التمثيل البياني لدالة الخيمة وإحتماليتها

سهى إبراهيم صالح العلي
مدرس مساعد
جامعة تكريت – كلية علوم الحاسبات والرياضيات - قسم الرياضيات

الخلاصة

يتضمن البحث دراسة دالة الخيمة عند نقطة معينة تكون عندها الدالة دورية وتكوين متتابعة دورية من الرمزين الصفر والواحد وتمثيل الحالة ببيان موجه ومعنون والتعبير عنه بمصفوفة المجاورة وإيجاد سلسلة ماركوف ، كما وضعت احتمالية معينة حسب شروط وأساسيات الاحتمالية الشرطية وإيجاد متجه الاحتمالية والمصفوفة الانتقالية لها كذلك وجدت سلسلة ماركوف التبولوجية والكلمات التي تظهر في $X_p(G)$ هي نفسها التي تظهر YG كذلك الحال بالنسبة للكلمات الممنوعة . وان الاحتمالية الموجبة للحرف تعتمد على ما قبلها مباشرة لكن الكلمة الممنوعة هي احتمالية حرف لا تعتمد على ما قبلها مباشرة وحصلنا أيضا على إن الدالة T تحتوي على كلمات ممنوعة مما يجعلها سلسلة ماركوف التبولوجية مع الاحتمالية الموجبة .

المقدمة

تعتبر دالة الخيمة من الدوال الرياضية والتي لاقت اهتماما من قبل العديد من الباحثين من خلال امتلاكها لصفات ديناميكية متعددة واشار (Gulick) الى ان هذه الدالة فوضوية لانها تمتلك حساسية معتمدة لشروط ابتدائية كما وانها تمتلك اسية لابنوف بالاضافة الى ذلك فان دالة الخيمة تمتلك نقاط دورية ونقاط ثابتة اضافة الى هذه الحقائق اشار (Gulick) الى ان دالة الخيمة مستمرة ومجموعة نقاطها الدورية في [0,1] تكثف [0,1] تحت تاثير الدالة T ومن خلال ما ذكر، تم في هذا البحث دراسة حالة خاصة لدالة الخيمة تكون فيها الدلة دورية فقد تناولت في البند الاول بعض التعاريف والمفاهيم الاساسية والقضايا ذات العلاقة ليسهل دراسة ما تناولته في البند الثاني من دراسة للحافات والرؤوس وايجاد النقلات وتحويل التمثيل البياني الى مصفوفة المجاورة، باضافة الى ايجاد سلسلة ماركوف التبولوجية للدالة كما و درست الاحتمالية للدالة والاحتمالية الانتقالية لها وتحويلها الى المصفوفة الانتقالية .

البند الاول

مفاهيم أساسية 1-1

تعريف1-1 [4]

تدعى الدالة $X : N \to A$ بالمتتابعة من جهة واحدة (One-Sided Sequence) ويرمز لها بالرمز $\{X(i)\}_{i\in N}$ وتكتب بالشكل $X(0), X(1), X(2),...$ ،حيث N تمثل الاعداد الطبيعية .

تعريف 1-2 [5]

تدعى الدالة $X : Z \to A$ بالمتتابعة الثنائية (Bi-Sequence) ويرمز لها $\{X(i)\}_{i\in Z}$ وتكتب بالشكل $...X(-1).X(0), X(1), X(2),...$ ، حيث Z تمثل الاعداد الصحيحة.

تعريف 1- 3 [5]

يقال للمتتابعة منتهية الحروف من A كلمة (Word) اذا كانت A ابجدية وان عدد حروفها هو طولها ،ويرمز لطول الكلمة W بالرمز $|W|$ وللكلمة الخالية بالرمز $|\varepsilon| = 0$.

ويقال للكلمة $a_i \ldots a_j$ انها كلمة جزئية (Sup Word) من الكلمة $a_1 \ldots a_n$ عندما $1 \le i \le j \le n$.

تعريف 1-4 [6]

يقال ان $\sigma : A^Z \to A^Z$ دالة نقلة (Shift Map) على فضاء المتتابعات A^Z اذا كانت $[\sigma(X)]_i = X_{i+1}$ لكل $X \in A^Z$.

تعريف 1-5 [3]

لتكنA ابجدية وY مجموعة مغلقة غير خالية جزئية من A^Z ولا متغيرة تحت تأثير σ وتعرف بوساطة منع مجموعة من الكلمات الموجودة في متتابعات A^Z فيقال ان Y تمثل مجموعة كل المتتابعات الثنائية الموجودة في A^Z والتي لا تظهر فيها الكلمات الممنوعة (Forbidden Word) والتي تمثل مجموعتها F ، وان اقتصار σ علىY يرمز له بالرمز σ_y وهو هوميومورفزم من Y الى Y ويعرف بأن (Y, σ_y) نقلة جزئية (Sub Shift) من تام النقلة (A^Z, σ) .

تعريف 1-6 [3]

لتكن (Y, σ_y) نقلة جزئية من تام النقلة (A^Z, σ) يقال ان (Y, σ_y) نقلة منتهية (Shift of Finite SFT Type) او سلسلة ماركوف التبولوجية TMC (Topological Markov Chain) اذا كانت الكلمات الممنوعةF منتهية .

تعريف 1-7 [5]

يقال ان (Y, σ_y) غير قابلة للاختزال (Irreducible) اذا كانت (Y, σ_y) نقلة جزئية ، ولكل زوج مرتب من الكلمات $u, v \in L$ يوجد $w \in L$ بحيث $u, v, w \in L$.

تعريف 1-8 [3]

يقال ان سلسلة ماركوف التبولوجية (TMC) خطوة- M (M-Step) اذا كانت السلسلة معرفة بوساطة مجموعة من الكلمات الممنوعة طول كل منها M+1 ويرمز لها F_{M+1} .

ان سلسلة ماركوف التبولوجية (Y, σ_y) هي سلسلة ماركوف X_p عندما يكون X_p فضاء متتابعات y معرف من احتمالية كل عنصر في الابجدية أي ان $p : a \to [0,1]$ فيها كل احتمالية موجبة للحرف تعتمد على ما قبلها مباشرة ، اما بالنسبة للزوج المرتب من الحالات فتجمع في مصفوفة انتقالية.

تعريف 1-9 [2]

لتكن $f : X \to X$ **دالة و** $x \in X$ **يقال ان** x **نقطة دورية بدورة** n **(Period-n Point) اذا كانت هناك** $n \in Z$ **بحيث** $f^n = x$ **و** n **اقل عدد صحيح موجب، و** x **نقطة دورية جاذبة بدورة** n **(Attracting Period-n Point) و** x **نقطة دورية طاردة بدورة** n **(Repelling Period-n Point) اذا كانت** $|(f'(x)| \succ 1$ **وان** x **نقطة دورية بعد حين بدورة** n **(Eventually Period-n Point) اذا كان هناك** $m \succ 0$ **بحيث** $f^{n+i}(x) = f^i(x)$ **لكل** $i \geq m$ **أي ان** $f^i(x)$ **بدورة** n **لكل** $i \geq m$ **.**

تعريف 1-10 [1]

ليكن G بيان مع المجموعة الرأسية $V = \{1, 2, ..., n\}$ **وعدد الحافات في البيان هو** b_{ij} , $i, j = 1,2,...,n$ **التي بدايتها الرأس** i **ونهايتها الرأس** j **يقال ان المصفوفة المجاورة (Adjacency Matrix) للبيان G هي مصفوفة مربعة** $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ **بعدها عدد الرؤوس في البيان G ويرمز له** B_G **، اما اذا كانت** $B = \lfloor b_{ij} \rfloor$ **مصفوفة مجاورة مربعة** $n \times n$ **عناصرها اعداد صحيحة غير سالبة وبعد المصفوفة** n **يمثل عدد رؤوس البيان G و** b_{ij} **عدد الحافات بين الرأسين** j, i **فيمكن رسم البيان ويرمز له** B_G **.**

تعريف 1-11 [5]

ليكن G بيان وA ابجدية تمثل مجموعة الحافات (E=A) و V تمثل مجموعة الرؤوس و B_G **المصفوفة المجاورة للبيان فأن** $\mathrm{X_G}$ **المجموعة المغلقة الغير خالية والجزئية من** $\mathbf{A^Z}$ **واللا متغيرة تحت تاثير** σ **تعرف بالاتي:** $\mathrm{X_G} = \{X = (X_i)_{i \in Z} \in A^Z : \forall i \in Z, x_i \in A, t_G(x_i) = i_G(x_{i+1})\}$

حيث الراس $t_G(x_i)$ **تنتهي عنده الحافة** X_i **والرأس** $i_G(x_{i+1})$ **تبدأ منه الحافة** X_{i+1} **أي ان** $X_i X_{i+1}$ **كلمة في** $\mathrm{X_G}$ **والاخيرة تمثل مجموعة كل المتتابعات في** $\mathbf{A^Z}$ **التي لاتظهر فيها الكلمات الممنوعة وان اقتصار الدالة** σ **على** $\mathrm{X_G}$ **يكون هوميومورفزم من** $\mathrm{X_G}$ **الى** $\mathrm{X_G}$ **كون** $\mathrm{X_G}$ **لا متغيرة ويرمز له** σ_G **والذي يعرف النقلة الجزئية** (X_G, σ_G) **او نقلة الحافة (Edge Shift) بالنسبة للبيان من** (A^z, σ) **ودالة النقلة المعرفة على** $\mathrm{X_G}$ **تسمى دالة نقلة الحافة (Edge Shift Map) اما المعرفة على E فتسمى سلسلة ماركوف التبولوجية او نقلة ماركوف التبولوجية**

قضية 1-12 [5]

اذا كان G بيان و B_G **مصفوفة المجاورة ، فان نقلة الحافة** (X_G, σ_G) **هي خطوة - 1 لسلسلة ماركوف التبولوجية .**

البرهان :

تعريف 1-13 [5]

يقال ان $\pi = x_1 x_2 ... x_m$ **مسار منتهي (Finite Path) على البيان G اذا كان** π **متتابعة منتهية من الحافات** $\{X_i\}_{i=1}^{m}$ **من البيان G بحيث ان** $t_G(x_i) = i_G(x_{i+1})$ **وان طول المسار** $|\pi| = m$ **بدايته عند الراس** $i_G(\pi) = i_G(x_i)$ **ونهايته عند الراس** $t_G(\pi) = i_G(xm)$ **فهو مسار من** $i_G(\pi)$ **الى** $t_G(\pi)$ **والمسار الذي بدايته ونهايته عند نفس الراس فيسمى دورة (Cycle) وهي التي لاتقاطع نفسها أي ان** $\pi = x_1 x_2 ... x_m$ **حيث ان الرؤوس تكون مختلفة أي ان** $i_G(x_1) \neq i_G(x_2) \neq ... \neq i_G(x_m)$

قضية 1-14 [5]

اذا كان G بيان مع مصفوفته المجاورة وان (X_G, σ_G) **نقلة الحافة فان .**

1.عدد المسارات لطول m **من الراس** i **الى الراس** j **هو** b_{ij}^m **.**

2.عدد الدورات لطول m **في البيان G هو** $tr(B_G^m)$ **وهذا يساوي عدد النقاط في** X_G **بالدورة** m **.**

لكل $m \geq 0$

البرهان:

تعريف 1-15 [5]

يكون البيان G غير قابل للاختزال (Irreducible) اذا كان لكل زوج مرتب من الرؤوس i **و** j **يوجد مسار للبيان G بدايته عند الراس** i **ونهايته عند الراس** j **وغير ذلك يكون قابل للاختزال (Reducible)**

ان البيان يكون اساسي اذا كان غير قابل للاختزال اما العكس غير صحيح ،واذا كان البيان غير قابل للاختزال فان نقلة الحافة (X_G, σ_G) **غير قابل للاختزال ومعكوسها غير صحيح.**

مبرهنة 1-16 [5]

اذا كانت (Y, σ_Y) **خطوة-M سلسلة ماركوف التبولوجية (MTC) فانه يوجد بيان Gبحيث** $Y^{[M+1]} = X_G$ **.**

البرهان:

البند الثاني

دالة الخيمة 1-2 The Tent function

تعرف دالة الخيمة [2] بالصيغة التالية:

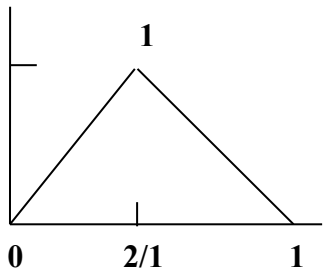
T:[0,1]⟶[0,1] بحيث

$$T(x) = \begin{cases} 2\upsilon x & if\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2\upsilon - 2\upsilon x & if\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

وعندما تكون قيمة $\upsilon = 1$ فان

$$T(x) = \begin{cases} 2x & if\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & if\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

ولها شكل الخيمة الذي منه جاء اسم الدالة كما موضح في الشكل (1) أدناه:



الشكل (1) دالة الخيمة

اما الان فسندرس البيان الموجة (Directed Graph) على حالة خاصة من دالة الخيمة عندما تكون قيمة $x = 2/9$ لانه يعرف نقلة الحافة والنقلة الرأسية اللتان تمثلان سلسلة ماركوف التبولوجية (TMC) والبيان G يتكون من مجموعة منتهية من الرووس (Vertices) يرمز لها V و مجموعة منتهية من الرووس تسمى الحافات (Edges) ويرمز لها E ولتكن دالة البداية $i_G : E \to V$ التي تأخذ كل حافة الى بدايتها ودالة النهاية $t_G : E \to V$ تأخذ كل حافة الى نهايتها وهناك في بعض الاحيان نهاية الحافة هي نفس البداية عندها تسمى لفة (Loop) وعند وجود اكثر من حافة بين بداية ونهاية الرأس فتسمى الحافات المضاعفة (Multiple Edges) :

فعندما $x = \frac{2}{9}$ نجد ان

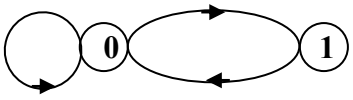
$$T(\frac{2}{9}) = \frac{4}{9} \quad \text{و} \quad T^2(\frac{2}{9}) = \frac{8}{9} \quad \text{و} \quad T^3(\frac{2}{9}) = \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

اذن $\frac{2}{9}$ نقطة دورية بدورة -3 وهي نقطة دورية طاردة لان $\left|(T^{3'}(\frac{2}{9})\right| = 2.2.2 = 8 \rangle 1$

ونستطيع تحويلها لمتتابعة بدلالة 0 و 1 حسب الصيغة التالية

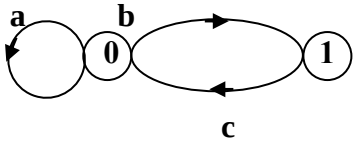
$$N = \begin{cases} 0 & if\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1 & if\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

أي ان X=010 ويمكن تمثيلها بالبيان التالي



شكل (2)

ان للبيان المتجه المعنون مجموعة رأسية والتي تحتوي على رأسيين 0 و1 كما في الشكل (2)، أي ان $V=\{0,1\}$ ومجموع الحافات $E=\{a,\ b,\ c\}$ فالحافة b لها نقطة البداية 0 ونقطة النهاية 1 اما الحافة c فلها نقطة البداية 1 ونقطة النهاية 0 اما بالنسبة للحافة a لها نقطة البداية 0 والتي هي نقطة النهاية ايضا ولذا تسمى لفة (Loop)



شكل (3)

و يمكن تمثيله بالمصفوفة المجاورة التالية

$$B_G=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

فتكون مجموعة الحافات للبيان G هي $E=\{a,b,c\}$ والمجموعة الراسية هي $V=\{0,1\}$،اما لايجاد نقلة الحافة (X_G,σ_G) فان

الابجدية =مجموع الحافات أي ان $(A=E)$ ومن تعريف نقلة الحافة نجد ان

$\forall b,c\in E\ \ \mathrm{X_G}$ موجودة في نقاط bc يؤدي الى ان الكلمة $t_G(b)=i_G(c)=1$

$\forall a,b\in E\ \ \mathrm{X_G}$ موجودة في نقاط ab يؤدي الى ان الكلمة $t_G(a)=i_G(b)=1$

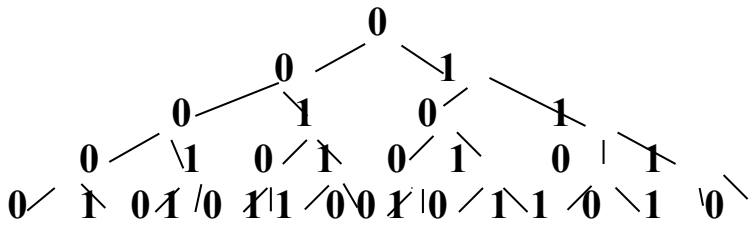
$\forall a,a\in E\ \ \mathrm{X_G}$ موجودة في نقاط aa يؤدي الى ان الكلمة $t_G(a)=i_G(a)=1$

$\forall c,a\in E\ \ \mathrm{X_G}$ موجودة في نقاط ca يؤدي الى ان الكلمة $t_G(c)=i_G(a)=0$

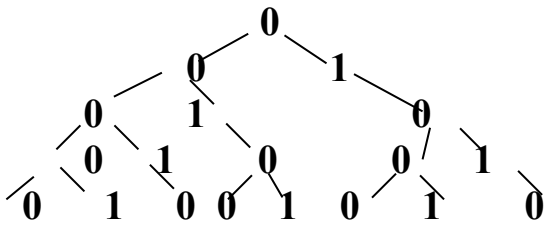
لكن $t_G(b)=i_G(b)$ لان $t_G(b)=1$ و $i_G(b)=0$ يؤدي الى ان الكلمة bb غير موجودة في نقاط $\mathrm{X_G}$ لكل $\mathrm{b\in E}$ ، اذن الكلمة الممنوعة هي $F=\{bb\}$ أي ان $\mathrm{X_G}$ هي كل المتتابعات المعرفة على E في $E^Z=A^Z$ عدا المتتابعة التي تظهر فيها الكلمة الممنوعة bb فلو اخذنا المتتابعة $X_G=abccababaacabca...$ فان $\sigma_G(x)=bccababaacabca...$ ان (X_G,σ_G) هي نقلة جزئية من تام النقلة (A^z,σ) وذلك لان $\mathrm{X_G}$ لامتغيرة ومغلقة أي ان (X_G,σ_G) نقلة حافة بخطوة -1 وهي سلسلة ماركوف التبولوجية TMC وبما ان $V=\{0,1\}$ فالمتتابعة اللامنتهية الدورية بدورة 3 بدلالة 0 و1 لدالة الخيمة T عند $x=\frac{2}{9}$ هي $X_G=001001001...$ ولان الكلمة الممنوعة $F=11$ منتهية وهي بطول 2 أي ان MTC-1 فالمتتابعة التي تحتوي على الكلمة الممنوعة لها الشكل $X_{bb}=11111111111111...$

ويمكن تمثيلها بالشجرة الثنائية الغير ممتلئة التي جذرها الرئيسي صفر وبوجود الكلمة الممنوعة 11 مما يجعل الشجرة الثنائية الفرعية التي جذرها 1 لا تحتوي الا على الفرع الايسر 0 ولا تحتوي على الفرع الايمن

1 ولهذا هي غير ممتلئة ،اما الشجرة الثنائية الممتلئة ومكونة من خمس مستويات على سبيل المثال يكون عدد نقاطها محسوبا وفق الصيغة التالية $2^w-1=2^5-1=31$ حيث w عدد المستويات وهذه الشجرة الممتلئة هي الشجرة الثنائية من 0 و1 قبل حذف الكلمة الممنوعة 11 كما موضحة في الشكل (4).



الشجرة الثنائية الممتلئة (a)



الشجرة الثنائية بعد حذف الكلمة 11 (b)

شكل (4)

فالبيان G له مسارات ذات أطوال مختلفة حيث $\pi_1 = abcaa$ مسار طوله خمسة ، بدايته عند الرأس $i_G(\pi_1)=i_G(a)=1$ ونهايته عند الرأس $t_G(\pi_1)=i_G(a)=1$ والذي يمثل مسار الدورة للبيان لان بدايته ونهايته عند نفس الرأس.

اما المسار $\pi_2 = cbca$ فطوله ثلاثة وبدايته عند الرأس $i_G(\pi_2)=i_G(c)=1$ ونهايته عند الرأس $t_G(\pi_2)=i_G(a)=0$

ملاحظة 2-2

لحساب اطوال المسارات والدورات توجد حافات خارجة (Out-Degree) من الراس وحافات وداخلة (In-Degree) اليه ونرمز لعدد الحافات الخارجة بالرمز d^+i اما لعدد الحافات الداخلة d^-i فاذا كان $d^+i=0$ يسمى الراس غاطس (Sink) واذا كان $d^-i=0$

فيسمى الراس مصدر (Source) [7] ، ويسمى الراس موقوف (Stranded) اذا كان الراس i غاطس او اذا كان الراس i مصدر،وفي المصفوفة المجاورة يسمى الراس i موقوف عندما الصف او العمود بالنسبة للراس i للمصفوفة المجاورة B_G يحتوي اصفار فقط ويكون البيان اساسي (Essential Graph) اذا لم

يكن أي راس من رؤوسه موقوف واذا كان البيان اساسي فان المسارات على البيان تطابق الكلمات الموجودة في نقلة الحافة ، فمن البيان G شكل (3) نجد ان :

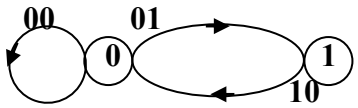
$$d^+(0)=2 \qquad d^-(0)=2$$

$$d^+(1)=1 \qquad d^-(1)=1$$

$$d\ (0)=d^+(0)+d-(0)=4 \qquad d(1)=d^+(1)+d-1=2$$

البيان G اساسي لان كلا من الراسين i و j غير موقوف .

للبيان G نجد نقلة الحافة $\left(Y^{[2]},\sigma^{[2]}\right)$ بتحديد مجموعة من الكلمات بطول-2 حسب طول الكلمة الممنوعة F=2 وهي $L_2(Y)=\{00,01,10\}$ وبما ان مجموعة الحافات تساوي الأبجدية $E=L_2(Y)$ والمجموعة الراسية للبيان تمثل مجموعة كلمات-1 تظهر في Y أي ان $V=\{0,1\}$ فان البيان سيكون بالشكل التالي:



شكل(5)

اما نقلة الحافة $t_G(00)=i_G(00)=0$ يؤدي الى الكلمة 00 00 موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

$t_G(00)=i_G(01)=0$ يؤدي الى الكلمة 01 00 موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

$t_G(01)=i_G(10)=1$ يؤدي الى الكلمة 10 01 موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

$t_G(10)=i_G(00)=0$ يؤدي الى الكلمة 00 01 موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

$t_G(10)=i_G(01)=0$ يؤدي الى الكلمة 01 10 موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

$0=i_G(01)$, $t_G(01)=1$ يؤدي الى الكلمة 01 01 غير موجودة في نقاط $Y^{[2]}$.

وبنفس الطريقة نجد ان الكلمات الممنوعة هي

$$F=\{01\ \ 01,\ \ 00\ \ 10,\ \ 01\ \ 00,\ \ 10\ \ 10\}$$

اذن كل المتتابعات المعرفة على $L_2(Y)$ والموجودة في تام النقلة هي $X_G=Y^{[2]}$ عدا المتتابعات التي تظهر فيها الكلمات الممنوعة ، وبما ان المجموعة $Y^{[2]}$ لامتغيرة ومغلقة تحت تاثير $\sigma^{[2]}$ فان $\left(\sigma^{[2]},Y^{[2]}\right)$ نقلة جزئية (نقلة حافة) من تام النقاة $\left(A^Z,\sigma\right)$ ،

اما

$t_G(a)\neq i_G(c)$ يؤدي الى الكلمة 1 $ac=0.3$ غير موجودة في نقاط $X_p(G)$.

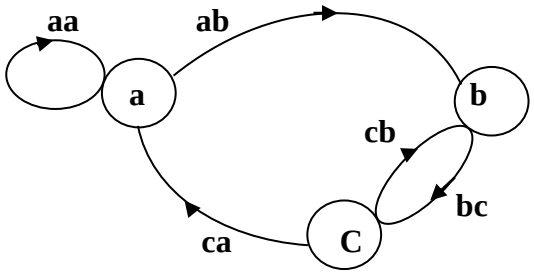
$t_G(b)\neq i_G(a)$ يؤدي الى الكلمة 0.3 $ba=0.7$ غير موجودة في نقاط $X_p(G)$.

$t_G(c)\neq i_G(c)$ يؤدي الى الكلمة 1 $cc=1$ غير موجودة في نقاط $X_p(G)$.

$t_G(b) \neq i_G(b)$ يؤدي الى الكلمة 0.7 $bb = 0.7$ غير موجودة في نقاط $X_p(G)$.

أي ان الكلمات الممنوعة هي $F = \{ac, ba, cc, bb\}$.

ولرسم بيان الحافة العليا الثنائية $G^{[2]}$ حيث المجموعة الراسية $V_{G^{[2]}} = L_1(G) = \{a, b, c\}$ ومجموعة الحافات لها هي $E_{G^{[2]}} = L_2(G) = \{aa, ab, bc, cb, ca\}$

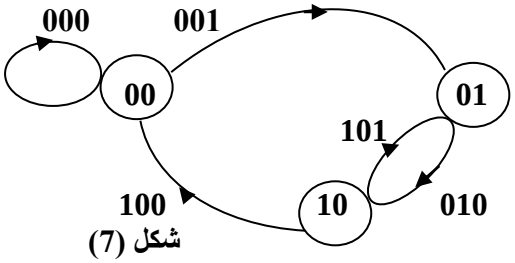


شكل (6)

ونلاحظ ان $t_G(a) = i_G(b)$ يودي الى ان ab حافة في $G^{[2]}$ لان $t_{G^{[2]}}(ab) = b$ و $i_{G^{[2]}}(ab) = a$ كذلك الحال بالنسبة للحافات ab, cb, bc, ca ، اما المصفوفة المجاورة لهذا البيان فهي

$$B_{G^{[2]}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ومن البيان $G^{[2]}$



شكل (7)

فان نقلة الحافة للبيان

$t_G(000) = i_G(000) = 00$ يؤدي الى ان الكلمة 000 000 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(000) = i_G(001) = 00$ يؤدي الى ان الكلمة 001 000 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(001) = i_G(010) = 01$ يؤدي الى ان الكلمة 010 001 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(010) = i_G(101) = 10$ يؤدي الى ان الكلمة 101 010 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(010) = i_G(100) = 10$ يؤدي الى ان الكلمة 100 010 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(101) = i_G(010) = 01$ يؤدي الى ان الكلمة 010 101 موجودة في $G^{[2]}$.

$t_G(100) = i_G(000) = 00$ **يؤدي الى ان الكلمة 000 100 موجودة في** $G^{[2]}$ **.**

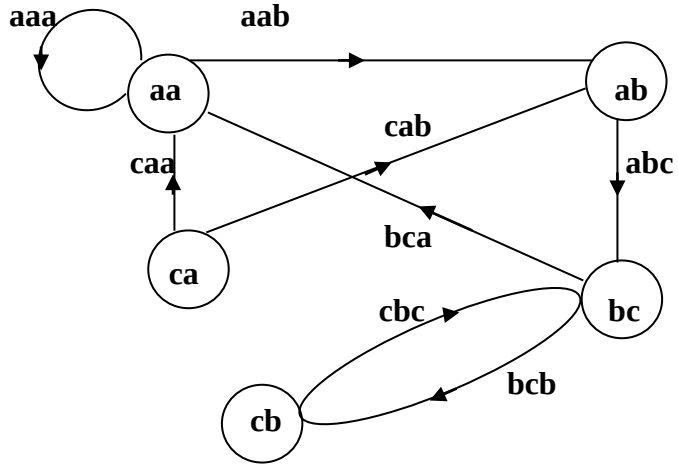
والكلمات الممنوعة للبيان $G^{[2]}$ **هي :**

$$F = \{010000,010000.101000,001001010001,101001,000010,010010,100010,$$

$$000101,001101,101101,100101,000100,001100,101100,100100\}$$

امـا البيـان $G^{[3]}$ **(بيـان الحافـة العليـا الثلاثيـة) فمجموعتـه الراسـية تكـون** $V_{G^{[3]}} = \{aa, ab, bc, cb, ca\}$ **ومجموعة حافاته هي**

$E_{G^{[3]}} = L_3(G) = \{aaa, aab, abc, bcb, cba, bca, caa, cab\}$ **ويرسم بالشكل**

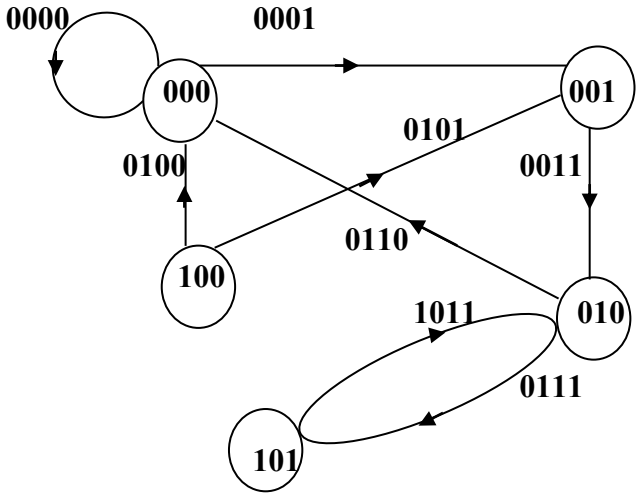


شكل (8)

والمصفوفة المجاورة للبيان $G^{[3]}$ **هي**

$$B_{G^{[3]}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنفس الطريقة السابقة نجد الكلمات الموجودة والكلمات الممنوعة في $G^{[3]}$ **ونقلة الحافة بدلالة 0 و1 عندما يكون البيان بالشكل التالي:**



شكل (9)

اما اذا اخذنا الاحتمالية الانتقالية للمجموعة الراسية $V = \{0,1\}$ **القيم** $P(1) = 0.76, P(0) = 0.24$ **نجد ان متجه الاحتمالية هو** $[0.76 \; 0.24]$ **ومجموعة الحافات** $P(a|0) = 0.3$ **و** $P(b|0) = 0.7$ **و** $P(c|1) = 1$ **وان المصفوفة الانتقالية للبيان الموجه تكون بالشكل التالي:**

$$A_{p_G} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ومجموعته الراسية تكون $V = \{p(0), p(1)\}$ **ومنها نجد ان**

$t_G(a) = i_G(a) = p(0)$ **يؤدي الى الكلمة** $0.3 \quad aa = 0.3$ **موجودة في نقاط** $X_p(G)$ **.**

$t_G(a) = i_G(b) = P(0)$ **يؤدي الى الكلمة** $0.7 \quad ab = 0.3$ **موجودة في نقاط** $X_p(G)$ **.**

$t_G(b) = i_G(c) = P(1)$ **يؤدي الى الكلمة** $1 \quad bc = 0.7$ **موجودة في نقاط** $X_p(G)$ **.**

$t_G(c) = i_G(a) = P(0)$ **يؤدي الى الكلمة** $0.3 \quad ca = 1$ **موجودة في نقاط** $X_p(G)$ **.**

بمعنى اخر من خلال تحديد المجموعة الراسية (مجموعة الحالات) مع الاحتمالية الموجبة نجد سلاسل ماركوف التبولوجية أي ان

$P_{00} = 0.3 \rangle 0$ **يؤدي الى الكلمة** $0.24 \quad P(0)P(0|0) = 0.24$ **موجودة في** $X_p(G)$ **.**

$P_{01} = 0.7 \rangle 0$ **يؤدي الى الكلمة** $0.76 \quad P(0)P(1|0) = 0.24$ **موجودة في** $X_p(G)$ **.**

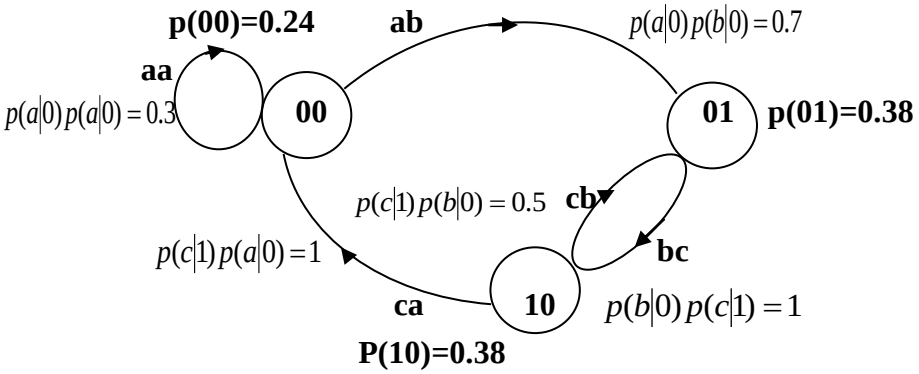
$P_{10} = 1 \rangle 0$ **يؤدي الى الكلمة** $0.24 \quad P(1)P(0|1) = 0.76$ **موجودة في** $X_p(G)$ **.**

$P_{11} = 0$ **يؤدي الى الكلمة** $0.24 \quad P(1)P(1|1) = 0.24$ **غير موجودة في** $X_p(G)$ **(ممنوعة).**

اما بالنسبة للمجموعة الراسية $V = \{p(a|0),\ p(b|0),\ p(c|1)\}$ ومجموعة الحافات

$$E = \{p(a|0)\,p(a|0),\ p(a|0)\,p(b|0),\ p(b|0)p(c|1),\ p(c|1)p(b|o),\ p(c|1)p(a|o)\}$$

التي بيانها التالي



شكل (10)

ومتجه الاحتمالية لها هو $[0.38,0.38$و $0.24]$ ،و نجد ان :

$t_G\,p(a|0)p(a|0) = p(a|0)p(a|0) = p(a|0)$ يؤدي الى الكلمة $aaa = 0.3 \quad 0.3 \quad 0.3$ موجودة في نقاط $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$t_G\,p(a|0)p(a|0) = p(a|0)p(b|0) = p(b|0)$ يؤدي الى الكلمة $aab = 0.3 \quad 0.3 \quad 0.7$ موجودة.

$t_G\,p(a|0)p(b|0) = p(b|0)p(c|1) = p(b|0)$ يؤدي الى الكلمة $abc = 0.3 \quad 0.7 \quad 1$ موجودة.

$t_G\,p(b|0)p(c|1) = p(c|1)p(b|0) = p(c|1)$ يؤدي الى الكلمة $\mathrm{bcb} = 0.7 \quad 1 \quad 0.5$ موجودة.

$\mathrm{t_G\,p(b|0)p(c|1) = p(c|1)p(a|0) = p(c|1)}$ يؤدي الى الكلمة $\mathrm{bca} = 0.7 \quad 1 \quad 1$ موجودة.

$t_G\,p(c|1)p(a|0) = p(a|0)p(a|0) = p(a|0)$ يؤدي الى الكلمة $caa = 1 \quad 0.3 \quad 0.3$ موجودة.

$t_G\,p(c|1)p(a|0) = p(a|0)p(b|0) = p(a|0)$ يؤدي الى الكلمة $cab = 1 \quad 0.3 \quad 0.7$ موجودة.

بمعنى اخر من خلال تحديد المجموعة الراسية (مجموعة الحالات) مع الاحتمالية الموجبة نجد سلاسل ماركوف التبولوجية أي ان

$\mathrm{P_{000}} = 0.3\rangle 0$ يؤدي الى الكلمة $0.24 \quad 0.24 \quad 0.24$ موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$\mathrm{P_{001}} = 0.7\rangle 0$ يؤدي الى الكلمة $0.24 \quad 0.24 \quad 0.38$ موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$\mathrm{P_{010}} = 1\rangle 0$ يؤدي الى الكلمة $0.24 \quad 0.38 \quad 0.38$ موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$\mathrm{P_{101}} = 0.5\rangle 0$ يؤدي الى الكلمة $0.38 \quad 0.38 \quad 0.38$ موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$\mathrm{P_{010}} = 1\rangle 0$ يؤدي الى الكلمة $0.38 \quad 0.38 \quad 0.24$ موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$P_{100} = 0.5 \rangle 0$ يؤدي الى الكلمة 0.24 0.38 038 موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

$P_{101} = 0.7 \rangle 0$ يؤدي الى الكلمة 0.38 0.24 0.38 موجودة في $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

اما $t_G\, p(a|0)p(a|0) \neq p(a|0)p(c|1)$ يؤدي الى الكلمة 1 0.3 0.3 $aac = 0.3$ غير موجودة في نقاط $X_p\left(G^{[2]}\right)$.

وبنفس الطريقة نحصل على الكلمات الممنوعة

$$F = \{aac, aca, acc, cca, bcc, ccb, bbc, bba, abb, baa, bbb, ccc, cba, acb, aba, bac\}$$

اما بالنسبة للمصفوفة الانتقالية للبيان الموجه فلها الصيغة التالية

$$B_{p_{G^{[2]}}} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

وهكذا نستمر بنفس العملية ومنها نحصل على ان سلسلة ماركوف X_p لها مصفوفة انتقالية M_p مقترنة ببيان والاخيرة مقترنة بمصفوفة لتعطينا سلسلة ماركوف التبولوجية ،وان سلسلة ماركوف هي حالة خاصة من لسلسلة ماركوف التبولوجية المعرفة على البيان الموجه ، وان الكلمات التي تظهر في $X_p(G)$ هي نفسها التي تظهر YG كذلك الحال بالنسبة للكلمات الممنوعة . وان الاحتمالية الموجبة للحرف تعتمد على ما قبلها مباشرة لكن الكلمة الممنوعة هي احتمالية حرف لاتعتمد على ماقبلها مباشرة وحصلنا ايضا على ان الدالة T تحتوي على كلمات ممنوعة مما يجعلها سلسلة ماركوف التبولوجية مع الاحتمالية الموجبة .

References

[1] Boyl, M. Symbolic Dynamics and Matrices, (appeared in the book) "Combinational and graph- Theoretical problems in linear Algebra", editors are Richard A. Brualdi. Shmuel Friedl and Vector Klee vol. 50 of IMA volumes in Mathematics and its Applications. Springer- Verlog ,pp. 1-38(1993).

[2] Gulick ,D. Encounter with Chaos, McGrew .Hill .Inc.(1992).

[3] Isaacson ,D.L. and R.W. Madsen , Markov Chain Theory and Application, John Wiley and Sons (1976).

[4] Kitchens , B.P. Symbolic Dynamics, One sided, Two sided and Countable state Marcov shifts , Spring- Verlag. New York (1998).

[5] Lind , D. and B. Marcus , An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding , Cambridge University Press (1995).

[6] Nasu , M. Maps in Symbolic Dynamics in : Lecture Notes of the Tenth KAIST Mathematics Workshop (1995).

[7] Skvarcius , R. and W. B. Robinson , Discrete Mathematics with Computer Science Applications , The Benjamin/ Cummings Publishing Company , Inc . (1986).

Graphic Representation of the Function of the Tent and its Probability

Suha I. S. AL-Ali

Abstract

The research includes a study of the tent function at a certain point which has a periodic function and forming a periodic sequence of symbols zero and one, and represent this situation by directed and entitled graph that expressed by the neighboring matrix and finding of a Markov series. Also a certain probability has been made according to the principles and conditions of the probability clause and found the probability vector and the transition matrix. In addition we also found the topologic Markov series. So, the words that appear in Xp (G) are the same ones that appear in YG well as for the prohibited words, in which the positive probability of the characters depends on the state before it directly not like the prohibited word. Finally, we get T function having the prohibited words which make it a topologic Markov series with the positive probability.