقم (8) التالي يوضح بعض المؤشرات الإحصائية الخاصة بالتوزيع المقترح عند تطبيق البيانات الحقيقية  
 جدول رقم (8) يوضح بعض المؤشرات الإحصائية الخاصة بالتوزيع المقترح للبيانات الحقيقية

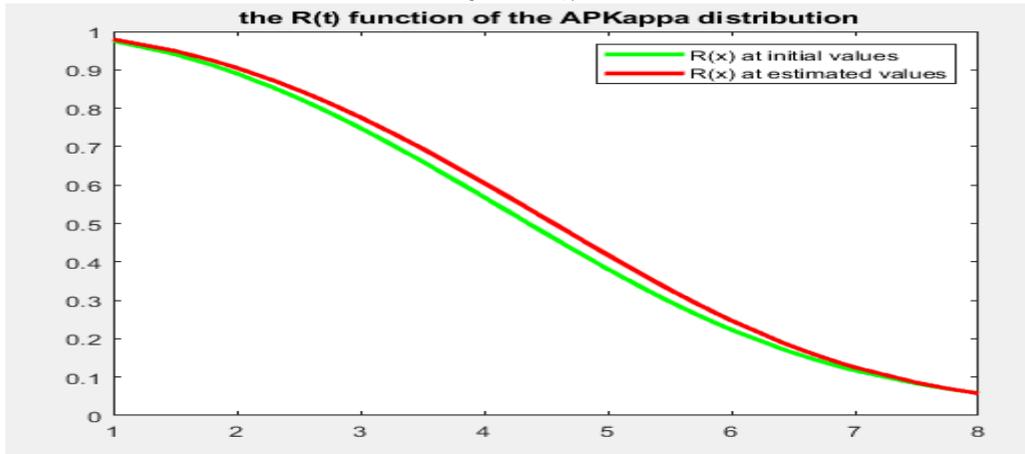
Coefficients	Value	Coefficients	Value
Mean	4.5920	Median	4.5000
Variance	3.7436	StandardDeviation	1.9348
Skewness	0.024181	Max	8
Kurtosis	1.11276-	Min	1

والشكل رقم (7) التالي يمثل مدى ملائمة التوزيع المقترح (APTK) للبيانات الحقيقية مقارنة بتوزيع (kappa) الأصلي وكما يلي:



الشكل رقم (7) يمثل مدى ملائمة التوزيع المقترح (APTK) للبيانات الحقيقية مقارنة بتوزيع (kappa) الأصلي وحسب الرسم البياني لدالة (pdf)

والشكل رقم (8) التالي يبين الرسم البياني لدالة المعولية لتوزيع (APTK) بالنسبة للبيانات الحقيقية مقارنة بدالة المعولية للتوزيع نفسة بالنسبة للبيانات المقدرة



شكل (8) يوضح الفرق بين دالة المعولية الضبابية لتوزيع (APTK) ودالة المعولية الضبابية للتوزيع الخام ( Empirical Distribution).  
 وتطبيق المعلمات المقدرة لكل زمن من البيانات الحقيقية التي جمعتها الباحثة حصلنا على مقدرات الدالة المعولية الضبابية ودالة التوزيع التجميعية للتوزيع المقترح (APTK) وكما موضح في الجدول (9) التالي:

جدول رقم (9) يوضح مقدرات دالة المعولية الضبابية ودالة التوزيع التجميعية للتوزيع المقترح بتطبيق البيانات الحقيقية

i	t	F(t)	R(t)
1	1	0.0225	0.9775
2	1	0.0225	0.9775
3	1	0.0225	0.9775
4	1.5	0.0538	0.9462
5	1.5	0.0538	0.9462
6	1.8	0.0792	0.9208
7	1.8	0.0792	0.9208
8	1.8	0.0792	0.9208
9	2	0.0988	0.9012
10	2	0.0988	0.9012
11	2	0.0988	0.9012
12	2.3	0.1322	0.8678
13	2.3	0.1322	0.8678
14	2.5	0.157	0.843
15	2.5	0.157	0.843
16	2.5	0.157	0.843
17	2.5	0.157	0.843
18	2.6	0.1701	0.8299
19	2.6	0.1701	0.8299
20	2.7	0.1837	0.8163
21	2.7	0.1837	0.8163
22	2.7	0.1837	0.8163
23	2.8	0.1977	0.8023

24	2.8	0.1977	0.8023
25	2.8	0.1977	0.8023
26	3	0.2269	0.7731
27	3	0.2269	0.7731
28	3	0.2269	0.7731
29	3	0.2269	0.7731
30	3.3	0.2738	0.7262
31	3.3	0.2738	0.7262
32	3.3	0.2738	0.7262
33	3.5	0.3067	0.6933
34	3.5	0.3067	0.6933
35	3.5	0.3067	0.6933
36	3.6	0.3236	0.6764
37	3.6	0.3236	0.6764
38	3.6	0.3236	0.6764
39	3.7	0.3408	0.6592
40	3.7	0.3408	0.6592
41	4	0.3939	0.6061
42	4	0.3939	0.6061
43	4	0.3939	0.6061
44	4	0.3939	0.6061
45	4.1	0.412	0.588
46	4.1	0.412	0.588
47	4.4	0.467	0.533
48	4.4	0.467	0.533
49	4.5	0.4855	0.5145
50	4.5	0.4855	0.5145
51	4.5	0.4855	0.5145
52	4.7	0.5227	0.4773
53	4.7	0.5227	0.4773
54	4.7	0.5227	0.4773
55	5	0.5781	0.4219
56	5	0.5781	0.4219
57	5	0.5781	0.4219
58	5.2	0.6145	0.3855
59	5.2	0.6145	0.3855
60	5.2	0.6145	0.3855
61	5.4	0.65	0.35
62	5.4	0.65	0.35
63	5.4	0.65	0.35
64	5.4	0.65	0.35

65	5.5	0.6674	0.3326
66	5.5	0.6674	0.3326
67	5.7	0.7013	0.2987
68	5.7	0.7013	0.2987
69	5.7	0.7013	0.2987
70	5.9	0.7336	0.2664
71	5.9	0.7336	0.2664
72	6	0.7491	0.2509
73	6	0.7491	0.2509
74	6	0.7491	0.2509
75	6.4	0.8062	0.1938
76	6.4	0.8062	0.1938
77	6.4	0.8062	0.1938
78	6.4	0.8062	0.1938
79	6.5	0.8191	0.1809
80	6.5	0.8191	0.1809
81	6.7	0.8431	0.1569
82	6.7	0.8431	0.1569
83	6.7	0.8431	0.1569
84	6.9	0.8648	0.1352
85	6.9	0.8648	0.1352
86	6.9	0.8648	0.1352
87	6.9	0.8648	0.1352
88	7	0.8747	0.1253
89	7	0.8747	0.1253
90	7	0.8747	0.1253
91	7.5	0.916	0.084
92	7.5	0.916	0.084
93	7.5	0.916	0.084
94	7.5	0.916	0.084
95	7.7	0.9288	0.0712
96	7.7	0.9288	0.0712
97	7.7	0.9288	0.0712
98	7.8	0.9345	0.0655
99	8	0.9447	0.0553
100	8	0.9447	0.0553
SUM	451.2	49.8265	50.1735
MEAN	4.512	0.498265	0.501735

## 7. الاستنتاجات والتوصيات:

## 7.1 الاستنتاجات:

1- نستنتج من خلال التطبيق العملي ان التوزيع المقترح  $\alpha$  power kappa أفضل من توزيع كبا الاصلي في ملائمة البيانات للجانب التطبيقي للبيانات الحقيقية.

2- نستنتج من خلال المحاكاة أن أفضل طريقه في تقدير المعلمات وتقدير دالة المعولية الضبابية هي طريقه الإمكان الأعظم. 7.1 التوصيات:

1-نوصي الباحثين باستعمال خارطة محولة (Alpha Power Transformed) لتوسعة وبناء توزيعات احتمالية أخرى ذات معلمات ثلاث وأربع كونها طريقة كفوّه في بناء التوزيعات الاحتمالية الموسعة.

2-نوصي الباحثين باستعمال طرائق تقدير حديثة ومقترحة لتقدير معلمات ودالة المعولية للتوزيعات الاحتمالية المقترحة.

## المصادر:

- 1- Ahmad, Z., Hamedani, G. G., & Butt, N. S. (2019). Recent developments in distribution theory: a brief survey and some new generalized classes of distributions. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 87-110.
- 2- Chauveau, D. (1995). *Statistiques descriptives. Notes du cours. Université D'Orléans*. <http://thebear45.free.fr/miage/Master>, 201
- 3- Chauveau, D. (1995). *Statistiques descriptives. Notes du cours. Université D'Orléans*. <http://thebear45.free.fr/miage/Master>, 201
- 4- Elbatal, I., Ahmad, Z., Elgarhy, M., & Almarashi, A. M. (2018). A new alpha power transformed family of distributions: properties and applications to the Weibull model. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 12(1), 1-20
- 5- Eldeeb, A. S., Ahsan-Ul-Haq, M., & Babar, A. (2021). A discrete analog of inverted Topp-Leone distribution: properties, estimation and applications. *International Journal of Analysis and Applications*, 19(5), 695-708.
- 6- Evans, D. L., Drew, J. H., & Leemis, L. M. (2017). The distribution of the Kolmogorov–Smirnov, Cramer–von Mises, and Anderson–Darling test statistics for exponential populations with estimated parameters. *Computational probability applications*, 165-190
- 7- Fahad, Baqir Kareem, 2018. "Choosing the Best Method for Estimating the Probability of Kappa Distribution with Practical Application", Master's thesis, College of Management and Economics, Karbala University.
- 8- Hassan, A. S., Mohamd, R. E., Elgarhy, M., & Fayomi, A. (2018). Alpha power transformed extended exponential distribution: properties and applications. *Journal of Nonlinear Sciences and Applications*, 12(4), 62-67
- 9- Hussein, L. K., Hussein, I. H., & Rasheed, H. A. (2021). An Estimation of Survival and Hazard Rate Functions of Exponential Rayleigh Distribution. *Ibn AL-Haitham Journal For Pure and Applied Sciences*, 34(4), 93-107.
- 10- Khan, M. S. U. R., Hussain, Z., & Ahmad, I. (2021). Effects of L-moments, maximum likelihood and maximum product of spacing estimation methods in using pearson type-3 distribution for modeling extreme values. *Water Resources Management*, 35, 1415-1431
- 11- Lazar, Marian, et al. "Modeling space plasma dynamics with anisotropic Kappa distributions." *Multi-scale Dynamical Processes in Space and Astrophysical Plasmas*. Springer Berlin Heidelberg, 2012
- 12- Livadiotis, G. (2015). Kappa distribution in the presence of a potential energy. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 120(2), 880-903
- 13- Majli, Ahmad Ajil, 2019. "Estimating the Survival Function of Compound Probability Distribution (Weibull - Riley) with Practical Application", Master's thesis, College of Management and Economics, Karbala University.
- 14- Myung, I. J. (2003). Tutorial on maximum likelihood estimation. *Journal of mathematical Psychology*, 47(1), 90-100
- 15- Nasiru, S., Mwitwa, P. N., & Ngesa, O. (2019). Alpha power transformed Frechet distribution. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 13(1), 129-1415
- 16- Tadjiri Ahamada, S. (2019). Etude comparative de modèle d'évaluation d'actifs financiers: cas du MEDAF et du MEDAF baissier sur la BRVM
- 17- ZeinEldin, R. A., Ahsan ul Haq, M., Hashmi, S., & Elsehety, M. (2020). Alpha power transformed inverse Lomax distribution with different methods of estimation and applications. *Complexity*, 2020, 1-15.