Warith Scientific Journal

مقارنة بين طريقتي الامكان الاعظم والامكان الاعظم المحورة لتوزيع كاما ثلاثي المعلمات

A comparison between modified maximum likelihood and maximum likelihood methods for a three-parameter gamma distribution

الباحث عدنان فاضل طعمه
Adnan Fadhel Touma
جامعة كربلاء / كلية الادارة والاقتصاد
University of Karbala
Adnan74fadil@gmail.com

أ.د.عواد كاظم شعلان
Prof. Dr.Awad Kadhim Shaelan
جامعة وارث الأنبياء (ع) :كلية الإدارة والاقتصاد
University of Warith Alanbiyaa
Alkhalidyawad16@gmail.com

المستخلص :

في هذا البحث, تم توليد بيانات تجريبية عن طريق الدالة التجميعية لتوزيع كاما ثلاثي المعلمات بطريقة مونت كارلو ولخمسة حجوم مختلفة للعينة هي (150 , 100 , 75 , 50 , 25) , ولقيم مختلفة من المعلمات عند كل حجم عينة , وتقدير معلمات توزيع كاما للبيانات التجريبية بطريقتين هما طريقة الامكان الاعظم وطريقة الامكان الاعظم المحورة وتم التوصل الى افضلية طريقة الامكان الاعظم المحورة من خلال استعمال المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ MSE والمعيار الاحصائي متوسط نسبة الخطأ المطلق MAPE.

الكلمات المفتاحية: توزيع كاما ثلاثي المعلمات –تقدير المعلمات –طريقة الامكان الاعظم –الامكان الاعظم المحورة –متوسط مربعات الخطأ-متوسط الخطأ النسبي المطلق .

Abstract :

In this research, empirical data were generated through the cumulative function of the three-parameter gamma distribution by Monte Carlo method for five different sample sizes (25, 50, 75, 100, 150), and for different values of parameters at each sample size, and estimation of the parameters of the gamma distribution of the empirical data in two methods is the maximum likelihood method and the modified maximum likelihood method. The preference of the modified maximum likelihood method was best through the use of the statistical criterian mean square error MSE and the statistical criterian absolute mean square error MAPE.

Key words : three parameters gamma distribution - parameters estimation -maximum likelihood method –modified maximum liklihood method –mean square errors-mean absolute proportion errors .

1-المقدمة :

يعد توزيع كاما من التوزيعات ذات الاهمية في دراسة الظواهر التي يكون فيها الزمن عاملا رئيسا , مثل دراسة مدة اشتغال مكائن مصنع معين او دراسة عدد ساعات العمل لمكينة معينة , ودراسة التوقفات والعطلات لماكنة معينة. كما يستعمل توزيع كاما لدراسة المعوّلية في التطبيقات الصحية والبيئية، وهو توزيع ملتوٍ الى اليمين ويستعمل كنموذج لتوزيعات فعاليات الحياة وبالخصوص للظواهر التي لا تملك بيانات متناظرة، وتُعد طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم طرائق معيارية لتقدير معلمات هذا التوزيع .

2-مشكلة البحث :

تكمن مشكلة البحث في الحاجة الى معرفة أي من طريقتي الإمكان الأعظم والامكان الأعظم المحورة هي الأفضل لتقدير معلمات توزيع كاما ثلاثي من اجل الاعتماد عليها في البحوث المستقبلية .

3-هدف البحث :

يهدف هذا البحث الى تقدير معلمات توزيع كاما ثلاثي المعلمات بطريقتي الإمكان الأعظم والامكان الأعظم المحورة من اجل المقارنة بينها وتحديد افضلهما .

4. الجانب النظري[1][6]:

يقال للمتغير العشوائي x بانه يتبع توزيع كاما ثلاثي المعلمات اذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع ممثلة بالمعادلة (1)

$$f(x;\alpha,\beta,\gamma)=\frac{(x-\gamma)^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}\exp\left\{-\frac{x-\gamma}{\beta}\right\} \qquad x>\gamma,\alpha>0,\beta>0 \qquad (1)$$

α : معلمة الشكل , β : معلمة القياس , γ :معلمة الموقع

4.1 طرائق التقديرالتقليدية والمحورة[2][5][6][7][8]:

4.1.1 طريقة الامكان الاعظم[3] maximum likelihood estimation:

تُعد طريقة الامكان الاعظم للتقدير واحدة من الطرائق المهمة وشائعة الاستخدام في تقدير المعلمات المجهولة وتعتمد هذه الطريقة على استخدام دالة الامكان (Likelihood Function) ويمكن تعريفها :-

لتكن $(X_1,X_2,..,X_n)$ عينة عشوائية بحجم (n) مسحوبة من مجتمع دالة كثافتة الاحتمالية $f(x;\theta)$ و $\theta\in\Omega$ فأن دالة الامكان والتي يرمز لها بالرمز (L) وهيّ عبارة دالة الكثافة الاحتمالية المشتركة لمتغيرات العينة العشوائية وتكون صيغتها:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x};\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{(\Gamma\alpha)^{n}\beta^{n\alpha}}\prod_{i=1}^{n}(\mathbf{x_i}-\gamma)^{\alpha-1}\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{x_i}-\gamma}{\beta}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta}=-\frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}+\frac{1}{\hat{\beta}^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x_i}-\hat{\gamma})=0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = -n\Psi(\hat{\alpha}) - \ln\hat{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - \hat{\gamma}) = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma} = \frac{n}{\hat{\beta}} - (\hat{\alpha} - 1)\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\gamma})^{-1} = 0$$

حيث ان:

$$\Psi(\alpha) = \frac{\partial \ln\Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} \qquad (4)$$

وتسـمى دالـة كاما الثنائية (Digamma Function) .

من المعادلة الاولى في (3) نحصل على:

$$n\hat{\alpha}\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\gamma})$$

وبالتالي فأن :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x} - \hat{\gamma}}{\hat{\alpha}} \qquad (5)$$

وبتعويض قيمة $\hat{\beta}$ في المعادلة الثانية من (3) نحصل على المعادلة (6) بدلالة كل من $\hat{\alpha}$ و $\hat{\gamma}$:

$$\Psi(\hat{\alpha}) - \ln\hat{\alpha} + \ln(\bar{x} - \hat{\gamma}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - \hat{\gamma}) = 0 \qquad (6)$$

هنالك عدد من الحالات لكل من معلمة الشكل α ومعلمة الموقع γ عندما تكون المعلمة معلومة أو غير معلومة يمكن ان نضعها في حالتين :

اولا- معلمة الموقع (γ)

أ- معلمة الموقع (γ) غير معلومة نستخدم قيمة تجريبية مثل γ_1 يتم تعويضها في (6-1) بذلك نستطيع ايجاد α_1 كما يلي :

بدايةً من (4) نجد

$$\Psi(\alpha) = \frac{\partial \ln\Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} * \frac{\partial \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha} \qquad (7)$$

حيث ان :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

ويمكن الحصول على $\frac{\partial \Gamma(\alpha)}{\partial \alpha}$ نحتاج استعمال قاعدة تسمى بقاعدة ليبنز

Leibniz’rule والتي صيغتها كما يلي :

لتكن

$$I(t) = \int_{g(t)}^{h(t)} f(x;t)\, dt$$

اذ ان f(x;t) ، h(t) ، g(t) دوال مستمرة قابلة للاشتقاق عند النقطة t

وباعتماد قاعدة ليبنز لدالة كاما مع $f(y,\alpha) = y^{\alpha-1} e^{-y}$ ، $h(\alpha) = \infty$ و $g(\alpha) = 0$ فنحصل على :

$$\frac{\partial\Gamma(\alpha)}{\partial\alpha} = \int_0^\infty y^{\alpha-1}(\ln y)e^{-y}\, dy \qquad (8)$$

ثم التكامل بالتجزئة ونحصل على :

$$= \Gamma(\alpha-1) + (\alpha-1)\int_0^\infty y^{\alpha-2}(\ln y)e^{-y}\, dy \qquad (9)$$

$$= \Gamma(\alpha-2) + (\alpha-2)\int_0^\infty y^{\alpha-3}(\ln y)e^{-y}\, dy \qquad (10)$$

وعند تعويض (10) في (9) وهكذا نستمربعملية التكامل بالتجزئة :

$$\frac{\partial\Gamma(\alpha)}{\partial\alpha} = \Gamma(\alpha-1) + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{l=1}^{k}(\alpha-l)(\alpha-k-1) \qquad (11)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha-k} \qquad (12)$$

ثم نأخذ (r) من الحدود مثلاً(r = 3) فتنتج لدينا متعددة حدود من الدرجة الثالثة ويمكن تعوضها في المعادلة (6) ويسمى الناتج f(α) و صيغته تكون :

$$f(\hat{\alpha}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{1}{\hat{\alpha}-k} - \ln\hat{\alpha} + \ln(\bar{x}-\hat{\gamma}) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\hat{\gamma}) \qquad (13)$$

$$f'(\hat{\alpha}) = -\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(\hat{\alpha}-k)^2} - \frac{1}{\hat{\alpha}} \qquad (14)$$

بعدها نستخدم طريقة نيوتن-رافسن والتي صيغتها هيَّ :-

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \frac{f(a_0)}{f'(\alpha_0)} \qquad (15)$$

ثم نستعمل الاستكمال الخطي للحصول على التقديرات للمعلمات الثلاث

$$\hat{\gamma} = \gamma_i - \frac{\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right)_i}{\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right)_j - \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \gamma}\right)_i}\left(\gamma_j - \gamma_i\right) \qquad \textbf{(16)}$$

ب- معلمة الموقع γ معلومة : فنستطيع ايجاد $\hat{\alpha}$ من (6) كما في الحالة (أ) اعلاه (لا نستخدم قيم تجريبية لـ λ كونها معلومة) وبعد التعويض عن قيم $\hat{\alpha}$ و γ في (5) سوف حصل على $\hat{\beta}$.

ثانياً- معلمة الشكل(α)

أ- معلمة الشكل α معلومة

عندما تكون $\alpha > 1$ فأن معادلات التقدير الامكان الاعظم تكون المعادلة الاولى والثالثة فقط من (3).

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x} - \hat{\gamma}}{\alpha} \qquad (17)$$

4.1.2 طريقة الامكان الاعظم المحورة (Modified MLE):

يمكن ان نحصل بطريقة سهلة على مقدرات الامكان الاعظم المحورة (MMLE) وبصورة اسهل من الحصول على مقدرات طريقة MLE التقليدية , وهنا نستخدم اول معادلتين من المعادلة (3) والتي هي (5) , (6) ومعادلة بدلا" من المعادلة الثالثة ل(3) ولكلا الحالتين :

- الحالة الأولى :

باستبدال المعادلة الثالثة من (3) بالمعادلة :

$$E[F(y_1)] = F(y_1) \qquad (18)$$

تمثل y_1 الأحصاءه المرتبة الأولى ولها دالة كثافة احتمالية :

$$E[F(y_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} nF(y_1)\left(1 - F(y_1)\right)^{n-1} f(y_1)\, dy_1 \qquad (19)$$

باستخدام دالة بيتا مع $(a = 2)$ و $(b = n)$ فــأن:

$$E[F(y_1)] = \frac{n(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \qquad (20)$$

كذلك من (18) و (20) فــأن:

$$F(y_1) = \frac{1}{n+1} \qquad (21)$$

وتستخدم نفس طريقة العمل والأجراءات التي أعتمدت مع MLE لتقدير المعلمات الثلاثة للتوزيع بأعطاء معلمة الموقع γ قيمة تجريبية لتكن γ_1 ويتم تعويضها في المعادلة (6) ونحصل على α_1 كما ذكر سابقا ثم يتم تعويض قيمتي α_1 و γ_1 في معادلة (5) نحصل على β_1 , وبعدها يتم تعويض القيم الثلاثة $\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1$ في دالة توزيع كاما ثلاثي المعلمات

$$F(x) = \sum_{k=\alpha}^{\infty} \frac{\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{k} \exp\left(-\frac{x-\gamma}{\beta}\right)}{k!}$$

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{k} \exp\left(-\frac{x-\gamma}{\beta}\right)}{k!} \qquad (22)$$

وبالاستكمال الخطي يتم الحصول على تقدير معلمات التوزيع α , β , γ . عندما تكون α معلمة الشكل معلومة , سوف تكون معادلات التقدير :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}-\hat{\gamma}}{\alpha} \qquad ; \qquad F(y_1) = \frac{1}{n+1} \qquad (23)$$

- الحالة الثانية :

يتم استبدال المعادلة الثالثة في (3) بالمعادلة الاتية :

$$\sigma_x^2 = s^2$$

$$\alpha\beta^2 = s^2 \qquad (24)$$

$$\frac{s^2}{(\bar{x}-\hat{\gamma})^2} = \frac{1}{\hat{\alpha}} \qquad (25)$$

$$\ln\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i - \hat{\gamma}) - \Psi(\hat{\alpha})$$

$$\hat{\beta} = \frac{s}{\sqrt{\alpha}} \qquad (26)$$

$$\hat{\gamma} = \bar{x} - s\sqrt{\alpha}$$

.5 الجانب التجريبي:

المحاكاة Simulation : يمكن تعريف المحاكاة بانها طريقة تحليلية عددية علمية , تستعمل فيها اساليب ومناهج رياضية , يعد اسلوب المحاكاة من الجوانب المهمة والعلمية ويؤدي دورا مميزا في معالجة المشكلات خصوصا بعد التطور الكبير والواسع في مجال الالكترونيات والحاسبات الالكترونية مادفع العديد من الباحثين باعتماد اسلوب المحاكاة في العديد من الابحاث لدراسة اي ظاهرة او تقدير معلمات او احصائات او اختبار او توزيع احصائي او انموذج لصعوبة معرفة ذلك

نظريا والسبب هو ايجاد صورة طبق الاصل لاي نموذج دون الرجوع الى اخذ الانموذج الاصلي لدراستة واي عملية تقليد وتمثيل للواقع الحقيقي فهي المحاكاة

5.1 طرائق تقدير توزيع كاما بثلاث معلمات:

تم إستعمال طريقتين لتقدير معلمات توزيع كاما ثلاثي المعلمات وهي:

1-طريقة الامكان الأعظم (Maximum Likelihood Method):

تم الحصول على تقدير معلمات توزيع كاما الثلاثة بموجب طريقة الامكان الأعظم بإحدى الطرائق العددية المستعملة لحل المعادلات الرياضية غير الخطيـة عن طريق الدالة fsolve في برنامج Matlab.

2-طريقة الامكان الاعظم المحورة modified maximum likelihood estimation (MMLE)

تم الحصول على تقديرات معلمات توزيع كاما الثلاثة بموجب طريقة الامكان الاعظم المحورة بالصيغة بإحدى الطرائق العددية المستخدمة لحل المعادلات الرياضية غير الخطيـة وهي عن طريق استعمال الدالة fsolve في برنـامج Matlab.

5.2 تحليل نتائج التجربة:

بعدان تم اختيا ر قيم افتراضية بتكرار (1000) مرة , كانت الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم المحورة, كما في الجدول (2 – 1)

الجدول (1 - 5) افضلية طريقة الإمكان الأعظم المحورة على الامكان الأعظم عند 5 حجوم مختلفة

	Sample size					n0. of preference	percent of preference
Method	**25**	**50**	**75**	**100**	**150**		
MLE	**4**	**2**	**9**	**4**	**1**	**14**	**24.56%**
MMLE	**9**	**9**		**8**	**8**	**43**	**75.44%**

ومن جدول (1-5) يتضح ما يأتي:

- ❖ بالمقارنة بين طرائق التقدير من خلال مقياس متوسط مربع الخطأ (MSE) ومتوسط الخطأ النسبي المطلق MAPE ولأحجام مختلفة من العينات و نسبة الأفضلية تبين لنا ان طريقة (MMLE) جاءت بالمرتبة الأولى لامتلاكها اكبر نسبة حيث بلغت 75.44% وجاءت بعدها طريقة (MLE) بالمرتبة الثانية حيث بلغت 24.56%

6. الاستنتاجات والتوصيات:

6.1 الاستنتاجات:

1. في جميع طرائق التقدير المدروسة نلاحظ ان كلما ازداد حجم العينة تقترب مقدرات المعلمات من قيم المعلمات الافتراضية (الحقيقية) ولطرائق التقدير كافة وهذا ما يتناسب مع النظرية الاحصائية.
2. اظهر الجانب التجريبي وبالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) والمعيار الاحصائي متوسط نسبة الخطأ المطلق (MAPE) ان افضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كاما ثلاثي المعلمات هي طريقة الامكان الاعظم المحورة (MML) .

ISSN: 2618-0278 Vol. 6No. 17 March 2024

6.2 التوصيات:

1- استعمال طريقة الامكان الاعظم المحورة لتقدير معلمات لتوزيع كاما ثلاثي المعلمات .

2- زيادة البحوث والدراسات التي تتناول التوزيعات ثلاثية المعلمات .

المصادر:

1- Al-Obaidi, Nadia Jaafar Faza (2004) An experimental comparison between MLE estimators and Bayes estimators for the general gamma distribution, Master's thesis, College of Science, Al-Mustansiriya University.

2-Al-Hindi, Uday Walid (1998) A comparative study of methods for estimating gamma distribution parameters and calculating reliability with a practical application, "Master's thesis in statistics at the College of Administration and Economics, University of Baghdad".

3-Adatia , A (1988) , robust estimation of the two parameters gamma distribution . v (37) , N(2) (234- 238)

4-Alan ,J .G, (1971) , Monotonicity properties of the moments of trancated Gamma & Weibull distribution ; *technometrics , V (14) NO.(4) (851-857)*

5-Choi , S ,C & Wette .R (1969) maximum likelihood estimation Of the parameters of gamma distribution and thier bias , *technometrics , V(11) , NO. (4) (683-690)*

6-Cohen , A .C, & Whitten (1982) modified moment & maximum likelihood estimation Of the parameters of three parameters gamma distribution common statistics simulation computa , 11(2) , (197-216)

7- Cohen , A.C (1975) estimation Of the three parameters of gamma distribution proceeding of the (40^{th}) section of the international statistical institute (WARSAW) Bulletin 1st (46) , Book 3 (167-170)

8-Wilk, M. B., Gnanadesikan, R. and Huyett, M. J. (1962), "*Estimation of Parameters of the Gamma Distribution using Order Statistics"*, Biometika, v. 49, parts 3-4, pp 525-545.